

E. Martinelli (Ed.)

Classi caratteristiche e questioni connesse

41

L'Aquila, Italy 1966



E. Martinelli (Ed.)

Classi caratteristiche e questioni connesse

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in L'Aquila, Italy,
September 2-10, 1966

 Springer



FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-11047-4 e-ISBN: 978-3-642-11048-1
DOI:10.1007/978-3-642-11048-1
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
Reprint of the 1st.ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1967
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

3^o Ciclo - L'Aquila dal 2 al 10 settembre 1966

"CLASSI CARATTERISTICHE E QUESTIONI CONNESSE "

Coordinatore: E. MARTINELLI

I. BUCUR	: L'Anneau de Chow d'une variété algébrique	pag. 1
B. ECKMANN	: Cohomologie et classes caractéristiques	pag. 21
C. TELEMAN	: Sur le caractère de Chern d'un fibré vectoriel complexe différentiable	pag. 97
E. THOMAS	: Characteristic classes and differentiable manifolds	pag. 113
E. VAN de VEN	: Chern classes and complex manifolds	pag. 189

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E.)

I. BUCUR

L'ANNEAU DE CHOW D'UNE VARIETE ALGEBRIQUE

Corso tenuto all'Aquila dal 2 al 10 settembre 1966

L'ANNEAU DE CHOW D'UNE VARIÉTÉ ALGÈBRE

par

I. Bucur (Università di Bucarest)

Introduction. Le problème central de la théorie des classes caractéristiques peut être représenté, en utilisant le langage de la théorie des catégories et foncteurs de la manière suivante :

Soient C_1, C_2 deux catégories et $F_1, F_2 : C_1 \rightarrow C_2$ deux foncteurs contravariants. Déterminer tous les morphismes fonctionnels de F_1 en F_2 .

Rappelons qu'on a donné un morphisme fonctoriel $\mathcal{J} : F_1 \rightarrow F_2$ de F_1 en F_2 si l'on a donné pour chaque $A \in \mathcal{O}(C_1)$ un morphisme $\mathcal{J}(A) : F_1(A) \rightarrow F_2(A)$ de la catégorie C_2 tel que la condition suivante soit remplie :

$A \xrightarrow{u} B$ étant un morphisme dans C_1 , le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F_1(A) & \xrightarrow{\mathcal{J}_1(A)} & F_2(A) \\ \uparrow F_1(u) & & \uparrow F_2(u) \\ F_1(B) & \xrightarrow{\mathcal{J}_1(B)} & F_2(B) \end{array}$$

Si par hasard $C_2 = \text{Ens}$ et $F_1 = h_A$, où on a désigné par h_A le foncteur contravariant $h_A : C_1 \rightarrow \text{Ens}$ défini par $h_A(X) = \text{Hom } C_1(X, A)$, alors il est facile à démontrer que l'ensemble des morphismes fonctoriels de h_A dans F_2 est en correspondance bijective avec l'ensemble $F_2(A)$. Dans le cas topologique (ou différentiel) les catégories C_1, C_2 et les foncteurs F_1, F_2 sont définis comme suit :

C_1 est une catégorie raisonnable d'espaces topologiques (par exemple les polyèdres finis) les morphismes d'un tel espace X dans un autre Y étant l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de-

1. Bucur

finies sur X à valeurs dans Y .

C_2 est la catégorie des monoides commutatifs avec des éléments unité, les morphismes étant les homomorphismes de monoides.

F_1 sera le foncteur qui associe à chaque espace X l'ensemble $F_1(X)$ de tous les fibrés vectoriels (réels ou complexes suivant le cas) de n'importe quel rang et dont la base est X . Bien entendu on identifie deux espaces fibrés s'ils sont isomorphes. La somme de Whitney permet de munir $F_1(X)$ d'une structure de monoïde. Si $f: X \rightarrow Y$ est une application continue alors $F_1(f)$ (f = la classe d'homotopie de f) sera déduit de l'application qui associe à chaque espace fibré vectoriel ξ de base Y l'espace fibré vectoriel $f^{-1}(\xi)$ l'image inverse de ξ par f .

