

Gudrun Otto

Lösbarkeit von Gleichungen höheren Grades

**Geschichte
Historische Verfahren
Neue Verfahren**



Diplomica Verlag

Gudrun Otto

**Lösbarkeit von Gleichungen höheren Grades: Geschichte - Historische Verfahren -
Neue Verfahren**

ISBN: 978-3-8428-0635-1

Herstellung: Diplomica® Verlag GmbH, Hamburg, 2011

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Informationen in diesem Werk wurden mit Sorgfalt erarbeitet. Dennoch können Fehler nicht vollständig ausgeschlossen werden und der Verlag, die Autoren oder Übersetzer übernehmen keine juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für evtl. verbliebene fehlerhafte Angaben und deren Folgen.

© Diplomica Verlag GmbH

<http://www.diplomica-verlag.de>, Hamburg 2011

1	EXISTENZ VON LÖSUNGEN UND LÖSUNGSFORMELN	3
1.1	Der quadratische Fall	3
1.2	Der kubische Fall	7
1.3	Der biquadratische Fall	14
1.4	Die Suche nach einer allgemeinen Lösungsformel	17
1.4.1	Anzahlen von Lösungen - Der Fundamentalsatz der Algebra	17
1.4.2	Der Beweis der Nichtexistenz einer allgemeinen Lösungsformel für Gleichungen vom Grad ≥ 5	26
2	ANZAHL UND LAGE DER REELLEN LÖSUNGEN VON GLEICHUNGEN HÖHEREN GRADES	33
2.1	Grenzen für die Lösungen von Gleichungen höheren Grades	34
2.2	Anzahl und Vorzeichen der Lösungen von Gleichungen höheren Grades - Die Vorzeichenregel von DESCARTES	36
2.3	Anzahl und Lage der Nullstellen von reellen kubischen Polynomen	41
2.3.1	Anzahl der reellen Nullstellen eines kubischen Polynoms	41
2.3.2	Vorzeichen und Grenzen der Nullstellen reeller kubischer Polynome	50
2.3.3	Untersuchung aller möglichen Koeffizientenfolgen	54
2.4	Anzahl und Lage der Nullstellen eines biquadratischen Polynoms	66
2.4.1	Die Charakteristik eines Polynomenpaares	66
2.4.2	Grenzen der Nullstellen reeller biquadratischer Polynome	76
2.5	Anzahl und Lage der reellen Lösungen von Gleichungen beliebigen Grades	83
2.5.1	Mögliche Anzahl und Vorzeichen - Verallgemeinerung der Ergebnisse zur DESCARTSCHEN Vorzeichenregel im kubischen Fall	83
2.5.2	Anzahl und Grenzen - STURMSche Kette	86
2.6	Verkleinern der Grenzen	88
3	LITERATURVERZEICHNIS:	95

Lösbarkeit von Gleichungen höheren Grades

*Eine Abhandlung über die historische Suche nach Lösungsformeln
und Untersuchung von Methoden zur Bestimmung von Anzahl und Lage der
Nullstellen konkreter Gleichungen*

Vorwort

Dieses Buch befasst sich mit den Lösungen von Gleichungen der Form:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

Das Auffinden von Lösungen für Gleichungen höheren Grades beschäftigt Mathematiker aller Regionen und aller Epochen seit nun mehr ca. 4000 Jahren und ist sogar namensgebend für eines der wichtigsten Teilgebiete der Mathematik. Die Bezeichnung *Algebra* ist abgeleitet aus dem Titel des Buchs *Hisab al-gabr w'al muqabala* ("Über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen"), das der arabischen Mathematiker AL-KHWARIZIMI ca. im Jahr 830 veröffentlichte. In diesem Buch beschreibt AL-KHWARIZIMI geometrische Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen. AL-KHWARIZIMI löst Gleichungen mit den Methoden, die wir heute noch verwenden: Abziehen von gleichen Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung ("Ausgleichen"), um gleiche Potenzen zusammenzufassen, und Hinüberschaffen eines negativen Gliedes auf die andere Seite ("Ergänzen"), so dass sich positive Koeffizienten ergeben (negative Zahlen wurden ja noch nicht verwendet).

