Philipp Schade

Innere-Punkte-Verfahren mit Redundanzerkennung für die Quadratische Optimierung

GABLER EDITION WISSENSCHAFT

Philipp Schade

Innere-Punkte-Verfahren mit Redundanzerkennung für die Quadratische Optimierung

GABLER EDITION WISSENSCHAFT

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2007

1. Auflage 2008

Lektorat: Frauke Schindler / Anita Wilke

Gabler ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.gabler.de

Umschlaggestaltung: Regine Zimmer, Dipl.-Designerin, Frankfurt/Main
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in Germany

ISBN 978-3-8349-1019-6

Vorwort

Reich ist man nicht durch das, was man besitzt, sondern mehr noch durch das, was man mit Würde zu entbehren weiß, und es könnte sein, dass die Menschheit reicher wird, indem sie ärmer wird und gewinnt, indem sie verliert.
Immanuel Kant[1]

Kaum treffender lässt sich dieser Ausspruch Kants auf das Thema dieser Arbeit übertragen. Um es kurz zu umreißen: Für Optimierungsprobleme kämpfen selbst aktuelle Lösungsverfahren mit dem schwerwiegenden Nachteil, zum Auffinden einer optimalen Lösung Informationen verarbeiten zu müssen, die für die Bestimmung der optimalen Lösung keinerlei Beitrag leisten und in diesem Sinne überflüssig sind. Leider wird uns zu spät – nämlich erst mit Kenntnis der optimalen Lösung – gewiss, welche Informationen von vornherein hätten ignoriert werden können. Mit neuen theoretischen Erkenntnissen und darauf basierenden Lösungsverfahren lassen sich möglicherweise solcherart überflüssige Informationen identifizieren und ignorieren. Wir würden „gewinnen", indem wir „verlieren".

Diese Arbeit entstand als Dissertation im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Operations Research der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät an der Technischen Universität Dortmund. Sie wurde wesentlich motiviert durch die vorausgehenden Arbeiten meines Doktorvaters Herrn Prof. Dr. Peter Recht zur Identifikation nicht-aktiver Restriktionen für die konvex-quadratische Optimierung. An erster Stelle gebührt ihm mein herzlichster Dank. Er ermöglichte mir nicht nur, diesen akademischen Schritt zu gehen, nein, vielmehr ermunterte er mich ganz zu Beginn sogar erst dazu. Sehr zu schätzen gelernt habe ich zudem das außergewöhnlich freie, unabhängige und familiäre Arbeitsklima an seinem Lehrstuhl und den förderlichen gemeinsamen Umgang, der wohl wesentlich auch meine Persönlichkeit geprägt hat. Mit Freude denke ich an diese Lehr(stuhl)jahre zurück.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinem Zweitgutachter Herrn Prof. Dr. Wolfgang Achtziger vom Fachbereich Mathematik und meinem dritten

[1] Aus *Königsberger Weisheiten – Eine ebenso ergötzliche wie nachdenkliche Sammlung von Aussprüchen Königsberger Denker und Dichter*, Gräfe und Unzer Verlag, Königsberg (Pr.), ca. 1940.

Prüfer Herrn Prof. Dr. Andreas Liening für deren spontane Bereitschaft, meine Arbeit zu begutachten. Herrn Prof. Dr. Wolfgang Achtziger danke ich darüber hinaus für seine permanente moralische und finanzielle Unterstützung unseres Programmierprojektes *qipp* und schließlich für seine herrlich erfrischende Art und seine unterhaltsamen Erzählungen und Anekdoten. Über ihn lernte ich Herrn Dr. Kay Moritzen kennen, in dem ich nicht nur einen begeisterten *qipp*-Mitinitiator und kritischen Kollegen gewonnen habe, sondern vielmehr auch einen lieben Freund. Ihm danke ich für die permanente Unterstützung bei der Entwicklung von *qipp* und die vielen fachlichen und privaten Diskussionen.

Die intensive Beschäftigung mit dieser Arbeit hinterließ zudem merkbare Spuren auch in meinem Privatleben. Ich bedanke mich bei allen meinen Freunden, die trotz sich wiederholender Phasen zeitlicher Entbehrung und regelmäßiger Absagen dennoch immer den Kontakt suchten und letztlich auch durch gemeinsame Rennradausflüge für die dringend nötige geistige und körperliche Abwechslung sorgten.

Der größte Dank und Respekt gebührt abschließend meiner ganzen Familie, vor allem meinen Eltern Annette und Dr. Lutz Schade und meiner Freundin, die mir Wegbereiter und ständiger Wegbegleiter waren. Ohne ihre immerwährende und uneingeschränkte Unterstützung, ohne ihren ständigen Zuspruch in selbstkritischen Phasen und ohne ihre Toleranz gegenüber ungewöhnlichen Arbeitszeiten und regelmäßigen Gemütswallungen, Hochs und Tiefs, aber auch ohne ihren wohldosierten und fordernden Nachdruck würde ich heute dieses Vorwort nicht schreiben.

