

Rita Borromeo Ferri

Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Herausgegeben von:

Prof. Dr. Gabriele Kaiser, Universität Hamburg

PD Dr. Rita Borromeo Ferri, Universität Hamburg

Prof. Dr. Werner Blum, Universität Kassel

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Rita Borromeo Ferri

Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens

Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen
im Mathematikunterricht

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Gloria Stillman

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Habilitationsschrift Universität Hamburg, 2009

1. Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Ute Wrasmann | Britta Göhrisch-Radmacher

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.

Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: STRAUSS GMBH, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1299-5

per le mie figlie

Giulia e Laura

Geleitwort

Among the claims that have been central to mathematical modelling research and teaching is that individuals follow quite distinctively different pathways when engaging in modelling. In contrast, researchers and theorists often used idealised modelling cycles (there are many) which are really normative descriptions of the iterative modelling process. Such descriptions have their place in theory development, in research particularly when investigating and interpreting modelling behaviour and in classroom teaching where they can be used as scaffolds by both students and teachers particularly when developing meta-knowledge about modelling. However, as much as they are able to enlighten us they also contribute to our ignoring of certain things that occur in classrooms when a particular modelling event occurs as these are seen as idiosyncratic to the individual and thus of less interest. The question still remains, however, what are the real pathways taken idiosyncratically by a particular individual when modelling? Early work by Oke and Bajpai (1986) using relationship level graphs showed that real modelling processes undertaken by modellers are far from linear, or unidirectional and most genuine workers in the field of mathematical modelling have adopted a cyclical view of the modelling cycle ever since but there has been little research since that time looking at this empirically. Thus the work by Rita Borromeo Ferri which includes her reconstructions of students' individual "modelling routes" during task solution in a variety of modelling tasks – a central and already well-known concept developed in the frame of her work – is more than timely. Borromeo Ferri takes a cognitive perspective attempting to gain insights into the minds of students and teachers engaged in modelling in the classroom. Taking a cognitive viewpoint her work gives support for empirical differentiation of modelling phases as: real situation, mental representation of the situation, real model, mathematical model, mathematical results and real results. The transitions between phases involve cognitive processes, in particular: understanding the task, simplifying or structuring the task, mathematising, working mathematically, interpreting and validating, respectively. The last of these completes the cycle back to the mental representation of the situation. The second and third require the input of extra-mathematical knowledge. Compared with the more common normative descriptions of the phases, taking a cognitive perspective as data from these phases and transitions are interrogated, more insight is possible into what is actually happening from the perspective of the modelling individual whether they be the student engaged in the modelling or the teacher orchestrating the modelling activity. In the coming pages the author of this book will carefully pare away the film that has made these processes opaque to many of us from a research perspective for many years. It thus will be of much value to all of us continuing to research and teach in this field.

Gloria Stillman, Ballarat (Australia)

Inhalt

Geleitwort.....	VII
Inhalt.....	IX
Abbildungs- und Tabellenverzeichnis.....	XI
Einleitung: Problemstellung und Überblick.....	1
1 Mathematische Modellierung aus kognitiver Perspektive:	
Zum Stand der Diskussion und zur Grundlegung erster Theoriebausteine.....	5
1.1 Modellierung und Modellierungskreisläufe – nationale und internationale Ansätze.....	7
1.1.1 Richtungen und Auffassungen des Modellierens in der didaktischen Diskussion.....	7
1.1.2 Typen von Modellierungskreisläufen.....	14
1.2 Studien zum mathematischen Modellieren mit kognitiver Perspektive.....	23
1.2.1 Grundströmung des pädagogischen Modellierens.....	24
1.2.2 Grundströmung des kontextbezogenen Modellierens.....	35
1.2.3 Weitere Studien.....	39
1.3 Theoriebaustein I: Entwicklung einer eigenen Auffassung vom Modellierungs-	
kreislauf unter kognitionspsychologischer Perspektive.....	40
1.4 Modellierung und mathematische Denkstile – die kognitionspsychologische	
Verknüpfung.....	42
1.5 Theoriebaustein II: Analyse von Modellierungsprozessen unter der Perspektive	
mathematischer Denkstile.....	50
2 Rekonstruktion der Innenwelt des mathematischen Modellierens: Methodologische und	
methodische Grundlagen.....	57
2.1 Positionierung in der qualitativen empirischen Forschung.....	57
2.1.1 Gruppenunterricht und Gruppenprozesse – relevante Aspekte.....	63
2.1.2 Zur Rolle des Individuums in der Gruppe.....	66
2.1.3 Vom Labor ins Feld.....	68
2.2 Erhebungsmethoden und Erhebungsphasen.....	69
2.2.1 Das Sample.....	69
2.2.2 Erhebungsmethoden – und deren Vernetzung.....	70
2.2.3 Die Modellierungsaufgaben – Stoffdidaktische Analysen.....	75
2.2.4 Erhebungsphasen – mit dem Ziel der Vertiefung.....	85
2.3 Die „Netz- und Phasenanalyse“ – Auswertungsmethoden.....	86
2.3.1 Datentriangulation.....	87
2.3.2 Kodierung als Zusammenhalt von Netz und Phasen.....	88
2.3.3 Typenbildung.....	92
2.3.4 Individuum-Aufgabe-Gruppe – das „IGA-Rechteck“.....	94