Von diesen Arbeiten ausgehend, wird im ersten Teil des Buches einen Überblick über die wichtigsten geschichtlichen Entwicklungen gegeben. Hierbei geht es hauptsächlich um die allgemeine Lösbarkeit von Gleichungen, also um die Suche nach Lösungsformeln.

Der zweite Teil widmet sich dann ganz den praktischen Anwendungen, dass heißt hier werden Verfahren entwickelt, mit deren Hilfe man die Lösungen einer Gleichung n-ten Grades näherungsweise berechnen kann. Dabei kommen nur solche Verfahren zum Einsatz, die anschaulich mit den Mitteln der Schulmathematik hergeleitet werden können.

Im heutigen Mathematikunterricht spielen Gleichungen vom Grad $n > 2$ kaum noch eine Rolle. Ob dies daran liegt, dass es für Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ keine Lösungsformel mehr gibt und die Lösungsformeln für Gleichungen vom Grad $n = 3$ und $n = 4$ schon recht kompliziert sind, bleibt nur zu vermuten.

Es wird sich aber zeigen, dass es durchaus möglich ist, mit einfachen Mitteln das Thema Lösungen von Gleichungen n-ten Grades komplett zu behandeln. Auch die Lösungsformeln lassen sich, wie man hoffentlich im ersten Teil erkennen wird, auf anschauliche Weise herleiten.

1 Existenz von Lösungen und Lösungsformeln

In diesem Kapitel geht es um die Frage nach der Lösbarkeit von Gleichungen beliebigen Grades. Dabei sollen zunächst die bekannten Lösungsformeln für Gleichungen vom Grad $n = 2, 3, 4$ anschaulich hergeleitet werden, bzw. ihre historische Auffindung nachvollzogen werden. Daran anschließend folgt ein Exkurs in die Zeit, als nach einer allgemeinen Auflösungsformel für Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ gesucht wurde.

Im ersten Abschnitt wird zunächst die Lösungsmethoden des arabischen Mathematikers AL-KHWARIZIMI für quadratische Gleichungen beschrieben, und wie sich daraus die Methode der quadratischen Ergänzung ableiten lässt. Der zweite und dritte Abschnitt ist dann den Arbeiten des italienischen Mathematikers GEROLAMO CARDANO gewidmet. Er veröffentlichte 1545 sein Buch *Ars Magna de Regulis Algebraicis*, in dem er Lösungsmethoden für kubische und biquadratische Gleichungen aufzeigte. Im vierten Abschnitt folgt dann eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Untersuchungen auf dem Weg hin zum Beweis, dass für Gleichungen vom Grad $n \geq 5$ keine allgemeine Auflösungsformel existiert.

1.1 Der quadratische Fall

Die erste bekannte systematische Abhandlung über quadratische Gleichungen stammt von dem arabischen Mathematiker AL-KHWARIZIMI (ca. 780-850) und wurde von diesem ca. im Jahre 830 veröffentlicht. Zu dieser Zeit wurden mathematische Aufgabenstellungen noch verbal formuliert. Mathematische Symbole gab es noch nicht. Auch waren zu dieser Zeit nur positive Zahlen in Gebrauch, negative Zahlen und die Null existierten nicht. Demzufolge formulierte AL-KHWARIZIMI die Aufgabenstellungen noch verbal und benutzt dabei die Begriffe *Quadrat*, *Wurzeln* und *Zahlen*.

So kommt er zu sechs verschiedenen Gleichungstypen die in unsere heutige mathematische Symbolik übersetzt wie folgt lauten:¹

(1.1.1)

- | | |
|-------------------|---|
| 1. $x^2 = ax$ | <i>Quadrate sind gleich Wurzeln</i> |
| 2. $x^2 = b$ | <i>Quadrate sind gleich Zahlen</i> |
| 3. $ax = b$ | <i>Wurzeln sind gleich Zahlen</i> |
| 4. $x^2 + ax = b$ | <i>Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen</i> |
| 5. $x^2 + b = ax$ | <i>Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln</i> |
| 6. $ax + b = x^2$ | <i>Wurzeln und Zahlen sind gleich Quadraten</i> |

Seine Beweisführung erfolgte geometrisch. Auch die Rechenoperationen sind hier geometrisch begründet. Somit ist klar, dass Gleichungen vom Typ $x^2 + ax + b = 0$

¹ Vgl. [Kas] S. 4

nicht behandelt wurden, da ja nur positive Terme addiert werden und das Ergebnis also auch positiv sein muss.