Ich danke Herrn Dr. Rüdiger Reinhardt für seine begeisternde und kritische Auseinandersetzung mit der Arbeit und für seine gewinnbringenden, fachlichen Anmerkungen und Anregungen auf dem Weg zur Disputation. Ich bedanke mich auch bei allen Studierenden, die immer für Abwechslung und Herausforderungen in meinem Lehrbetrieb und Unialltag sorgten, an dem ich zudem immer viel Freude hatte, und bei allen anderen Personen, die mich im Laufe der letzten Jahre begleiteten, prägten und hier nicht alle namentlich erwähnt werden können.

Dem Leser wünsche ich abschließend viel Freude bei der Lektüre dieser Arbeit. Für fachliche Diskussionen und Anregungen stehe ich gerne jederzeit zur Verfügung.

Philipp Schade

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einführung

Die Komplexität heutiger technisch-ökonomischer Systeme bringt es mit sich, dass im Rahmen der unternehmensstrategischen Steuerungsprozesse regelmäßig vielfältige Entscheidungen zu ebenso komplexen betriebswirtschaftlichen Sachverhalten zu treffen sind. In diesem Zusammenhang bedarf es geeigneter entscheidungsunterstützender „Werkzeuge" und Methoden. Mit dem *Operations Research* steht an dieser Stelle ein interdisziplinäres Wissenschaftsgebiet zur Verfügung, dass sich als ein Bindeglied zur Betriebswirtschaft mit den praxisrelevanten Problemstellungen auf der einen Seite und zur Optimierung als ein Teilgebiet der numerischen Mathematik auf der anderen Seite versteht. Die enge Verzahnung mit der betriebswirtschaftlichen Steuerung macht im Englischen der synonym verwendete Begriff des *Management Science* deutlich. Darüber hinaus spielt das Operations Research heute ebenfalls für das Wirtschaftsingenieurwesen im Rahmen der Fertigungsplanung und -organisation eine immer bedeutendere Rolle.

Während im allgemeinen Sprachverständnis der Begriff „optimieren" fast ausschließlich im Sinne von „etwas verbessern" verwendet wird, meint die strenge Begrifflichkeit des „Optimierens" die Bestimmung einer optimalen – d. h. *bestmöglichen* – Festlegung bestimmter entscheidungsrelevanter Größen (über sog. *Entscheidungsfragen*) innerhalb eines technisch-ökonomischen Systems hinsichtlich einer definierten Zielstellung (sog. *Entscheidungsziel*) und unter Berücksichtigung von vorgegebenen Beschränkungen für die Entscheidung (sog. *Entscheidungsschranken*). Das Operations Research hat daher die Aufgabe, für die Bereitstellung der Festlegung dieser Entscheidungsgrößen eine geeignete mathematische Formulierung der ökonomischen Fragestellung aufzustellen. Dabei werden die Entscheidungsfragen über sog. *Entscheidungsvariablen*, die Entscheidungsschranken über sog. *Nebenbedingungen* und das Entscheidungsziel über eine *Zielfunktion* im Rahmen eines Optimierungsmodells bzw. -problems dargestellt.

Für eine Klassifikation der Typen von Entscheidungsproblemen unterscheidet man allgemein *lineare* und *nicht-lineare* Optimierungsprobleme. Bei der linearen Optimierung stehen die Entscheidungsvariablen innerhalb der Zielfunktion und der Nebenbedingungen in einem linearen Zusammenhang. Nicht-lineare Optimierungsprobleme weisen dagegen allgemein nicht-lineare Zusammenhänge auf. Während für die linearen Optimierungsprobleme beispielsweise mit dem Simplex-Verfahren geeignete Lösungsverfahren zur Verfügung stehen, existieren dagegen für die nicht-lineare Optimierung keine universellen Verfahren zur Lösung dieser Probleme.

Eine Teilkategorie der nicht-linearen Probleme stellen die *konvexen Optimierungsprobleme* dar, von denen die *konvex-quadratischen Optimierungsprobleme* wiederum eine wichtige Unterklasse bilden. Bei den konvexen Problemen liegen die Zielfunktion und die Nebenbedingungen als konvexe Funktionen vor. Quadratische Optimierungsprobleme zeichnen sich speziell durch eine quadratische Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen aus.