3 Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens – Analysen und empirische Rekonstruktionen.....	101
3.1 Querschnittsanalyse.....	101
3.2 Zur empirischen Unterscheidung der Phasen beim Modellieren	109
3.3 Individuelle Modellierungsverläufe („modelling routes“).....	113
3.3.1 Fallbeispiel 1: Sebi und Michi – „Mal sehen, wer von uns beiden besser durch kommt!“.....	115
3.3.2 Fallbeispiel 2: Daniel und Emil – „Ich bin auf dem Bauernhof groß geworden, also sag mir mal nichts!“.....	127
3.4 Von individuellen Verläufen zu Gruppenverläufen.....	131
3.4.1 Gruppenverläufe – Gemeinsamkeiten und Unterschiede.....	132
3.4.2 Vergleich von Individuen und Gruppen.....	143
3.5 „Minikreisläufe“ und Typen von Aufgabenstrukturen.....	146
3.6 Lehrpersonen im Umgang mit Modellierungsaufgaben im Unterricht.....	153
3.6.1 Der „nachträgliche Formalisierer“.....	155
3.6.2 Die „realitätsnahe Validiererin“	158
3.6.3 Die „Formal-Reale“	163
4 Zusammenfassung und Ausblick.....	169
4.1 Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens.....	169
4.2 Konsequenzen für Unterricht und Lehrerbildung.....	175
Literatur.....	177

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

Abbildung 1.1: Modellierungskreislauf nach Kaiser (1986).....	5
Abbildung 1.2: Modellierungskreislauf Typ 1.....	15
Abbildung 1.3: Modellierungskreislauf nach Pollak (1979, 233).....	16
Abbildung 1.4: Modellierungskreislauf Typ 2.....	16
Abbildung 1.5: Modellierungskreislauf nach Kaiser (1986).....	17
Abbildung 1.6: Modellierungskreislauf Typ 3.....	18
Abbildung 1.7: Schematisches Diagramm vom Modellierungsprozess (Verschaffel, Greer, de Corte 2000, xii).....	19
Abbildung 1.8: Modellierungskreislauf Typ 4.....	20
Abbildung 1.9: Modellierungskreislauf nach Blum/Leiß (2005, 19).....	21
Abbildung 1.10: Flowchart nach Burkhardt (2006, 181).....	26
Abbildung 1.11: Flowcharts von „good modellers“ und „poor modellers“ im Vergleich.....	28
Abbildung 1.12: Big Foot Problem (Lesh & Doerr 2003, 6).....	37
Abbildung 1.13: Modeling-eliciting activities (Lesh & Doerr, 2003, 4).....	38
Abbildung 1.14: Modellierungskreislauf unter kognitionspsychologischer Perspektive.....	41
Abbildung 1.15: Sandras Lösung zur Geburtstagsfeier.....	47
Abbildung 1.16: Sonjas Lösung zur Geburtstagsaufgabe.....	48
Abbildung 1.17: Tims Lösung zur Geburtstagsaufgabe.....	49
Abbildung 1.18: Emils Lösung zur Murmelaufgabe.....	53
Abbildung 2.1: Übersicht über das Design der Erhebung der Klassen.	73
Abbildung 2.2: Überblick Kodierschema.....	92
Abbildung 2.3: IGA-Rechteck.....	95
Abbildung 2.4: Auszug aus Fragebogen zum mathematischem Denken (Michi)	96
Abbildung 2.5: IGA-Rechteck mit Beispiel.....	99
Abbildung 3.1: Darstellung eines Modellierungsverlaufs - Beispiel.....	115
Abbildung 3.2: Michis und Sebis Modellierungsverläufe.....	124
Abbildung 3.3: Sebis Lösung zur Tanken-Aufgabe.....	125
Abbildung 3.4: Michis Lösung zur Tanken-Aufgabe.....	125
Abbildung 3.5: Michi und Sebi im Labor.....	126
Abbildung 3.6: Modellierungsverlauf Daniel und Emil	129
Abbildung 3.7: Zeichnung von Tobi bei der „Leuchtturmaufgabe“.....	132
Abbildung 3.8: Zeichnung von Michi bei der „Leuchtturmaufgabe“.....	133

Abbildung 3.9: Zeichnung von Tobi bei der „Leuchtturmaufgabe“	134
Abbildung 3.10: Minikreisläufe. Erläuterung.....	152
Tabelle 2.1: Merkmalsraum für Lehrerverhalten beim Modellieren.....	94
Tabelle 3.1: Modellierungsverläufe gruppiert nach bildlichen, formalen und integrierten Denkern	104
Tabelle 3.2: Gruppe „Buchenfeld 1“; Leuchtturm.....	105
Tabelle 3.3: Gruppe „Buchenfeld 2“; Regenwald.....	106
Tabelle 3.4: Modellierungsprozesse zur Leuchtturmaufgabe.....	107
Tabelle 3.5: Modellierungsprozesse zur Regenwaldaufgabe.....	107
Tabelle 3.6: Modellierungsprozesse zur Strohbollenaufgabe.....	108
Tabelle 3.7: Tabellarische Darstellung des Gruppenverlaufs der Gruppe „Schule Alsterweg“ bei der „Leuchtturmaufgabe“.....	138
Tabelle 3.8: Tabellarische Darstellung des Gruppenverlaufs der Gruppe „Schule Buchenfeld“ bei der „Leuchtturmaufgabe“.....	141
Tabelle 3.9: Tabellarische Darstellung des Gruppenverlaufs der Gruppe „Schule Buchenfeld“ bei der „Regenwaldaufgabe“.....	150
Tabelle 3.10: Drei Typen der Verhaltensweise von Lehrenden beim mathematischen Modellieren im Unterricht.....	153