$F_2(X)$ est le foncteur contravariant qui associe à chaque espace topologique X le monoïde multiplicatif des éléments de la forme

$$1 + a_1 + a_2 + \dots, \quad a_i \in H^i(X)$$

la multiplication étant celle de l'anneau de cohomologie.

$$\text{Si } f: X \rightarrow Y, \text{ alors } F_2(f)(1 + b_1 + b_2 + \dots) = 1 + f^*(b_1) + f^*(b_2) + \dots$$

Dans ce cas, un morphisme fonctoriel $w: F_1 \rightarrow F_2$ est donné si l'on se donne pour chaque espace X de la catégorie C_1 un homomorphisme de monoides

$$(1) \quad w_x: F_1(X) \rightarrow F_2(X)$$

tel que pour chaque application continue $f: X \rightarrow Y$ le diagramme suivant est commutatif :

I. Bucur

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} F_1(x) & \xrightarrow{W_x} & F_2(x) \\ \uparrow F_1(j) & & \uparrow F_2(j) \\ F_1(y) & \xrightarrow{W_y} & F_2(y) \end{array}$$

Mais le fait que w_x est un homomorphisme de monoides signifie que nous avons la relation :

$$W_x(\xi \oplus \eta) = W_x(\xi) W_x(\eta)$$

qui n'est pas autre chose que la condition de dualité .

La commutativité du diagramme (2) nous dit que si η est un espace vectoriel sur y alors on a :

$$W_x(f^{-1}(\eta)) = f^*(W_y(\eta))$$

c'est - à dire la condition de fonctionnalité .

Nous sommes intéressés à instituer une théorie des classes caractéristiques pour les cas de variétés algébriques sur un corps quelconque . Il faut donc avoir tout d'abord les catégories C_1, C_2 et les foncteur F_1, F_2 dans ce cas . En ce qui concerne les catégories C_1, C_2 et le foncteur F_1 il n'existe pas des problèmes sérieux . En effet :

C_1 sera une catégorie algébriques , satisfaisant à certaines conditions de régularités, les morphismes étant des morphismes réguliers partout définis .

C_2 sera la catégorie des monoides commutatifs à élément unité

F_1 sera le foncteur qui associe à chaque variété algébrique X l'ensemble des classes d'espaces fibrés vectoriels de n'importe quel rang dont la base est X .

Il nous reste à définir F_2 , en fait à définir l'anneau de cohomologie d'une variété algébrique quelconque . Les travaux récents, liés

I. Bucur

en special avec le théoreme de Riemann-Roch ont indiqué deux candidats raisonnables pour F_2 : l'anneaux de cohomologie etale au sens de Grothendick et l'anneau de Chow d'une variété algébrique . Je me propose de donner la construction de l'anneau de Chow (sous la forme de Grothendick) d'une variété algebrique. Cette construction s'inspire de la théorie des foncteurs cohomologiques generalisés exposée par Monsieur Eckmann . Elle utilise les éléments de la theorie de groupe de Gorthendick d'une catégorie abelienne que nous exposerons tout-de suite . L'anneau de Chow une fois construit, la definition des classes caracteristiques (les classes de Chern) est tout-à -fait semblable avec le cas complexe sous la forme qui a été indiqué par Monsieur Van de Ven.

1. Elements de K-théorie pour les catégories abeliennes.

Soit C une catégorie abelienne et soit D une sous-catégorie pleine de C . On dit qu'une fonction $f: \mathcal{O}b D \longrightarrow G$ dans un groupe abelien G est additive si pour toute suite exacte de C

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

telles que $E', E'', E \in \mathcal{O}b D$ on a

$$f(E) = f(E') + f(E'') .$$

Soit f un fonction additive de D dans un groupe abelien G Les propriétés suivantes sont des consequences faciles de la definition :

$$\alpha) \quad f(0) = 0$$

$$\beta) \quad f(X) = f(Y) \text{ si } X \text{ et } Y \text{ sont isomorphes .}$$

I. Bucur

$$\gamma) \quad f(X \oplus Y) = f(X) + f(Y)$$

$\delta)$ Soit $E = (E^i, d^i)$ un complexe fini de D tel que les objets $B^{i+1} = \text{Im } d^i$, $Z^i = \ker d^i$, $H^i = Z^i / B^i$ sont dans D .