Viele ökonomische Fragestellungen sind in Form eines quadratisches Optimierungsproblems darstellbar. Konkret finden quadratische Entscheidungsprobleme beispielsweise Anwendung in der Strombedarfsplanung [123] oder Kraftwerkssteuerung [33], in der Strahlenforschung innerhalb der Medizin [61], in der Landwirtschaft [78] oder in der Statistik im Zusammenhang mit der Varianz- bzw. Regressionsanalyse und der „Methode der kleinsten Quadrate“ [50]. Eine Vielzahl von Finanz- und versicherungsmathematischen Fragestellungen lassen sich zudem im Rahmen der sog. *Portefeuille-Optimierung* als quadratisches Optimierungsproblem modellieren (siehe z. B. [80, 118, 38, 53] bzw. [79, 16, 103]). Darüber hinaus werden innerhalb der mathematischen Optimierung quadratische Optimierungsprobleme oftmals als Unterprobleme in Verfahren für allgemein nicht-lineare Optimierungsprobleme gelöst. In diesem Zusammenhang sind beispielsweise die sog. SQP-Verfahren[1] [67, Kap. 13] zu nennen, die heute gemeinhin als die wichtigste Klasse von Verfahren zur Lösung von allgemeinen nicht-linearen Optimierungsproblemen gelten [44, Kap. 5.5].

Die Vielfältigkeit heutiger betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme impliziert, dass das Operations Research nicht als ein starrer Werkzeugkasten vorgefertigter „Modellformulierungen“ verstanden werden kann, sondern vielmehr als eine allgemeingültige und flexible Methodenbasis, die der individuellen Behandlung der jeweiligen ökonomischen Fragestellung gerecht wird. Es ist daher ebenso Aufgabe des Operations Research, in dieser Weise geeignete Methoden, Verfahren und Techniken zu entwickeln und bereitzustellen.

Während sich die Komplexität heutiger Entscheidungsprobleme schließlich in der Art und der Größe der resultierenden mathematischen Modellformulierungen widerspiegelt, werden wir zusätzlich mit der Anforde-

[1] Dabei steht die Abkürzung SQP für *Sequential Quadratic Programming*.

rung konfrontiert, die Entscheidung und damit die Lösung des Problems in *kürzestmöglicher* Zeit bzw. innerhalb definierter Zeitvorgaben zu liefern. Anstelle einer optimalen Lösung lässt sich daher häufig über Näherungsverfahren (sog. Heuristiken) lediglich eine Näherungslösung in geeigneter Lösungszeit angeben. Die durch das Operations Research bereitzustellenden Verfahren müssen daher in der Lage sein, die mit den Entscheidungsproblemen korrespondierenden mathematischen Modelle sowohl in ihrer Größe als darüber hinaus auch hinreichend schnell „verarbeiten" zu können. Eine aktuelle und relevante Fragestellung für die Steuerung des europäischen und des amerikanischen Luftverkehrssystems motiviert im Folgenden beispielhaft die Notwendigkeit für solche Verfahren.

Notwendigkeit der Steuerung des europäischen und amerikanischen Luftverkehrssystems

Dem Jahresbericht 2006 der europäischen Flugverkehrssicherung (EUROCONTROL) [37] entnimmt man, dass der europäische Luftverkehr seit Mitte der 90er Jahre um etwa 50 Prozent zugenommen hat. Ausgehend von ca. 9,6 Millionen registrierten Flügen im Jahr 2006 wird ein Luftverkehrswachstum bis zum Jahr 2011 um 21,7 % erwartet. Für das Jahr 2025 prognostiziert das SES ATM Research[2] (SESAR) Konsortium ein weiteres Wachstum auf insgesamt bis zu 22 Millionen kommerzieller Flüge [37]. Das stetige Wachstum des Luftverkehrs führt schon heute zu Kapazitätsengpässen sowohl für die Flughäfen als auch für die einzelnen Sektoren des Luftraums. Während Kapazitätsengpässe für den Straßenverkehr durch den Bau zusätzlicher Straßen entschärft werden können, kann dem Wachstum des Luftverkehrs nur mit der effizienteren Nutzung existierender Infrastrukturen bzw. mit der Einführung neuer Technologien begegnet werden.

Die Luftverkehrssteuerung (engl. *Air Traffic Manangement*, kurz ATM) gewinnt damit immer weiter an Bedeutung. Ihre Aufgabe besteht im Wesentlichen darin, allen Teilnehmern am Luftverkehr die Einhaltung der geplanten Flugpläne für Abflug und Landung zu ermöglichen. Das *Air Traffic Flow Management* (ATFM) umfasst dabei eine Reihe von Aktivitäten, um einen „optimalen" Fluss des Luftverkehrs innerhalb des Luftverkehrsraums sicherzustellen, insbesondere dann, wenn die Nachfrage die verfügbare Ka-

[2] Das „Single European Sky Air Traffic Management Research Programme" ist ein von der Europäischen Kommission in Zusammenarbeit mit der europäischen Flugverkehrssicherung EUROCONTROL initiiertes Projekt im Rahmen des europäischen Flugverkehrsmanagements.

pazität des Luftverkehrssystems übersteigt bzw. ein Kapazitätsengpass prognostiziert wird.