Einleitung: Problemstellung und Überblick

Mathematisches Modellieren – ein immer noch recht junges Forschungsfeld im Bereich der nationalen und internationalen Mathematikdidaktik – ist eine Thematik, die mittlerweile im deutschsprachigen Raum fest in Lehr- und Rahmenplänen verankert ist und nun verpflichtender Bestandteil des Mathematikunterrichts sein sollte. Auf diese Weise kann den Lernenden eingehender als bisher verdeutlicht werden, dass Mathematik Anwendung im Leben findet, dass Mathematik kein starres Formelgebäude darstellt, sondern alltäglich, in fast allen Berufssparten genutzt wird. Schülerinnen und Schüler dafür zu sensibilisieren und zu Modellierungsaktivitäten anzuregen, sollte ein Ziel des Mathematikunterrichts ab der Grundschule sein.

Im Zuge dieser positiven Entwicklung in den letzten Jahren konnten viele Studien zeigen, dass sich mathematisches Modellieren unter anderem positiv auf das Mathematikbild der Schülerinnen und Schüler auswirkt und realitätsbezogene Aufgaben zur Motivationssteigerung beitragen können. Aus vielen weiteren Perspektiven wurde und wird mathematisches Modellieren erforscht, letztendlich mit dem Ziel, didaktische Konsequenzen für den Unterricht abzuleiten.

Trotz der bereits ansehnlichen Fülle von Studien zum mathematischen Modellieren wurde jedoch ein Bereich vernachlässigt, was vor allem im Discussion Document zur ICMI-Study 14 (Blum et al. 2002) und dem daraus entstandenen Buch (Blum et al. 2007) ersichtlich wird:

Die Erforschung, was bei Individuen kognitiv – im „Inneren“ – beim Modellieren vorgeht, welche Faktoren diesen Prozess und den idealtypischen Kreislauf gegebenenfalls beeinflussen könnten, fand kaum statt. Genau an diesen Aspekten setzt meine Studie an, um kognitive Prozesse von Individuen beim mathematischen Modellieren im Unterricht zu rekonstruieren, um Einblicke in die „Innenwelt des mathematischen Modellierens“ zu erlangen, das heißt zu hinterfragen, was sich hinter Modellierungsprozessen verbirgt. Diese Studie ist interdisziplinär angelegt und verbindet die Mathematikdidaktik mit der kognitiven Psychologie. Dieser Teilbereich der Psychologie versucht die grundlegenden kognitiven Funktionen des Menschen zu verstehen (siehe u.a. Anderson 2001). Besonders in dem Teilbereich „Verstehen“, bei dem es darum geht, komplexe Ereignisse wahrzunehmen, Texte zu lesen, Bilder zu sehen oder Äußerungen zu hören, lässt sich das Erkenntnisinteresse der vorliegenden Arbeit einordnen. Die Basis für einen realitätsbezogenen Unterricht bilden Modellierungsaufgaben in Text- oder Bildform. Diese müssen von Lernenden verstanden werden, damit erfolgreiches Modellieren möglich wird.

In meiner Arbeit möchte ich dementsprechend einige Zugänge und Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens eröffnen. Dabei stehen nicht nur einzelne Schülerinnen und

Schüler im Fokus, sondern es geht auch um eine Betrachtung von Schülergruppen und Lehrpersonen im realitätsbezogenen Mathematikunterricht und wie diese zusammen agieren.