Mit *Quadrat* ist immer eine quadratische Fläche gemeint, mit *Wurzel* die Seite einer quadratischen Fläche. Mit *a-Wurzeln* hingegen eine rechteckige Fläche, die eine Seite *Wurzel* und eine Seite *a* hat. *Zahlen* sind dann ebenfalls Flächen.

Nach heutigem Verständnis würde man nicht von Quadraten, Seiten und Rechtecken sprechen, sondern von Flächeninhalten und Seitenlängen, die neben einem Wert auch noch eine Einheit haben. Bei AL-KHWARIZIMI treten aber alle Größen ohne Einheiten auf.

Im Folgenden wird nun an einem der drei gemischtquadratischen Fälle der verbalen, und auch der geometrischen Lösungsweg von AL-KHWARIZIMI, welcher der in der Schulmathematik verwendeten Methode der quadratischen Ergänzung entspricht, nachvollzogen.²

„Ein Quadrat und 10 Wurzeln desselben, ergeben 39 Zahlen; dass heißt, wie groß muss das Quadrat sein, welches, wenn es um 10 seiner eigenen Wurzeln ergänzt wird, 39 ergibt? Die Lösung ist dies: du halbst die Anzahl der Wurzeln, was in dem vorliegenden Beispiel 5 liefert. Dies multiplizierst du mit sich selbst; das Produkt ist 25. Addiere dies zu 39; die Summe ist 64. Nun nimm die Wurzel von diesem, welche 8 ist, und subtrahiere davon die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, was 5 ist; der Rest ist 3. Dies ist die Wurzel des Quadrats, nach welcher du gesucht hast; das Quadrat selbst ist 9.“

Übersetzt in Rechenoperationen liefert dies:

Die Lösung ist dies: du halbst die Anzahl der Wurzeln $\left[\Rightarrow \left(\frac{a}{2} \right) \right]$, was in dem vorliegenden Beispiel 5 liefert. Dies multiplizierst du mit sich selbst $\left[\Rightarrow \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right]$; das Produkt ist 25.

Addiere dies zu 39 $\left[\Rightarrow \left(\frac{a}{2} \right)^2 + b \right]$; die Summe ist 64. Nun nimm die Wurzel von diesem

$\left[\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + b} \right]$, welche 8 ist, und subtrahiere davon die Hälfte der Anzahl der Wurzeln $\left[\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 + b} - \frac{a}{2} \right]$, was 5 ist; der Rest ist 3. Dies ist die Wurzel des Quadrats, nach welcher du gesucht hast; das Quadrat selbst ist 9.

AL-KHWARIZIMI bildet hier also zunächst in den ersten beiden Schritten die quadratische Ergänzung und addiert diese zur rechten Seite der Ausgangsgleichung:

$$39 + 25 = 64$$

Anschließend zieht er die Wurzel aus der rechten Seite der Gleichung:

$$\sqrt{64} = 8$$

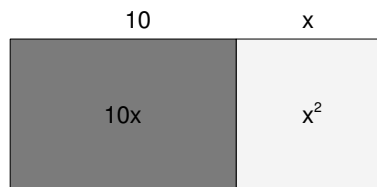
² Vgl. [Kas] S. 4-7

Die Anweisung *"und subtrahiere davon die Hälfte der Anzahl der Wurzeln, was 5 ist; der Rest ist 3. Dies ist die Wurzel des Quadrats, nach welcher du gesucht hast"* impliziert die Anwendung der quadratischen binomischen Formel. Denn diese Anweisung setzt voraus, dass für die Wurzel aus der linken Seite der Gleichung gilt:

$$\sqrt{x^2 + 10x + 25} = x + 5$$

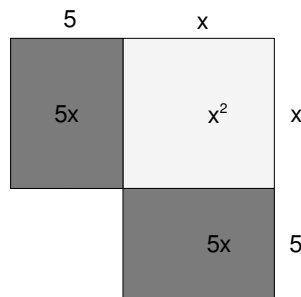
Anschaulicher ist der geometrische Beweis, den AL-KHWARIZIMI für dieses Beispiel angibt. Ausgehend von dem bekannten Flächeninhalt eines Quadrates und 10 seiner Wurzeln zusammen, konstruiert er ein neues Quadrat dessen Flächeninhalt er dann berechnen kann, und daraus dann auch die Seitenlänge. Aus der Seitenlänge wiederum kann er dann die Wurzel des ursprünglichen Quadrates berechnen.