$$\text{Alors on a } \sum_i (-1)^i f(E^i) = \sum_i (-1)^i f(H^i(E)).$$

$\varepsilon)$ Si $F \in \mathcal{O}b D$ a une filtration finie

$$0 = F_0 < F_1 < \dots < F_n = F$$

et si l'on suppose que pour $0 < i \leq n$ F_i et $F_i / F_{i-1} \in \mathcal{O}b(D)$

$$\text{alors } f(F) = \sum_{i=1}^n f(F_i / F_{i-1})$$

$\varphi)$ Si D est stable par les sommes directes infinies alors $f = 0$.

Pour démontrer $\delta)$ on utilise les suites exactes :

$$0 \longrightarrow Z^i \longrightarrow E^i \longrightarrow B^{i+1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B^i \longrightarrow Z^i \longrightarrow H^i(E) \longrightarrow 0$$

Démonstration de $\varepsilon)$: se fait par récurrence sur n en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow F \longrightarrow F / F_{n-1} \longrightarrow 0$$

Pour démontrer $\varphi)$ soient $E \in \mathcal{O}b D$ et $F = \bigoplus_n E_n$, $E_n \cong E$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Alors $E \oplus F \cong F$ et en appliquant $\gamma)$ on a $f(F) = f(F) + f(E)$ donc $f(E) = 0$.

Si l'on considère pour tout groupe abélien G le groupe abélien $A_D(G)$ des fonctions additives de D dans G , on obtient de manière évidente un foncteur covariant $A_D : A b \longrightarrow A b$. Le foncteur A_D est représentable. Un couple de représentation $(K_D(C), \varphi)$ peut être obtenu de la manière suivante.

Designant par L le groupe abélien libre engendré par les objets de D , soit R le sous-groupe de L engendré par les éléments de la forme $E - E' - E''$ pour chaque suite exacte

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

de C . ($E', E, E'' \in \text{Ob } D$). On pose $K_D(C) = L/R$ et φ s'obtient en composant les applications canoniques :

$$\text{Ob } D \longrightarrow L \longrightarrow L/R$$

Le groupe $K_D(C)$ s'appelle le groupe de Grothendick de la sous-catégorie D . Il en résulte donc que φ est une fonction additive de D à valeurs dans $K_D(C)$ et chaque fonction additive de D se factorise de manière unique à travers φ :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob } D & & \\ \varphi \downarrow & \searrow \varphi & \\ K_D(C) & \longrightarrow & G \end{array}$$

Quand il n'y aura aucun danger de confusion on peut abréger la notation $K_D(C) = K(D)$.

Exemple. Soit C la catégorie des espaces vectoriels sur un corps k de dimensions finies. Alors $K(C) = \mathbb{Z}$.

I. Bucur

2. Eléments de la K-théorie pour les catégories triangulées .

Soient C une catégorie additive et $T : C \longrightarrow C$ un automorphisme additif de C . Une suite de la forme

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$$

sera appelée un triangle de la catégorie C et sera désignée par (X, Y, Z, u, v, w) . Deux triangles de C étant donnés (X, Y, Z, u, v, w) , (X', Y', Z', u', v', w') , un morphisme du premier triangle dans le second sera par définition un triple de morphismes $X \xrightarrow{f} X'$, $Y \xrightarrow{g} Y'$, $Z \xrightarrow{h} Z'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & T(f) \downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & T(X') \end{array}$$

On appelle catégorie triangulée une catégorie additive munie d'un automorphisme additif T et d'une famille de triangles qu'on appelle la famille des triangles distingués tel que les axiomes suivants soient vérifiés :

- a) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué . Tout morphisme $u : X \longrightarrow Y$ est contenu dans un triangle distingué (X, Y, Z, u, v, w) . Le triangle $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ est distingué
- b) (X, Y, Z, u, v, w) distingué $\Longleftrightarrow (Y, Z, T(X), v, w, -T(u))$ est distingué .