Ein wichtiger Wegbereiter hierfür ist die lokale Theorie der mathematischen Denkstile (Borromeo Ferri 2004a). Diese geht davon aus, dass jedes Individuum beim Mathematiktreiben eine Präferenz für einen bestimmten Denkstil hat. Ein mathematischer Denkstil ist eine individumsbezogene Persönlichkeitseigenschaft und hat Einfluss auf das Verstehen von und den Umgang mit mathematischen Sachverhalten. Dieser Ansatz bildet (unter anderem) die kognitionspsychologische Basis oder „Brille“, um die kognitiven Prozesse der Lernenden und Lehrenden beim Modellieren empirisch zu erfassen. Die Rekonstruktion einzelner Modellierungsprozesse stellt ein Erkenntnisbereich dar, herauszukristallisieren, inwieweit mathematische Denkstile diese Prozesse in eine gewisse Richtung lenken könnten, einen Anderen. Beides liegt im Erkenntnisinteresse dieser Arbeit, da zur erfolgreichen Modellierung zwei Bereiche gehören: Realität und Mathematik. In der Realität suchen wir beispielsweise nach außermathematischem Wissen, assoziieren Erlebtes oder visualisieren beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben vor allem die realen Gegebenheiten. Dieser Bereich könnte insbesondere visuellen Denkern sehr zugänglich sein. Angekommen in der Mathematik, in der Kompetenzen für das mathematische Arbeiten gefragt sind, lassen wir diese stärker bildhaft geprägte Welt hinter uns und bewegen uns eher auf der formal-abstrakten Ebene. Dies könnte wiederum vor allem analytische Denker ansprechen. Spiegeln sich also diese beiden Bereiche – Realität und Mathematik – ausgewogen in den Modellierungsprozessen der Lernenden wider? Inwieweit beeinflusst der mathematische Denkstil der Lehrperson Hilfestellungen oder die Besprechung von Modellierungsaufgaben im Plenum? Die Lehrperson könnte, je nach Denkstil, mehr zu realitätsbezogenen oder mathematischen Aspekten tendieren. – Die Konsequenzen einer vorwiegend einseitigen Vermittlung könnten wiederum das Modellierungsverhalten der Lernenden prägen. All diese Überlegungen verdeutlichen gleichzeitig, dass bei der Rekonstruktion solcher Phänomene, die in dieser Studie angestrebt wird, ein großer Teil der Innenwelt des Modellierens aufgedeckt werden muss.

Um jedoch Einblicke in die Innenwelt des mathematischen Modellierens zu erlangen, muss auch „hinter“ die in der nationalen und internationalen Literatur bestehenden normativen Modellierungskreisläufe geschaut werden. Die Beschreibung der Phasen sind bisher kaum empirisch durchleuchtet worden – auch dies ist ein Weg die Innenwelt zu erschließen. Wenn sich diese Phasen bei Lernenden rekonstruieren lassen, wird die Frage sein, inwieweit diese noch modifiziert und ausdifferenziert werden können. Das geht nur, wenn Modellierungsprozesse auf Mikroebene in den Blick genommen werden. Gleichzeitig sollte dann deutlich werden, ob sich tatsächlich bestimmte Muster oder Präferenzen in diesen Verläufen abzeichnen, die mit dem mathematischen Denkstil zusammenhängen.

Einzelne Prozesse sind daher sehr aufschlussreich, genauso die Betrachtung des gesamten Gruppenprozesses. Da in der Modellierungsdiskussion Konsens darüber besteht, jegliche Modellierungsaktivitäten in Gruppen stattfinden zu lassen, wird ein interessanter Aspekt in diesem Kontext sein, ob und inwieweit Gruppen- und Einzelverläufe zusammenhängen. Die Gruppen bestehen aus unterschiedlichen Individuen, die wiederum verschiedene Präferenzen beim Modellieren haben. Möglich wäre daher zu folgern, dass sich bestimmte Präferenzen durchsetzen und den gesamten Verlauf einer Gruppe bestimmen, stören oder gar nicht tangieren könnten. Mit diesem vielschichtigen Blick soll ebenfalls die Innenwelt durchleuchtet werden, denn Gruppenarbeitsphasen kommen im Mathematikunterricht vor und sollten im Sinne eines Qualitätsmerkmals von gutem Unterricht in die tägliche Arbeit integriert werden.

Aus den oben beschriebenen Überlegungen haben sich für diese Arbeit vier erkenntnisleitende Fragen herauskristallisiert, die an dieser Stelle zunächst nur in grober Form beschrieben werden. Am Ende des Theorieteils (Unterkapitel 1.5) werden diese Fragen im Spiegel der vorangegangenen Ausführungen differenzierter dargestellt.

- Welche Phasen bzw. Schritte können bei individuellen Modellierungsprozessen rekonstruiert werden?
- Welche Modellierungsmuster oder Präferenzen der Schülerinnen und Schüler sind dabei erkennbar?
- Wie hängen Gruppen- und Einzelprozesse zusammen?
- Gibt es Präferenzen von Lehrenden für gewisse Phasen bzw. Schritte oder Vorgehensweisen?

Zusammengefasst: Das Ziel dieser qualitativen Studie ist aufzuzeigen, welche kognitiven Prozesse bei Lernenden in einem realitätsbezogenen Mathematikunterricht während der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben ablaufen. Dabei soll das Individuum sowohl alleine als auch im Gruppenkontext betrachtet werden. Zusätzlich wird der Umgang der Lehrperson mit Modellierungsaufgaben im Unterricht in den Fokus genommen.