Die durch ausgeschöpfte Kapazitäten des Luftverkehrsraums bedingten unmittelbaren Auswirkungen auf den Verkehrsfluss haben Verzögerungen für das gesamte Luftverkehrssystem zur Folge mit beträchtlichen finanziellen Implikationen (engl. *delay costs*). Jede Verspätungsminute ruft dabei durchschnittlich Kosten in Höhe von 109 € hervor [36].[3] Täglich durchschnittlich 50 279 Verspätungsminuten [35] verursachten damit für das Jahr 2006 innerhalb des europäischen Luftverkehrssystems Kosten allein für Verspätungen im Luftverkehr in Höhe von mindestens 2,0 Milliarden €. Im gleichen Zeitraum bezifferte die amerikanische Air Transport Association (ATA) die Kosten in Folge von Verspätungen mit 116,5 Millionen Verspätungsminuten innerhalb des amerikanischen Luftverkehrssystems auf 7,7 Milliarden US-Dollar [2].

Diese Kostengrößen verdeutlichen nachgerade die Notwendigkeit einer effizienten Flugverkehrssteuerung. Die Aktivitäten des Air Traffic Flow Managements zur Organisation und Steuerung des Verkehrsflusses müssen daher darauf ausgerichtet sein, allen Teilnehmern am Flugverkehr einen sicheren, geordneten und schnellen Flug zu gewährleisten, während die verfügbare Kapazität des gesamten Luftverkehrssystems zu jeder Zeit und an jedem Ort zu berücksichtigten ist.

Ein wichtiges Instrument innerhalb des ATFM ist das sog. *Ground Delay Program* (GDP). Im Rahmen dessen wird der Abflug eines startbereiten Flugzeuges am Abflughafen gezielt so lange verzögert, bis die Kapazität am Ankunftsflughafen zu der prognostizierten Ankunftszeit für eine direkte Landung ausreicht. Solche Programme werden immer dann eingesetzt, wenn die Landungsrate an den Zielflughäfen beispielsweise auf Grund schlechten Wetters eingeschränkt ist oder allgemein immer dann, wenn die prognostizierte Nachfrage die vorhandenen Kapazitäten für eine bestimmte Periode überschreitet. Auf diese Weise kann der Bedarf an Landungen auf einem akzeptablen Niveau gehalten, das Fliegen von Warteschleifen (engl. *holding*) über dem Zielgebiet vermieden oder die Umleitung zu Ausweichflughäfen verhindert werden.

Dem Piloten eines startbereiten Flugzeugs wird zu diesem Zweck mit seinem Kommando „ready for take-off“ auf Basis einer Entscheidung im Rahmen des GDP eine erwartete freigegebene Abflugzeit (EDCT, engl. *ex-*

[3]Die angegebenen Durchschnittskosten basieren dabei auf Daten des „Westminister Reports“ [117] aus dem Jahr 2004 und wurden auf das Preisniveau des Jahres 2006 projiziert.

pected departure clearance time) mitgeteilt. Die zugewiesene Abflugverzögerung (DA, engl. *delay assignment*) muss dabei unter anderem sowohl die Kapazitätsbeschränkungen innerhalb der Luftsektoren der Flugroute, das Gesamtaufkommen aller startenden und landenden Flugzeuge am Zielflughafen sowie etwaige Anschlussflüge der zu- und umsteigenden Passagiere berücksichtigen. Ein funktionierendes GDP muss daher zur Entscheidungsfindung eine systemweite Betrachtung mit entsprechend schnellen Reaktionszeiten voraussetzen.

Der europäische Luftverkehrsraum ist aktuell in 1 246 kontrollierte Sektoren (sog. FMP, engl. *flow management position*) aufgeteilt, die sowohl reine Luftraumsegmente als auch Flughäfen umfassen. Für das europäische Luftverkehrssystem wurden im Jahr 2006 täglich durchschnittlich 26 286 Flüge verzeichnet (mit einer höchsten jemals registrierten Spitzenbelastung am 15.9.2006 mit 31 914 Flügen). [35]

Damit wird deutlich, dass in ein realitätsnahes, tagesbasiertes Abbild des Luftverkehrssystems innerhalb eines entscheidungsunterstützenden Modells für das GDP je nach Art der Modellierung bis zu mehreren Millionen entscheidungsrelevanter Informationen (Variablen und Nebenbedingungen) einfließen müssen. Kurzfristige ad-hoc-Entscheidungen für den Piloten direkt vor dem Abflug sind auf diese Weise rechentechnisch nicht realisierbar. Neben dem Aufstellen geeigneter Entscheidungsmodelle bedarf es daher ebenfalls entsprechender Lösungsverfahren, die in der Lage sind, selbst für derart großskalierte Entscheidungsprobleme optimale Entscheidungen in kürzester Zeit zu generieren.

