

G. Fichera · E. Magenes (Eds.)

Integrali singolari e questioni connesse

Varenna, Italy 1957



G. Fichera • E. Magenes (Eds.)

Integrali singolari e questioni connesse

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
June 10-19, 1957

 Springer



C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10916-4 e-ISBN: 978-3-642-10918-8
DOI:10.1007/978-3-642-10918-8
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011
Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1958
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of 1st ed.- Varenna, Italy, June 10-19, 1957

INTEGRALI SINGOLARI E QUESTIONI CONNESSE

E. Magenes:	Il problema della derivata obliqua regolare per le equazioni lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine in m variabili	1
G. Stampacchia:	Completamenti funzionali ed applicazione alla teoria dei potenziali di dominio	53
A. Zygmund:	On singular integrals.....	69
S. Faedo:	Applicazione ai problemi di derivata obliqua di un principio esistenziale e di una legge di dualità fra le formule di maggiorazione	109
G. Fichera:	Una introduzione alla teoria delle equazioni integrali singolari	127

P R E F A Z I O N E

La Commissione Scientifica del C.I.M.E. decideva di includere fra i corsi del secondo ciclo, da tenersi alla Villa Monastero di Varenna nel 1957, uno dedicato alla teoria degli integrali singolari ed ai problemi ad essa attinenti.

Tale decisione ancora una volta ha sottolineato l'utilità e la funzionalità di questi corsi estivi di Matematica che, svolgendosi sotto forma di seminari in un ambiente suggestivo, riescono a suscitare il più vivo interesse su argomenti di attualità matematica, accumulando in un'atmosfera cordiale studiosi e ricercatori italiani e stranieri.

Particolarmente felice è stata la scelta del soggetto anzidetto, dato che, pur trattandosi di uno dei capitoli più utili ed importanti dell'Analisi matematica, poco è stato finora coltivato dai ricercatori italiani.

Tale circostanza tanto più è sorprendente, in quanto è stato proprio un italiano, F. G. TRICOMI, che ha praticamente dato inizio alla teoria degli integrali singolari multipli. Ed occorre anche dire che il contributo del TRICOMI è universalmente riconosciuto nelle Memorie e nelle Monografie, pubblicate all'Estero, su questo argomento.

D'altronde, un corso sulla teoria degli integrali singolari non poteva non essere accolto col più vivo interesse dagli analisti italiani, dati i profondi legami esistenti fra questa teoria e quella dei problemi al contorno per le equazioni differenziali, specialmente di tipo ellittico, che sì largamente sono stati studiati in Italia.

Le lezioni ed i seminari tenuti in quel corso, che ebbe luogo dal 10 al 19 giugno 1957, vengono raccolti in questo volume. Esso costituisce una rassegna di metodi e risultati, che sarà indubbiamente di grande ausilio a quei giovani ricercatori che vorranno rivolgere la loro attenzione a tale suggestivo campo dell'Analisi moderna.

Fra gli articoli inclusi nel presente volume occorre in primo luogo citare quello dovuto ad A. ZYGMUND, al quale si debbono fondamentali risultati in questo campo. Con felice sintesi vengono, nell'articolo stesso, presentati gli essenziali e profondi contributi recati dallo ZYGMUND e dalla Sua Scuola alla teoria degli integrali singolari multipli.

E. MAGENES tratta ampiamente del problema regolare della derivata obliqua per le equazioni differenziali ellittico-paraboliche. Tale problema che, nel caso delle equazioni ellittiche, ha costituito un incentivo per lo sviluppo della teoria degli integrali singolari, inquadrato nella più ampia teoria delle equazioni ellittico-paraboliche, potrà condurre all'indagine di nuove classi di integrali singolari. I casi considerati dal MAGENES stesso e da un Suo allievo, relativi all'equazione parabolica del calore, già costituiscono una conferma di quanto si è ora affermato.

Ad interessanti questioni, che possono connettersi con quelle cui il corso era dedicato, sono relative le due conferenze di S. FAEDO e G. STAMPACCHIA.

Chiude il volume una Memoria dello scrivente, dedicata alle equazioni integrali singolari su una curva del piano.

La presente raccolta sarebbe stata del tutto completa, se essa avesse potuto includere una trattazione delle equazioni singolari in più variabili. E tale lacuna sarebbe stata certo colmata se avesse potuto prendere parte al corso il Prof. S. G. MIHLIN, che, invitato dagli Organizzatori, non potè esser presente a Varenna.

Occorre però dire che la teoria delle equazioni integrali singolari in più variabili è, allo stato attuale, ben lungi dall'essere completa. D'altra parte i risultati che di essa si conoscono trovansi esposti in una nota Monografia dovuta allo stesso MIHLIN.

Sono certo di interpretare il pensiero dei Colleghi che hanno collaborato al corso, esprimendo i più vivi ringraziamenti alla Commissione Scientifica del C.I.M.E ed in particolare al suo Presidente, Prof. E. BOMPIANI, anche per aver promosso la pubblicazione del presente volume.