Gliederung der Arbeit

Kapitel 1 bildet den theoretischen Rahmen dieser Arbeit. In der nationalen und internationalen didaktischen Diskussion zum Modellieren besteht dahingehend Konsens, dass unter mathematischem Modellieren die Lösung außermathematischer Probleme mit Hilfe mathematischer Modelle bezeichnet wird. Dennoch gibt es in den verschiedenen Ländern unterschiedliche Sichtweisen und Ziele, die mit mathematischem Modellieren verfolgt werden, sowohl für den Bereich Schule, als auch bezüglich der Forschungsausrichtung. Vor allem die verschiedenen Forschungsperspektiven werden im ersten Teil eingehend dargestellt. Daran anschließend werden unterschiedliche Typen von Modellierungskreisläufen beschrieben, die sich unmittelbar

aus den Perspektiven ergeben, da auch diese bestimmte Ziele und Verwendungszwecke für Schule und Forschung verfolgen. Im zweiten Teil wird aufgezeigt, welche Studien zur Modellierung mit kognitionspsychologischen Ansätzen in der nationalen und internationalen Diskussion vorhanden sind. Daran soll ersichtlich werden, dass der Blick in die Innenwelt des Modellierens, so wie es in dieser Arbeit angestrebt wird, bisher nur zum Teil verfolgt wurde. Die beiden Theoriebausteine (1. Modellierungskreislauf unter kognitionspsychologischer Perspektive und 2. Analyse von Modellierungsprozessen unter der Perspektive der mathematischen Denkstile) verdeutlichen insbesondere die Kopplung von der Theorie des mathematischen Modellierens mit kognitiven Theorien und sind daher grundlegend für diese Studie.

Mit der Rekonstruktion der Innenwelt des mathematischen Modellierens setzt sich Kapitel 2 auseinander. Methoden der Videoaufzeichnung, Interviews und kodierenden Auswertungsmethoden im Sinne der Grounded Theory (Strauss & Corbin 1990) bilden eine Möglichkeit der Rekonstruktion der Innenwelt des Modellierens.

In Kapitel 3 werden die Ergebnisse dieser Arbeit vorgestellt und somit gleichzeitig Wege und Einblicke in kognitive Vorgänge beim Modellieren eröffnet. Dies wird veranschaulicht durch Fallbeispiele von Lernenden, durch Vergleiche von Schülergruppen sowie durch die Darstellung des Verhaltens von Lehrpersonen beim Modellieren im Unterricht.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick sowie der Skizzierung von Konsequenzen für den Unterricht und die Lehrerbildung.

1 Mathematische Modellierung aus kognitiver Perspektive: Zum Stand der Diskussion und zur Grundlegung erster Theoriebausteine

„Do the kind of models [...] reside inside the minds of learners or problem solvers? Or, are they embodied in the equations, diagrams, computer programs, or other representational media that are used by scientists, or other learners and problem solvers?“ (Lesh & Doerr 2003, 11)

In diesem Kapitel soll Modellieren unter kognitiver Perspektive betrachtet werden. Darunter verstehe ich folgendes (siehe auch Borromeo Ferri 2007, 2001): Soll Modellieren und die Analyse dieser Prozesse unter kognitiver Perspektive gefasst werden, so liegt der Fokus auf den (individuellen) Denkprozessen, die durch verbale oder sonstige (kommunikative wie auch nicht kommunikative) Aktionen während des Modellierungsprozesses geäußert werden. Um diese Sichtweise adäquat einordnen zu können, werden zunächst Richtungen und Auffassungen vom Begriff des mathematischen Modellierens in der didaktischen Diskussion dargestellt sowie Modellierungskreisläufe – es gibt davon eine Fülle in der Literatur – nach einer eigenen Klassifikation gruppiert. Dabei wird unter einem Modellierungskreislauf ein Schema verstanden, was einen idealtypischen Modellierungsprozess repräsentiert, der bestimmte Phasen enthält, die alle im Sinne eines Kreislaufs durchlaufen werden müssen, so dass von erfolgreicher Modellierung gesprochen werden kann. Ein Beispiel für einen idealtypischen Modellierungskreislauf ist das Schema von Kaiser (1986) in der nachfolgenden Abbildung.

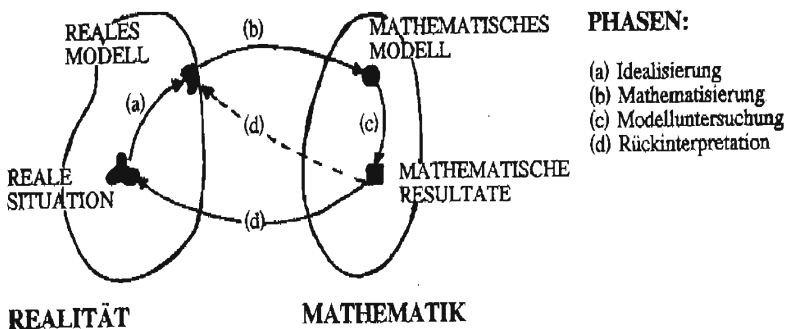


Abbildung 1.1: Modellierungskreislauf nach Kaiser (1986)

In dem Kreislaufschema von Kaiser wird der Bereich Realität mit realer Situation und realem Modell und der Bereich Mathematik mit mathematischem Modell und mathematischen Resultaten ersichtlich. Idealtypisch beginnt der Kreislauf mit der realen Situation, das heißt eine reale, authentische und komplexe Fragestellung in Schriftform, zum Teil auch mit Bildern, wird den Individuen vorgelegt. In einer ersten Phase muss die Aufgabe idealisiert werden, Variablen müssen generiert werden, so dass ein sogenanntes reales Modell entsteht. Erst mit diesem simplifizierten Abbild der komplexen realen Situation können die Individuen den entscheidenden Übersetzungsschritt, die Mathematisierung, von der Realität in die Mathematik, vollziehen.