In [8] wurde beispielsweise ausgehend von einem linearen deterministischen Modell ein quadratisches Optimierungsproblem abgeleitet. Beide Problemtypen werden im Folgenden kurz vorgestellt. Dazu sei $A \subseteq \mathbb{N}_+$ die Menge der für den Zeitraum von einer Stunde zu betrachtenden Flugzeuge. Es sei $n := \text{card}\,(A)$ die Kardinalität der Menge A, d. h. die Anzahl der Flugzeuge. Für jedes der n Flugzeuge $i \in A$ sei $v_i \in \mathbb{R}_+$ die im Rahmen des GDP zugewiesene Abflugverzögerung (DA) in Minuten und damit $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ die für das Entscheidungsproblem relevante vektorwertige Variable. Es beschreibe $S \subseteq \mathbb{N}_+$ die Menge der betrachteten Luftraumsektoren und $c_k \in \mathbb{N}_+$ die verfügbare Kapazität jedes Sektors $k \in S$ an Flugzeugen pro Stunde. Wir bezeichnen mit $t_{k,i} \in \mathbb{N}_+$ die geplante Eintrittszeit jedes Flugzeugs $i \in A$ für den Sektor $k \in S$. Zur Vermeidung von Kapazitätsengpässen muss für alle Sektoren $k \in S$ und für je zwei Flugzeuge

$i, j \in A$ schließlich die folgende Kapazitätsbedingung

$$(t_{k,i} + v_i) - (t_{k,j} + v_j) \geq \frac{60}{c_k}, \quad \forall\, i, j \in A,\, \forall\, k \in S$$

erfüllt sein. Mit dieser Bedingung wird jedem in den k-ten Sektor eintretenden Flugzeug ein eigenes Zeitfenster der Länge $60/c_k$ Minuten zugesichert. Auf diese Weise wird gewährleistet, dass die Kapazität je Sektor k von c_k Flugzeugen pro Stunde nicht überschritten wird.

Wir erhalten auf diese Weise ein lineares Optimierungsproblem zur Minimierung der zuzuweisenden Gesamtverzögerung $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ der Form

$$\begin{aligned} &\min_{v \in \mathbb{R}^n_+} \sum_{i \in A} w_i \cdot v_i \\ \text{u. d. N. } \; & v_i - v_j \geq 60/c_k + t_{k,j} - t_{k,i}, \quad \forall\, k \in S,\, \forall\, i, j \in A \\ & v_i \geq 0, \quad \forall\, i \in A, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei über einen Gewichtsvektor $w = (w_i)_{i \in A} \in \mathbb{R}^n_+$ die zugewiesene Verzögerung gewichtet werden kann. Der Leser beachte die Dimension dieses Optimierungsproblems für den Fall, dass der gesamte europäische Luftraum mit 1 246 Sektoren simultan betrachtet werden würde. Mit durchschnittlich $n = 1\,095$ Flügen pro Stunde (im Jahr 2006) müssten hier insgesamt $m = 1\,246 \cdot 1\,095 \cdot 1\,095 = 1\,493\,985\,150$ Nebenbedingungen und zusätzlich 1 246 Variablenbeschränkungen berücksichtigt werden. Ein Lösungsverfahren zur linearen Optimierung hätte in diesem Beispiel eine Nebenbedingungsmatrix der Dimension $1\,493\,985\,150 \times 1\,095$ zu „verarbeiten“, eine Matrix also mit ca. 1,5 Milliarden Zeilen und eintausendeinhundert Spalten.

Eine übliche Erweiterung als quadratisches Optimierungsproblem erhalten wir, wenn das Verkehrsaufkommen innerhalb der Luftraumsektoren als stochastisch angenommen wird.[4] Daher werde der Gewichtsvektor $w \in \mathbb{R}^n_+$ jetzt als Zufallsvektor $W = (W_1, \ldots, W_n)^T$ von Zufallsvariablen W_i, $i = 1, \ldots, n$ eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraums angegeben. Wir bezeichnen mit $\mu := E(W)$ den Erwartungswertvektor und mit $K := E((W - \mu)(W - \mu)^T)$ die Kovarianzmatrix für W. Während in Vektorschreibweise im deterministischen Modell (1.1) als Entscheidungsziel $w^T v$ minimiert wird, ergibt sich in der stochastischen Formulierung ein Ska-

[4] Zur Motivation dieser Annahme werde das Verkehrsaufkommen beispielsweise allein durch das jeweilige Wetter innerhalb von Sektor k nicht-deterministisch beeinflusst.