GAETANO FICHERA

Il problema della derivata obliqua regolare per le equazioni lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine in m variabili^(*)

di ENRICO MAGENES (Genova)

n. 1 *Esempi introduttivi.* — Uno dei più importanti e primi problemi che hanno portato allo studio degli integrali singolari e delle equazioni singolari è il cosiddetto problema della derivata obliqua nella teoria del potenziale ordinario (v. ad es. [9a]⁽¹⁾). Esso consiste nel determinare una funzione armonica u in un campo A dello spazio a 3 dimensioni quando sia assegnato sulla frontiera Σ di A il valore della derivata secondo una direzione prefissata l , in generale variabile da punto a punto, cioè:

$$(1) \quad \Delta_2 u \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \text{ in } A; \quad \frac{\partial u}{\partial l} = h \text{ su } \Sigma$$

In ipotesi di opportuna regolarità sui dati del problema, che per ora non è il caso di precisare, quando si cerchi la soluzione di (1) sotto la forma di potenziale di semplice strato

$$(2) \quad u(x) = \int_{\Sigma} \varphi(y) s(x, y) d\sigma_y$$

$$\left[x \equiv (x_1, x_2, x_3), y \equiv (y_1, y_2, y_3), s(x, y) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{xy}, \right.$$

$$\left. \overline{xy} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2} \right],$$

(*) Questa Memoria riproduce brevemente le lezioni svolte dall'A. nel 2° ciclo di corsi del Centro Internazionale Matematico Estivo (CIME) tenuto a Varenna dal 10 al 19 Giugno 1957 su « *Integrali singolari e questioni connesse* ».

(1) I numeri tra [] si riferiscono alla bibliografia finale della presente relazione.

si è condotti allo studio della derivata obliqua del potenziale (2) ed è facile, se φ è sufficientemente regolare, trovare per questa derivata la formula limite:

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \xi \text{ (su } u_{\xi}^+)} \frac{\partial u(x)}{\partial l_{\xi}} = -\frac{\cos(n_{\xi}, l_{\xi})}{2} \varphi(\xi) + \int_{\Sigma}^* \varphi(y) \frac{\partial s(\xi, y)}{\partial l_{\xi}} d\sigma_y$$

dove n_{ξ} è l'asse normale a Σ nel punto ξ rivolto verso l'interno di A e l'integrale con asterisco è da intendersi quale integrale principale alla Cauchy, cioè come

$$(4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma - \Sigma_{\varepsilon}} \varphi(y) \frac{\partial s(\xi, y)}{\partial l_{\xi}} d\sigma_y$$

essendo Σ_{ε} la porzione di Σ che si proietta sul piano tangente a Σ nel punto ξ nel cerchio di centro ξ e raggio ε ($\varepsilon > 0$)⁽²⁾. Il nucleo $\frac{\partial s(\xi, y)}{\partial l_{\xi}}$, salvo nel caso $l \equiv n$ su Σ (problema di Neumann), non è sommabile su Σ (come funzione di y per ogni ξ fissato): esso è nell'intorno di ξ del tipo $O\left(\frac{1}{\xi y^2}\right)$ ⁽³⁾, ma tuttavia esiste il limite (4).

Si arriva così per (1) allo studio dell'equazione integrale singolare

$$(5) \quad \frac{-\cos(n_{\xi}, l_{\xi})}{2} \varphi(\xi) + \int_{\Sigma}^* \varphi(y) \frac{\partial s(\xi, y)}{\partial l_{\xi}} d\sigma_y = h(\xi) \quad \xi \in \Sigma$$

nell'incognita $\varphi(\xi)$.

Un problema analogo a (1) può porsi (ed è da tempo noto anche se finora assai poco studiato) per la più semplice delle equazioni paraboliche, quella del calore

$$(6) \quad E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

⁽²⁾ La (3) trovasi per la prima volta rilevata esplicitamente in Tricomi [21].

⁽³⁾ Indicheremo con o e O i simboli di Landau; $v = o(t)$ significherà dunque che $\left|\frac{v}{t}\right|$ è infinitesimo e $v = O(t)$ che $\left|\frac{v}{t}\right|$ è limitato.

Si supponga che A sia un campo delimitato da una base inferiore $\Sigma^{(2)}$ posta sul piano $x_3 = 0$, da una base superiore $\Sigma^{(1)}$ posta sul piano $x_3 = t_0$ ($t_0 > 0$) e da una superficie laterale $\Sigma^{(3)}$ avente piano tangente non caratteristico, cioè non parallelo al piano (x_1, x_2) ; (per es. A potrebbe essere un cilindro retto di direttrice l'asse x_3); e si cerchi una soluzione di (6) la quale soddisfi anche alle condizioni

$$u = 0 \text{ su } \Sigma^{(2)} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial l} = h \text{ su } \Sigma^{(3)}$$

essendo l un asse assegnato per ogni ξ di $\Sigma^{(2)}$ e parallelo al piano (x_1, x_2) e h funzione pure data su $\Sigma^{(3)}$.