Innerhalb der Mathematik findet die Phase der Modelluntersuchung statt. Die Individuen befinden sich dort auf der rein mathematischen Ebene und wenden die ihnen zur Verfügung stehende Mathematik an. Sie erhalten schließlich ein mathematisches Resultat, welches dann rückinterpretiert werden muss, um eine Übereinstimmung zwischen mathematischen Ergebnissen und realen Annahmen zu herzustellen, so dass die Validität des Ergebnisses gewährleistet ist. Von erfolgreichem Modellieren wird gesprochen, wenn alle Phasen durchlaufen werden und ein adäquates Ergebnis der Aufgabe vorliegt. Wird bei der Rückinterpretation keine Übereinstimmung zwischen mathematischem Resultat und realen Annahmen gefunden, wird er Kreislauf nochmals oder teilweise durchlaufen.

Nicht jeder idealtypische Modellierungskreislauf enthält genau diese vier Phasen bzw. Schritte, wie sie im Schema von Kaiser dargestellt sind, sondern es sind, je nach Verwendungszweck und Forschungsausrichtung, mehr oder weniger Schritte im Prozess. Diese verschiedenen Typen werden eingehend in Abschnitt 1.1.2 beschrieben. Auf der Basis der verschiedenen Modellierungsperspektiven in Abschnitt 1.1.1 werden schließlich zentrale theoretische Hintergründe verdeutlicht, die insbesondere aufzeigen, welchen Stellenwert die Verbindung von Kognitionspsychologie und Theorie der mathematischen Modellierung in der nationalen und internationalen didaktischen Diskussion hatte und hat. Der erste Theoriebaustein dieser Arbeit wird in Unterkapitel 1.3 verdeutlicht. Dort wird auf der Basis der diskutierten Modellierungskreisläufe der spezielle Modellierungskreislauf vorgestellt, der als Analyseinstrument meiner empirischen Untersuchung diene. In Unterkapitel 1.4 werden zentrale Aspekte der Theorie der mathematischen Denkstile (Borromeo Ferri 2004a) erläutert. Mathematische Denkstile bilden die spezifische kognitionspsychologische Brille für die Analysen, was im zweiten Theoriebaustein in Unterkapitel 1.5 nochmals transparent wird. Eine Präzisierung der Forschungsfragen findet ebenfalls in Unterkapitel 1.5 statt.

1.1 Modellierung und Modellierungskreisläufe – nationale und internationale Ansätze

Dieses Unterkapitel widmet sich speziell unterschiedlichen Auffassungen vom Verständnis des Modellierens in der nationalen und internationalen didaktischen Diskussion sowie, damit zusammenhängend, den diversen Typen von Modellierungskreisläufen.

1.1.1 Richtungen und Auffassungen des Modellierens in der didaktischen Diskussion

Die Modellierungsdiskussion stellt, vergleicht man es mit anderen Gebieten, ein noch junges Forschungsgebiet innerhalb der Mathematikdidaktik dar. Zu Beginn gab es hinsichtlich der Charakterisierung des Begriffs „mathematischer Modellierung“ noch Uneinigkeit. Der Konsens bestand lediglich darin, dass mathematische Modellierung, kurz gefasst, als der Prozess der Lösung außermathematischer Probleme mittels mathematischer Modelle beschrieben wurde (siehe u.a. Kaiser-Meißner 1986).

In den letzten beiden Jahrzehnten kann jedoch auf internationaler Ebene von einem recht kohärenten theoretischen Verständnis vom Modellierungsprozess in Verbindung mit Lehr- und Lernprozessen gesprochen werden. Gründe dafür sind insbesondere das starke Zusammenspiel von Curriculumentwicklung, experimentellem Unterrichten von Modellierung, theoretischen Reflexionen und empirischer Forschung. Dennoch, so formulieren Kaiser, Blomhøj und Sriraman (2006, 82f.), ist es eine offene Frage, inwieweit tatsächlich eine Theorieentwicklung für das Unterrichten und Lernen von mathematischer Modellierung erreicht wurde, die allgemein als tragfähig und anwendbar gelten kann. Im Rahmen der ICMI-Study 14 („Applications and Modelling in Mathematics Education“, 2002), wurde der aktuelle Stand der internationalen Diskussion dokumentiert (siehe Blum et al. 2007). – Die Entwicklung einer Theorie des Unterrichts und Lernens mathematischer Modellierung ist jedoch noch bei weitem nicht abgeschlossen.

„Much more research is needed, especially in order to enhance our understanding on micro levels, meaning teacher and learning problems which occur in particular educational settings where students are engaged in modelling activities.“ (Kaiser, Blomhøj, Sriraman 2006, 82)

Einige dieser Forderungen werden in den Studien ersichtlich, die in Unterkapitel 1.2 beschrieben werden.