larprodukt $\langle W, v\rangle$ bestehend aus dem Vektor der Verzögerungen $v \in \mathbb{R}_+^n$ und dem Zufallsvektor der Gewichte W. Wegen $E(\langle W, v\rangle) = \langle E(W), v\rangle = \mu^T v$ und $\operatorname{var}(\langle W, v\rangle) = v^T K v$ erhalten wir eine innerhalb der Portfolio-Optimierung übliche Formulierung für die Zielfunktion als Minimierung von Erwartungswert und Varianz (sog. *Mean-Variance-Ansatz*, siehe zum Beispiel Markowitz [81] oder Steiner und Bruns [104]) als

$$\min_{v \in \mathbb{R}^n} E(\langle W, v\rangle) + \lambda \operatorname{var}(\langle W, v\rangle)$$

mit einem Steuerungsparameter $\lambda \geq 0$ für die Risikoeinstellung des Entscheiders. Für das GDP ergibt sich damit unter Berücksichtigung des Risikos über den quadratischen Term $v^T K v$ das quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\min_{v \in \mathbb{R}_+^n} \mu^T v + \lambda v^T K v \\ \text{u. d. N. } \; & v_i - v_j \geq 60/c_k + t_{k,j} - t_{k,i}, \quad \forall\, k \in S,\ \forall\, i, j \in A \\ & v_i \geq 0, \quad \forall\, i \in A \end{aligned}$$

mit einer auf Grund der Kovarianz symmetrischen und positiv-semidefiniten Matrix $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Aussagen über die Dimension des Problems gelten damit uneingeschränkt auch für die quadratische Formulierung. Ein Problem dieser Größenordnung ist derzeit sowohl für die lineare als auch für die quadratische Optimierung nicht in angemessener Zeit zu lösen.

1.1 Zielstellung dieser Arbeit

Die mathematische Modellformulierung zur Abbildung aktueller, praxisrelevanter Fragestellungen innerhalb von technisch-ökonomischen Entscheidungssystemen führt – wie beispielhaft gezeigt wurde – schnell zu quadratischen Optimierungsproblemen mit einigen Tausend entscheidungsrelevanten Variablen und Nebenbedingungen. Letztere schränken die Menge der möglichen Lösungen für die Probleme auf die sog. Menge *zulässiger* Lösungen ein. Die Bestimmung einer Menge von *optimalen* Lösungen unter den zulässigen Lösungen unter Berücksichtigung aller Nebenbedingungen des Problems gestaltet sich rechentechnisch aufwändig. In diesem Sinne werden effiziente Lösungsverfahren benötigt.

Lassen sich die einzelnen Nebenbedingungen für ein Optimierungsproblem in Abhängigkeit der gesuchten Variablenwerte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ durch einen linearen Zusammenhang ausdrücken, d. h. es gilt $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$ mit geeigneten, vorgegebenen Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$, so sprechen wir von linearen Nebenbedingungssystemen. Solche Systeme von linearen Nebenbedingungen sind in der Realität häufig anzutreffen. Obwohl für Nebenbedingungen auch funktionale Zusammenhänge höherer Ordnung vorkommen (bspw. logarithmisch, quadratisch, kubisch o. ä.), werden in dieser Arbeit ausschließlich lineare Nebenbedingungssysteme betrachtet.

Aus der Anschauung wissen wir, dass sich ein Punkt $(x_1, x_2)^T$ in der Ebene eindeutig als Schnittpunkt zweier Geraden angeben lässt. Einen Punkt $(x_1, x_2, x_3)^T$ in einem dreidimensionalen Raum finden wir dagegen eindeutig als Schnittpunkt dreier Ebenen. Allgemein in einem n-dimensionalen Raum sprechen wir in diesem Zusammenhang von Hyperebenen. Ein Punkt $(x_1, \ldots, x_n)^T$ eines n-dimensionalen Raumes lässt sich damit eindeutig als Schnittpunkt von n Hyperebenen angeben. Für die linearen Nebenbedingungssysteme bedeutet das, dass für die Bestimmung einer n-dimensionalen Lösung des betrachteten Optimierungsproblems als ein Punkt der zulässigen Menge höchstens[5] n dieser Nebenbedingungen betrachtet werden müssen. Bestehen die Nebenbedingungssysteme aus $m \gg n$ Nebenbedingungen, sind in diesem Sinne mindestens $m - n$ Nebenbedingungen für die Angabe einer optimalen Lösung nicht relevant und könnten daher innerhalb eines Lösungsverfahrens ignoriert werden. Für ein Lösungsverfahren, welches lediglich die so reduzierte Menge der relevanten Nebenbedingungen zum Auffinden einer Lösung berücksichtigt, ließen sich auf diese Weise der rechentechnische Aufwand und damit die Lösungszeiten deutlich verringern.