I. Bucur

c) Si (X, Y, Z, u, v, w) , (X', Y', Z', u', v', w') sont deux triangles distingués et $f: X \longrightarrow X'$, $g: Y \longrightarrow Y'$ sont tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' \end{array}$$

est commutatif alors il existe un morphisme $h: Z \longrightarrow Z'$ tel que (f, g, h) est un morphisme de triangle.

Un triangle distingué sera désigné d'habitude par

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ w \swarrow & & \searrow v \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

§ 3. Exemple de catégorie triangulée : la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne.

Soit A une catégorie abélienne et $C(A)$ la catégorie définie de la manière suivante :

$$\mathcal{Ob}(C(A)) = \{X' = (X^i, d_X^i) / X^i \in \mathcal{Ob}(A), d_X^{i+1} d_X^i = 0\}$$

$\text{Hom}_{C(A)}(X', Y') = \{ \text{classes d'homotopie des morphismes de } X' \text{ dans } Y' \}$

$\bigcup_n f \in \text{Hom}_{C(A)}(X', Y')$ sera appelé un quasi-isomorphisme si $H^n(f)$ est un isomorphisme pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

Si l'on ajoute formellement pour chaque quasi-isomorphisme $f: X' \longrightarrow Y'$ un flèche $Y' \longrightarrow X'$, l'inverse de f , on obtient

I. Bucur

une nouvelle catégorie additive désignée par $D(A)$ et qui s'appelle la catégorie dérivée de A .

La catégorie $D(A)$ sera munie d'une structure de catégorie triangulée et présente pour nous un intérêt décisif.

Pour avoir une structure de catégorie triangulée on commence par définir l'automorphisme additif $T : D(A) \longrightarrow D(A)$. Cet automorphisme applique le complexe $X^\bullet = (X^i, d_X^i)$ dans le complexe $T(X^\bullet)$ où

$$T(X)_i = X_{i+1}$$

$$d_{T(X^\bullet)}^i = d_{X^\bullet}^{i+1}$$

Les triangles distingués seront les triangles isomorphes dans le sens de la catégorie dérivée à des triangles de la forme suivante

$$X^\bullet \xrightarrow{I} Y^\bullet \xrightarrow{P} Z^\bullet \xrightarrow{R} T(X)$$

où

$$X^\bullet = (X^i, d_X^i), \quad Z^\bullet = (Z^i, d_Z^i), \quad Y^\bullet = (X^i \oplus Y^i, d_{Y^\bullet}^i)$$

$$I = (i_{X^i}^i), \quad P = (p_{Z^i}^i), \quad R = (p_{X^{i+1}}^i, d_{Y^\bullet}^i, i_{Z^i}^i)$$

$$i_{X^i}^i : X^i \longrightarrow X^i \oplus Z^i, \quad p_{Z^i}^i : X^i \oplus Z^i \longrightarrow Z^i$$

$$\begin{array}{ccccc} X^i & \longrightarrow & X^i \oplus Z^i & \xrightleftharpoons[p_{Z^i}^i]{i_{X^i}^i} & Z^i \\ \downarrow d_X^i & & \downarrow d_{Y^\bullet}^i & & \downarrow d_Z^i \\ X^{i+1} & \xrightleftharpoons[p_{X^{i+1}}^{i+1}]{i_{X^{i+1}}^{i+1}} & X^{i+1} \oplus Z^{i+1} & \longrightarrow & Z^{i+1} \end{array}$$

Il est important pour nous de considérer une sous-catégorie de $D(A)$ qui sera désigné par $D^b(A)$ et qui est engendrée par les complexes de $D(A)$ à cohomologie bornée. La sous-catégorie $D^b(A)$ a une structure naturelle de catégorie triangulée : en effet $D^b(A)$ est stable par T et les triangles distingués dans la catégorie $D^b(A)$ seront les triangles qui sont distingués dans la catégorie $D(A)$

4. Groupe de Grothendick d'une catégorie triangulée .

Soit C une catégorie triangulée et G un groupe abélien . On dit qu'une fonction f de C dans G est additive si pour tout triangle distingué

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ w \swarrow & & \nwarrow v \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & u & \end{array}$$

on a $f(X) + f(Z) = f(Y)$.