Die Unterschiedlichkeit hinsichtlich der Auffassung von Modellierung findet sich insbesondere bei der Betrachtung des aktuellen Stands der Diskussion. Es werden sowohl auf nationaler als auch auf internationaler Ebene zwar gleiche Begriffe verwendet, diese werden jedoch unterschiedlich aufgefasst. So wird Modellierung in den verschiedenen theoretischen Ansätzen mit ganz unterschiedlichen Zielen für den Mathematikunterricht verbunden, ebenso werden unter Modellieren durchaus unterschiedliche Aktivitäten verstanden.

Bevor diese unterschiedlichen Ansätze bzw. Perspektiven beschrieben werden, erfolgt noch ein kurzer Rückblick auf eine bereits bestehende Klassifikation. Denn unterschiedliche Richtungen bzw. Perspektiven der didaktischen Diskussion zum mathematischen Modellieren wurden bereits Mitte der achtziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts von Kaiser (siehe Kaiser-Meßmer 1986, Kaiser 1996) ausführlich dargestellt. Kaiser analysierte historische Ansätze, die seit dem Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts vertreten werden, sowie neuere Strömungen seit der Wiederaufnahme der didaktischen Diskussion zu Realitätsbezügen Ende der sechziger Jahre.

Dabei unterschied sie idealtypisch zwei verschiedene Richtungen in der internationalen Diskussion: eine *pragmatisch orientierte* und eine *wissenschaftlich-humanistische* Richtung. Die beiden Richtungen verfolgen unterschiedliche Ziele für die Berücksichtigung von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht (vgl. Kaiser 1986). Bei der pragmatisch orientierten Richtung steht die Befähigung der Lernenden, Mathematik zur Lösung praktischer Probleme anzuwenden, im Mittelpunkt. Kaiser rechnet insbesondere Pollak (1969) zu dieser Richtung. Die wissenschaftlich-humanistische Richtung sieht hingegen die Wissenschaft Mathematik und ihre Fachsystematik von großer Bedeutung. Dabei werden innermathematische Fragestellungen, die sogenannte innere Welt der Mathematik, ebenfalls als Kontext für Mathematiktreiben aufgefasst. Die Befähigung der Lernenden, Beziehungen zwischen Mathematik und Realität zu entwickeln, wird hierbei als zentrales Ziel formuliert. Nach Kaiser kann insbesondere Freudenthal (1968) als ein Vertreter dieser Richtung angesehen werden.

In der deutschsprachigen Diskussion zeigen sich nach Kaiser interessante Differenzierungen. Es entwickelte sich eine *wissenschaftsorientierte* Richtung, die eng mit der wissenschaftlich-humanistischen Richtung verwandt war und vor allem an der Wissenschaft Mathematik orientierte Ziele formuliert. Als zentraler Vertreter dieser Richtung kann Steiner (1968) angesehen werden. Der *pragmatisch* orientierten Richtung verwandt ist eine Strömung, die vom Interesse an Emanzipation ausgeht und für den Mathematikunterricht hauptsächlich utilitaristische Ziele formuliert. Pointiert findet sich diese Position bei Volk (1979). Er fordert, dass der Mathematikunterricht zu einsichtig begründetem, mündigem, autonomem Handeln in aktuellen und zu erwartenden Lebenssituationen befähigen soll. Zwischen diesen beiden „Polen“ kann eine dritte Richtung rekonstruiert werden, eine so genannte *integrative* Richtung, die quasi eine Mittelstellung zwischen den beiden Diskussionssträngen einnimmt. Realitätsbezügen wird in dieser Richtung zwar eine große Bedeutung zugewiesen, aber eine einseitige Orientierung an Anwendungsbezügen wird abgelehnt, wenn diese als einziges und wichtigstes Kriterium für die Auswahl der Lerninhalte und der Strukturierung des Unterrichts angesehen werden. Zentrale Vertreter dieser Richtung sind nach Kaisers Analysen Winter (1990) und Blum (1985).

Die Modellierungsdiskussion hat sich in den letzten Jahrzehnten national und international – auch unter Bezug auf diese älteren Ansätze – weiterentwickelt. Dabei sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Ansätzen, zum Beispiel auch zwischen denen aus dem romanischsprachigen und dem englischsprachigen Raum, eher größer als kleiner geworden, ebenso wie die Vielfalt der Richtungen. Im Folgenden, bei der Darstellung der aktuellen Diskussion, beziehe ich mich daher zum Teil vor allem auf die Publikationen, die im Rahmen der CERME-Diskussionen entstanden sind, wie etwa Kaiser, Blomhøj & Sriraman (2006), Sriraman, Kaiser & Blomhøj (2006), Borromeo Ferri & Kaiser (2007) sowie die Beiträge auf der Fourth, Fifth und Sixth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME4, 2005, Spanien und CERME5, Zypern (Pitta-Pantazi & Philippou) sowie CERME6, Frankreich.

Damit die Unterschiede und Gemeinsamkeiten auf der internationalen Ebene besser zu erkennen und nachzuvollziehen sind, insbesondere nach den aktuellen Diskussion der CERME 6 in Frankreich, schlage ich folgende deskriptive Klassifikation von Richtungen, basierend auf der von Kaiser, Blomhøj & Sriraman (2006), vor, die nachfolgend eingehend erläutert wird. Diese fokussiert insbesondere auf die mit Realitätsbezüge und Modellierung verbundenen Ziele.