Zunächst ist also ein Quadrat und 10 seiner Wurzeln gegeben:



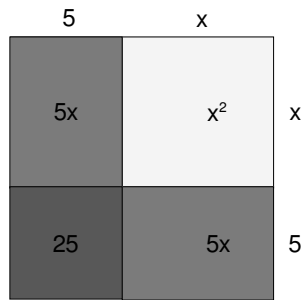
Figur 1.1.1

Er teilt dann das Rechteck in zwei gleichgroße Rechtecke, die jeweils den Flächeninhalt $5x$ haben, also jeweils eine Seitenlänge x und eine Seitenlänge 5 . Diese Rechtecke fügt er nun mit ihren x -Seiten an das Quadrat an:



Figur 1.1.2

Nun ergänzt er die entstandene Figur durch das Quadrat der halben Anzahl der Wurzeln zu einem neuen Quadrat, dessen Flächeninhalt er dann kennt:



Figur 1.1.3

Der Flächeninhalt dieses neuen Quadrates ist ja nun $39 + 25 = 64$, somit lässt sich die Länge einer Seite des neuen Quadrates durch Wurzelziehen berechnen:

$\sqrt{64} = 8$. Für diese Länge gilt ja nun: $8 = x + 5$, somit lässt sich also x berechnen.

Diese geometrische Lösungsmethode zeigt nicht nur sehr schön, dass die quadratische Ergänzung tatsächlich die Ergänzung eines Quadrates ist, sondern darüber hinaus findet man darin auch die geometrische Bedeutung der quadratischen binomischen Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

In dem Aufsatz von Rainer Kaske stellt der Autor auch noch die Lösungen der anderen beiden Typen von gemischtquadratischen Gleichungen vor. Weiter zeigt der Autor, dass AL-KHWARIZIMI nach seinem Wissensstand keine Lösungen unterschlägt.³ Da AL-KHWARIZIMI davon ausgeht, dass es nur positive Zahlen gibt, gibt es somit auch nur positive Lösungen. Im 4. und im 6. Fall aus (1.1.1) kann es mit positiven a und b auch immer nur eine positive Lösung geben. Die zweite Lösung wäre immer eine negative und würde durch Addition der negativen Wurzel entstehen. Im 5. Fall, bei dem zwei positive Lösungen möglich sind, gibt AL-KHWARIZIMI die Anweisung, es einmal mit der Addition und einmal mit der Subtraktion der positiven Wurzel zu versuchen:⁴

"Denn in diesem Fall können sowohl Addition als auch Subtraktion verwendet werden, was in den anderen Fällen [...] nicht möglich ist."

Man beachte, er spricht hier von Addition und Subtraktion der Wurzel und meint damit die positive Wurzel. Da es für ihn keine negativen Zahlen gibt, existiert natürlich auch für jede Gleichung der Form $x = \sqrt{a}$ nur eine Lösung.

Ob in diesen Fall keine, eine oder zwei Lösungen existieren wird von AL-KHWARIZIMI auch untersucht:⁵

"Und beachte: Falls bei einer Aufgabe, die zu diesem Fall gehört, das Produkt der Hälfte der Anzahl der Wurzeln mit sich selbst weniger ist als die Zahlen, dann ist die Aufgabe unmöglich. Aber: Wenn das Produkt gleich der Zahlen ist, dann ist die Wurzel des Quadrats gleich der Hälfte der Anzahl der Wurzeln, ohne Addition und Subtraktion."

³ Vgl. [Kas] S. 11-12

⁴ Vgl. [Kas] S. 10

⁵ Vgl. [Kas] S. 12