Etant donnée une fonction additive f , les relations suivantes sont des conséquences immédiates de la définition :

- a) $f(0) = 0$
- b) $f(T(X)) = -f(X)$
- c) $f(X) = f(Y)$ si X et Y sont isomorphes .
- d) $f(X \oplus Y) = f(X) + f(Y)$.

En effet les triangles suivantes sont distingués :

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ X & \xrightarrow{1_X} & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & T(X) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & T(Y) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ X \oplus Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

I. Bucur

(u isomorphisme) .

Comme dans le cas des catégories abeliennes, on obtient de la manière évidente un foncteur $A : \text{Ab} \longrightarrow \text{Ab}$ qui associe à chaque groupe abélien G le groupe abélien $A(G)$ des fonctions additives sur C à valeurs dans G . Ce foncteur est representable et il est facile de construire un couple de représentation $(K(C), \text{cl}_C)$. En effet on considère tout d'abord le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{\text{ob}(C)}$ engendré par les objets de C et puis le sous-groupe R engendré par les éléments de la forme $X-Y-Z$, où

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \swarrow & & \searrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

est un triangle distingué . Le groupe quotient $\mathbb{Z}^{\text{ob}(C)} / R$ sera $K(C)$ et cl_C s'obtient en composant les deux applications canoniques :

$$\text{ob}(C) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\text{ob}(C)} \longrightarrow K(C)$$

5. Propriétés fonctorielles.

Etant donnée deux catégories triangulées C, C' soit $F : C \longrightarrow C'$ un foncteur exact de C dans C' , c'est-à-dire un foncteur additif, "gradué" et transformant les triangles distingués en triangles distingués . Designons comme plus haut par $A, A' : \text{Ab} \longrightarrow \text{Ab}$ les foncteurs associés aux catégories C et C' . Il en résulte un morphisme fonctoriel $A' \longrightarrow A$ de composition avec F donc un homomorphisme $K(F) : K(C) \longrightarrow K(C')$ unique tel que le diagramme

I. Bucur

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}\mathcal{C}(C) & \xrightarrow{F} & \mathcal{O}\mathcal{C}(C') \\
 \mathcal{C}\mathcal{L}_C \downarrow & & \downarrow \mathcal{C}\mathcal{L}_{C'} \\
 K(C) & \xrightarrow{K(F)} & K(C')
 \end{array}$$

soit commutatif.

Il en résulte que si les foncteurs $F, F_1 : C \longrightarrow C'$ sont isomorphes alors $K(F) = K(F_1)$. En particulier si le foncteur F est une équivalence de catégories, alors $K(F)$ est un isomorphisme

Si C'' est une troisième catégorie triangulée et $F : C \times C' \longrightarrow C''$ un bifoncteur exact en chaque variable, alors il est clair qu'il en résulte une application bilinéaire $K(F) : K(C) \times K(C') \longrightarrow K(C'')$ tel que la relation suivante soit vraie :

$$K(F)(\mathcal{C}\mathcal{L}_C(X), \mathcal{C}\mathcal{L}_{C'}(X')) = \mathcal{C}\mathcal{L}_{C''}(F(X, X'))$$

6. Comparaison avec le cas des catégories. Soit A une catégorie abélienne et $K(A)$ le groupe de Grothendieck associé. D'autre part soit $D^b(A)$ la sous-catégorie pleine de $D(A)$ engendrée par les complexes bornés de $D(A)$. On peut former aussi le groupe de Grothendieck de cette catégorie triangulée $K(D^b(A))$. Il est facile à indiquer un homomorphisme

$$K(A) \xrightarrow{\mu} K(D^b(A))$$

En effet on peut considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}\mathcal{C}(A) & & \\
 \mathcal{C}\mathcal{L}_A \downarrow & \searrow f & \\
 K(A) & & K(D^b(A))
 \end{array}$$

I. Bucur

où la fonction f est définie de la manière suivante : X étant un objet de A on peut lui associer le complexe $X^\bullet$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la dimension zéro qui est égale à X . Alors on peut poser $f(X) = cl_{D^b(A)}^0(X^\bullet)$, f est une fonction additive et donc se factorise par cl_A . On obtient donc

$$\mu : K(A) \longrightarrow K(D^b(A)) .$$

L'homomorphisme μ est en fait un isomorphisme. En effet il est facile à construire un inverse de μ en considérant la fonction additive $g : cl_{D^b(A)} \rightarrow K(A)$ qui associe à chaque complexe $X^\bullet$ de $D^b(A)$ l'élément $g(X^\bullet) = \sum (-1)^i cl_A(H^i(X^\bullet))$.