Logischerweise lässt sich *ohne* die Kenntnis der Lösung nicht angeben, welche Auswahl von höchstens n der m Nebenbedingungen berücksichtigt werden müsste. Es ergeben sich $\binom{m}{n}, \binom{m}{n-1}, \ldots, \binom{m}{1}$ mögliche Kombinationen zu betrachtender Nebenbedingungen, aus denen die relevante daher nur mit hohem rechentechnischen Aufwand auszuwählen wäre. Da wir zunächst keine Anhaltspunkte haben, nach welchen Kriterien eine solche Kombination gewählt werden kann, lässt es sich nicht vermeiden, das komplette System der m Nebenbedingungen durch die Lösungsverfahren zu „verarbeiten“. Die Bestimmung der optimalen Lösungsmenge innerhalb der Lösungsverfahren wird auf diese Weise durch unnötige Informationen wegen der unvermeidbaren Einbeziehung solcher Nebenbedingungen we-

[5] Das ist immer genau dann der Fall, wenn das Optimum des Optimierungsproblems in einer Ecke der sich durch die linearen Nebenbedingungen ergebenden Menge zulässiger Punkte angenommen wird.

sentlich (und möglicherweise nachteilig) beeinflusst. Zudem werden Systeme betrachtet, die damit deutlich größer als notwendig für die Bestimmung einer optimalen Lösung sind.

Seit den sechziger Jahren – also seit der Einführung der linearen Optimierung – sind sich Forscher des Problems dieser überflüssigen Nebenbedingungen bewusst. Schon Dantzig [21] erwähnte, dass es Nebenbedingungen gibt, die für die Bestimmung des Optimums nicht relevant sind und vorhergesagt werden könnten. In der Folgezeit untersuchte man in diesem Zusammenhang sog. *redundante* Nebenbedingungen als eine Untermenge der überflüssigen Nebenbedingungen. Das sind Nebenbedingungen, die für die Beschreibung der zulässigen Menge der Lösungen nicht relevant sind und damit ignoriert werden könnten, ohne die zulässige Menge zu verändern. Für die linearen Optimierungsprobleme zeigte sich, dass die Angabe dieser redundanten Nebenbedingungen genauso aufwendig ist, wie die Bestimmung der Lösung des Problems selber [32]. Für die quadratische Optimierung lassen sich auf Grund der besonderen Gestalt dieser Probleme Kriterien angeben, mit denen Nebenbedingungen erkannt werden, die für das Optimum nicht relevant sind [94]. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von *nicht-bindenden* Nebenbedingungen.

Mit den sog. *Innere-Punkte-Methoden* verfügen wir heute für die quadratische Optimierung über eine geeignete Verfahrensklasse zur iterativen Lösung solcher Optimierungsprobleme. Die Art und Weise wie im Verlauf dieser Verfahren Iterationspunkte erzeugt werden, ist zudem prädestiniert für die Anwendung der erwähnten Kriterien zur Idenfikation nichtbindender Nebenbedingungen. So könnten bei Anwendung dieser Kritierien von Iteration zu Iteration solcherart Nebenbedingungen eliminiert werden, so dass sukzessive die Problemgröße reduziert und in Folge dessen die Lösung des quadratischen Optimierungsproblems beschleunigt wird.

Es ist damit das Ziel dieser Arbeit festzustellen, wie die bestehenden Innere-Punkte-Verfahren für die quadratische Optimierung um die Techniken zur Identifikation und der Eliminierung von nicht-bindenden Nebenbedingungen erweitert werden können. In diesem Zusammenhang untersuchen wir, welchen Einfluss die nicht-bindenden Nebenbedingungen auf den Lösungsprozess üben und insbesondere welche Auswirkungen die Elimination dieser Nebenbedingungen auf ebendiesen haben. Aufbauend auf den theoretischen Überlegungen und den Beobachtungen, die in dieser Weise erstmals für die quadratische Optimierung dargestellt werden, entwerfen wir ein modifiziertes Innere-Punkte-Verfahren. Mit der anschließenden Implementierung des Verfahrens entwickeln wir einen praxistauglichen Programmcode (ein sog. *Solver* oder *Löser*) namens *qipp* zur Lösung quadratischer Optimierungsprobleme über Innere-Punkte-Verfahren. Über einen Optionsschalter lässt sich dabei die Erkennung und Eliminierung nichtbindender Nebenbedingungen aktivieren. Die Resultate für das Laufzeitverhalten bei einer umfangreichen Auswahl von Beispielproblemen werden abschließend dargestellt.