- „Epistemologisches“ (oder „theoretisches“) Modellieren,
- „Realistisches“ (oder „angewandtes“) Modellieren,
- „Pädagogisches“ Modellieren,
- „Soziokritisches“ Modellieren,
- „Kontextbezogenes“ Modellieren oder MEA-Ansatz

und zusätzlich als Metaperspektiven (bzw. als Ansätze in Verbindung mit dem Forschungsinteresse):

- „kognitives“ Modellieren
- „affektive“ Ansätze zum Modellieren

Ansätze aus romanischsprachigen Ländern sind seit einiger Zeit wieder in der Modellierungsdiskussion vertreten. Die im CERME-Kontext *epistemologisches* oder *theoretisches Modellieren* genannten Ansätze weisen einen stark theorieorientierten Hintergrund auf und beziehen sich insbesondere auf die ‚Anthropological Theory of Didactics‘ von Chevallard (1999) oder den Ansatz des ‚Contract Didactique‘ von Brousseau (1997) als zugrunde liegenden wissenschaftstheoretischen Rahmen. Der Grad der Realität in den Aufgaben ist in dieser Richtung nicht von Bedeutung. Es werden sowohl außer- als auch innermathematische Themen vorge schlagen und oft sind die verwendeten Textaufgaben künstlich und realitätsfern.

Die pragmatische Richtung der Modellierungsdiskussion hat sich zu den Ansätzen des *realistischen* oder *angewandten Modellierens* weiterentwickelt, in denen ebenfalls utilitaristische Ziele im Vordergrund stehen. Dabei werden reale und vor allem authentische Probleme aus Industrie und Wissenschaft ins Zentrum gestellt, die nur unwesentlich vereinfacht werden. Der theoretische Hintergrund dieser Richtung gründet sich auf dem angelsächsischen Pragmatismus und der Nähe zur angewandten Mathematik. Weitere zentrale Vertreter(innen) dieser Richtung sind Haines & Crouch (2005) sowie Kaiser (2005).

Eine weitere, neue Perspektive ist das sogenannte *soziokritische* Modellieren. Dieses ist in gewisser Hinsicht als eine Weiterentwicklung des emanzipatorischen Ansatzes anzusehen und eng verwandt mit Ansätzen der Ethnomathematik, wie sie beispielsweise von D'Ambrosio (1985) entwickelt wurden. Innerhalb dieser Perspektive wird die Bedeutung der Mathematik als Teil in der Gesellschaft betont. Dabei wird gefordert, die Rolle der Mathematik sowie speziell die Rolle und die Natur mathematischer Modelle sowie die Funktion des mathematischen Modellierens in der Gesellschaft in den Mittelpunkt zu stellen und diese kritisch zu durchdenken. Aktuell werden diese Ansätze von Barbosa (2006, 2007) vertreten. Ähnliche Konzepte finden sich auch bei Gellert, Jablonka & Keitel (2001).

Es existieren weitere verschiedene Auffassungen zum Modellierungsprozess, die als eine Weiterentwicklung des integrativen Ansatzes der früheren Modellierungsdiskussion angesehen werden können. Viele der derzeit vertretenen Konzepte können dieser Fortsetzung des integrativen Ansatzes zugeordnet werden. Das *pädagogische* Modellieren stellt dabei eine wesentliche Richtung dar und umfasst vor allem zwei Aspekte: didaktisches und begriffliches Modellieren. Das *didaktische* Modellieren stellt pädagogische und stoffbezogene Ziele in den Vordergrund. Dies umfasst einerseits die Förderung von Lernprozessen beim Modellieren und andererseits die Behandlung von Modellierungsbeispielen zur Einführung neuer mathematischer Methoden bzw. deren Übung. Modellierung soll somit als Bestandteil in die Lehrpläne für den Mathematikunterricht mit einfließen, was in den letzten Jahren zunehmend geschehen ist. Die Begriffsentwicklung und das Begriffsverständnis der Lernenden soll beim *begrifflichen* Modellieren gefördert werden. Das kann auf zwei Ebenen angestrebt werden: zum einen die Förderung eines tieferen Begriffsverständnisses innerhalb der Mathematik und zum anderen die Förderung des Verständnisses von Modellierungsprozessen und die Vermittlung der entsprechenden Fachterminologie des Modellierens. Als bedeutsame Vertreter sind hier Burkhardt (2000), Blomhøj (2004) oder Maaß (2004) anzusehen.

Eine weitere wichtige Perspektive bildet das *kontextbezogene Modellieren* oder der MEA-Ansatz (Modelling Eliciting Activities) ist ebenfalls. Dabei stehen die Strukturierung von Lernprozessen sowie die Analyse von Lösungsprozessen einschlägiger Beispiele im Vordergrund. Theoretischer Hintergrund dieser Ansätze sind zum einen die amerikanische „Problem Solving“-Debatte, zum anderen kognitionspsychologische Konzepte des situierten Lernens. Die