L'intérêt principal de considérer la catégorie dérivée $D(A)$ (ou la catégorie $D^b(A)$) d'une catégorie abélienne A consiste dans le fait suivant :

Les foncteurs qu'on étudie d'habitude d'une catégorie abélienne A dans une autre B , ne sont pas en général des foncteurs exacts. Il est donc difficile à comparer les groupes de Grothendieck $K(A)$, $K(B)$ mais à l'aide de ces foncteurs. Par contre l'expérience nous montre que si l'on considère les foncteurs sur les catégories dérivées correspondantes, alors la tendance générale est que les foncteurs ainsi obtenus deviennent des foncteurs exacts.

Premier exemple. Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace annelé et A la catégorie abélienne des faisceaux sur X qui sont des $\mathcal{O}$ -modules $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ alors on peut définir le faisceau produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$. Le faisceau $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$ ainsi obtenu est un $\mathcal{O}$ -module. Si l'on fixe par exemple $\mathcal{F}$, on obtient un foncteur covariant de A dans A :

$$\mathcal{G} \longmapsto \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}$$

qui est bien entendue loin d'être exact, bien qu'il est exact à droite. On peut corriger ce fait en regardant le foncteur produit tensoriel dans la catégorie dérivée de A . Pour cela, nous dirons tout d'abord que le faisceau $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$ -modules est plat si quelque soit la suite exacte de $\mathcal{G}$ -modules :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

la suite obtenue par tensorisation avec $\mathcal{P}$ reste encore exacte :

$$0 \longrightarrow A \otimes_{\mathcal{G}} \mathcal{P} \longrightarrow B \otimes_{\mathcal{G}} \mathcal{P} \longrightarrow C \otimes_{\mathcal{G}} \mathcal{P} \longrightarrow 0$$

Par exemple $\mathcal{O}^m$ est plat. Une somme directe de faisceaux plats est un faisceau plat.

Soit U un ouvert de l'espace X et considérons le faisceau de $\mathcal{G}$ -modules $\mathcal{G}_U$ obtenue en prolongeant par zéro le faisceau $\mathcal{G}_U$ en dehors U . C'est clair que $\mathcal{G}_U$ est un faisceau plat.

Proposition. Chaque faisceau A de $\mathcal{G}$ -modules est le quotient d'un faisceau plat.

Démonstration. Soit $x \in X$, $a_x \in A_x$, U un voisinage de x et $a_v \in \Gamma(U, A)$ tel que $a_v(x) = a_x$. Pour chaque triple (x, a_x, a_v) de cette forme considérons le faisceau $\mathcal{O}_{x, a_x, a_v} = \mathcal{G}_U$ et l'homomorphisme de faisceaux $\varphi_{x, a_x, a_v} : \mathcal{O}_{x, a_x, a_v} \rightarrow A_v$ qui envoie l'unité de $\mathcal{O}_y$ en $a_v(y)$ pour chaque $y \in U$. Soient $\mathcal{P} = \bigoplus \mathcal{O}_{x, a_x, a_v}$ et $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow A$, $\varphi = \bigoplus \varphi_{x, a_x, a_v}$. $\mathcal{P}$ est plat et φ est un épimorphisme.

En utilisant cette proposition il est facile à établir la proposition suivante :

I. Bucur

Si $\mathcal{X}^\bullet$ est un complexe de faisceaux borné à droite, il existe un complexe $\mathcal{U}^\bullet$ dont tous les composantes sont plats et un quasi-isomorphisme $\mathcal{U}^\bullet \longrightarrow \mathcal{X}^\bullet$. Nous sommes maintenant en mesure de définir le produit tensoriel dans la catégorie dérivée des faisceaux de $\mathcal{O}$ -modules.