1.2 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in folgender Weise aufgebaut: Im Anschluss an diese Einleitung stellen wir in Kapitel 2 kurz die wesentlichen Eigenschaften quadratischer Optimierungsprobleme vor. Mit Hilfe der Dualitätstheorie werden zunächst das korrespondierende duale Programm aufgestellt und einführend grundlegende Optimalitätskriterien für die quadratische Optimierung besprochen. Wir setzen das Kapitel mit einer überblicklichen Vorstellung der Innere-Punkte-Verfahren und einer heute üblichen Klassifizierung der einzelnen Verfahrenstypen fort. Weiter vertiefen wir die Betrachtung hin zu den Pfadverfolgungsverfahren bzw. weitergehend zu Prädiktor-Korrektor-Verfahren. Mit den Vorschlägen von Mehrotra und Gondzio werden zwei heute übliche Erweiterungen für die Implementierung von Innere-Punkte-Verfahren im Detail vorgestellt.

Die wesentlichen theoretischen Hintergründe für die Identifizierung nichtaktiver Restriktionen im Kontext der quadratischen Optimierung finden wir in Kapitel 3. Ein vorangehender Überblick über die geschichtliche Entwicklung zur Theorie und Praxis der Redundanzerkennung verdeutlicht auf der einen Seite die zentrale Bedeutung der Arbeiten in diesem Gebiet, zeigt aber auf der anderen Seite mit den nur wenigen Arbeiten zu diesem Thema die Schwierigkeiten, die offenbar damit verbunden sind. Ausführlich werden anschließend die Kriterien zur Identifikation nicht-aktiver Nebenbedingungen vorgestellt, die innerhalb des später zu entwickelnden Verfahrens eingesetzt werden.

In Kapitel 4 zeigen wir den theoretisch wichtigen Zusammenhang zwischen der logarithmischen Barriere-Funktion und den Innere-Punkte-Verfahren und liefern damit grundlegende theoretische Kenntnisse für die anschließende Untersuchung. Über theoretische Ausführungen zu Abstandsmaßen und dem sog. *zentralen Pfad* werden erstmals die Besonderheiten im Zusammenhang mit der Elimination von überflüssigen Nebenbedingungen im Rahmen der Innere-Punkte-Verfahren für die quadratische Optimierung erarbeitet. Sie motivieren die grundlegende Vorgehensweise für die Implementierung eines geeigneten Verfahrens in dem nachfolgenden Kapitel. Ziel dieses Kapitels ist die Erarbeitung eines algorithmischen Schemas für ein Lösungsverfahren im Rahmen der Innere-Punkte-Verfahren, das die Früherkennung der Redundanzen unterstützt und durch Eliminieren letztlich praktiziert.

Das Kapitel 5 stellt detailliert alle Hintergründe der Implementierung des Innere-Punkte-Verfahrens für die quadratische Optimierung unter Einbeziehung der Möglichkeiten zur Identifikation und Eliminierung nicht-aktiver Restriktionen vor. Dabei werden die Besonderheiten für die Implementierung des Verfahrens und die Auswirkungen der Elimination nicht-aktiver Restriktionen auf die primal-duale Programmstruktur verdeutlicht. Eine Auswertung der ersten rechentechnischen Ergebnisse und der Vergleich zwischen der Lösung mit und ohne der Eliminierung identifizierter nicht-aktiver Restriktionen finden wir in dem sechsten Kapitel.

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit und Anregungen, wo und wie eine weiterführende Forschung sinnvoll ist und ansetzen könnte, gibt die abschließende Zusammenfassung samt Ausblick wieder.

1.3 Verwendete Notation

Für den gesamten der Verlauf der Arbeit bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen sowie $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Die Menge der nicht-negativen reellen bzw. natürlichen Zahlen schreiben wir dabei als $\mathbb{R}_+$ bzw. $\mathbb{N}_+$, die damit explizit die Null als Element enthalten. Großbuchstaben beschreiben Mengen, Abbildungen oder auch Matrizen, während Skalare und Vektoren immer mit kleinen Buchstaben angegeben werden. Die Transponierte einer Matrix M bzw. eines Vektors v geben wir mit M^T bzw. v^T an. Für eine Matrix $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet der Vektor $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})^T$ die i-te Zeile der Matrix. Die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^n$ wird immer mit I_n dargestellt. Wird die Dimension der Matrix im Kontext deutlich, so verzichten wir auf die Angabe des Subskripts n. Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ werden durch $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$ kenntlich gemacht, wobei die i-te Komponente jeweils die 1 ist. Die Summe der Einheitsvektoren ergibt den Einsvektor, den wir mit $e := (1, \dots, 1)^T = \mathbb{1} = \sum_{i=1}^n e_i$ bezeichnen.

Mit $\|\cdot\|$ sei immer die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ gemeint, $\|\cdot\|_\infty$ meint die Maximumsnorm, d. h. für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$, wobei x_i