Soient $\mathcal{X}^\bullet$ et $\mathcal{Y}^\bullet$ deux complexes bornés à droite des faisceaux de $\mathcal{O}$ -modules et $\mathcal{U}^\bullet \rightarrow \mathcal{X}^\bullet$ un quasi-isomorphisme, ayant tous les composantes plats. Dans ce cas le complexe $\mathcal{U}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{Y}^\bullet$ ne dépend pas-à un isomorphisme près dans le sens de la catégorie dérivée $D(A)$ - de $\mathcal{U}^\bullet$. L'un de ces complexes sera désigné par $\mathcal{X}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{Y}^\bullet$ et sera appelé le produit tensoriel au sens de la catégorie dérivée des complexes $\mathcal{X}^\bullet$ et $\mathcal{Y}^\bullet$.

On peut montrer qu'on obtient de cette façon un bifoncteur :

$$D^-(A) \times D^-(A) \longrightarrow D^-(A)$$

qui est exact (au sens de la théorie des catégories triangulées) en chaque variable. En particulier on a les formules :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{Y}^\bullet &\cong \mathcal{Y}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{X}^\bullet \\ \mathcal{X}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} (\mathcal{Y}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{Z}^\bullet) &\cong (\mathcal{X}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{Y}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{Z}^\bullet \\ \mathcal{X}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} 0 &\cong \mathcal{X}^\bullet \end{aligned}$$

On pose par définition :

$$\mathrm{Tor}_{\mathcal{O}}^i(\mathcal{X}^\bullet, \mathcal{Y}^\bullet) = H_i(\mathcal{X}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{Y}^\bullet)$$

Deuxieme exemple. Soient $(\mathcal{X}', \mathcal{O}')$, $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ deux espaces annelés et $f : (\mathcal{X}', \mathcal{O}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{O})$ un morphisme du premier espace dans le seconde.

Il résulte alors deux foncteurs exacts

$$Rf_{\star} : D^+(A') \longrightarrow D^+(A)$$

$$Rf^{\star} : D^+(A) \longrightarrow D^+(A')$$

deduits des foncteurs "images directe" resp. "image inverse".

7. Definition de l'anneau de Chow d'une variété algébrique projective et sans singularités.

Soit $(X, \mathcal{O})$ une variété algébrique projective et sans singularités et S la catégorie abélienne des faisceaux cohérents sur X . On pose par définition $K(X) = K(S) = K(D^b(S))$. Si $x^{\bullet}, y^{\bullet}$ sont deux complexes finis de faisceaux cohérents alors $x^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}} y^{\bullet}$ est isomorphe à un complexe borné dont toutes les composantes sont des faisceaux cohérents. On obtient donc un bifoncteur

$$D^b(S) \times D^b(S) \longrightarrow D^b(S)$$

$$(x^{\bullet}, y^{\bullet}) \longmapsto x^{\bullet} \otimes y^{\bullet}$$

qui est exact en chaque variable. Il en résulte compte tenue des résultats généraux que nous avons exposés qu'on peut introduit sur $K(X)$ une lois de composition commutative, associative et à élément unité. En fait $K(X)$ devient un anneau, l'anneau de Chow non-gradué de la variété algébrique X .

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme régulier, en utilisant $Rf^{\star}$ on peut lui associer un homomorphisme d'anneaux

$$f! : K(Y) \longrightarrow K(X)$$

Si en plus f est propre on peut définir en partant de $Rf_{\star}$ l'homomorphisme de groupes :

I. Bucur

$$f_! : K(X) \longrightarrow K(Y) .$$

Ces deux homomorphismes sont liés par la "formule de projection" :

$$f_!(y \cdot f_!(X)) = f_!(y) \cdot x \quad x \in K(Y), y \in K(X) .$$

8 . Filtration de $K(X)$. On peut introduire une filtration sur $K(X)$ par les formules :

$$K(X)_i = \{ \xi \in K(X) / \forall Y \text{ fermé } \exists x \in D^b(S) ,$$

$$cl_{D^b(S)} x = \xi, \text{codim}_Y(Y \cap \text{Supp } x) \geq i$$

L'anneau gradué associé s'appelle l'anneau de Chow gradué de la variété X .