Se si cerca la soluzione nella classe dei cosiddetti « potenziali di semplice strato del calore »

$$u(x) = \int_{\Sigma^{(3)}} \varphi(y) s(x, y) d\sigma_y$$

dove $s(x, y)$ è anche qui la soluzione fondamentale di (6), cioè

$$(7) \quad s(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{per } x_3 \leq y_3 \\ \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{4(x_3 - y_3)}} & \text{per } x_3 > y_3 \end{cases}$$

si trovano (come si vedrà più esattamente nel n. 11), se φ è sufficientemente regolare, la formula limite analoga alla (3)

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \xi \text{ (su } \nu_\xi^+)} \frac{\partial u(x)}{\partial l_\xi} = -\frac{\cos(n_\xi, l_\xi)}{2 \cos^2(n_\xi, \nu_\xi)} \varphi(\xi) + \int_{\Sigma^{(3)}}^* \varphi(y) \frac{\partial s(\xi, y)}{\partial l_\xi} d\sigma_y$$

e l'equazione integrale analoga alla (5), dove ν_ξ è la « conormale » in ξ e l'integrale con asterisco è da intendersi come

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma^{(3)} - \Sigma_\varepsilon}^* \varphi(y) \frac{\partial s(\xi, y)}{\partial l_\xi} d\sigma_y$$

essendo Σ_ε la porzione di $\Sigma^{(3)}$, che si proietta sul piano tangente π_ξ a $\Sigma^{(3)}$ nel punto ξ , nella regione delimitata dalla curva $\mathcal{C}_\varepsilon$ intersezione di π_ξ con la superficie di livello della soluzione fondamentale: $s(\xi, y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} (\varepsilon > 0)$ ⁽⁴⁾ (si osservi che anche nella (4), Σ_ε ha lo stesso significato relativo alla soluzione fondamentale $\frac{1}{4\pi} \frac{1}{xy}$).

Il nucleo $\frac{\partial s(\xi, y)}{\partial l_\xi}$ non è sommabile e si tratta dunque anche ora di un integrale singolare; ma la singolarità di $\frac{\partial s(\xi, y)}{\partial l_\xi}$, che risulta essere $O\left\{\frac{(\xi_1 - y_1)^2 + (\xi_2 - y_2)^2}{(\xi_3 - y_3)^2} e^{-\frac{(\xi_1 - y_1)^2 + (\xi_2 - y_2)^2}{4(\xi_3 - y_3)}}\right\}$ è di tipo assai diverso da quella trovata nel primo esempio, e di conseguenza diverso risulta l'integrale principale relativo. Nel n. 11 torneremo più diffusamente su questo problema di derivata obliqua per equazioni paraboliche e sugli integrali principali connessi.

Per ora ci è sufficiente aver segnalato questi due esempi di problemi di derivata obliqua e le loro relazioni con la teoria degli integrali singolari e delle equazioni integrali singolari.

Scopo precipuo delle presenti lezioni è infatti *l'impostazione generale del problema di derivata obliqua* per equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico-parabolico e lo studio più specifico nello spazio a un numero qualunque di dimensioni del caso cosiddetto « regolare », con particolare riferimento alle equazioni totalmente ellittiche e a quelle paraboliche « del tipo del calore ».

Studieremo il problema per vie diverse, in particolare senza far uso della teoria degli integrali e delle equazioni integrali singolari, ma mettendone però in luce le reciproche relazioni, in modo da ottenere così anche risultati circa quest'ultima teoria.

n. 2 Impostazione del problema di derivata obliqua per l'equazione ellittico-parabolica del secondo ordine. Sia A un campo limitato

⁽⁴⁾ La curva $\mathcal{C}_\varepsilon$, se su π_ξ si introduce un opportuno sistema di assi (v_1, v_2) di origine ξ viene ad avere le equazioni parametriche:

$$\begin{cases} v_1 = 2\varepsilon \sin \theta \sqrt{\log \frac{1}{\sin^2 \theta}} \\ v_2 = -\varepsilon^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

e regolare dello spazio S_m a m dimensioni, tale che la sua frontiera Σ sia formata da un numero finito di porzioni di ipersuperficie regolari di classe C^1 ⁽⁵⁾, $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ aventi a comune due a due al più punti del loro bordo. Per ogni punto di Σ_i ($i = 1, \dots, r$) che non sia sul bordo di Σ_i esiste la normale n e noi la supporremo orientata sempre verso l'interno di A .

Si consideri l'operatore

$$(9) \quad E(u) \equiv \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h^{1,m} b_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x) u(x)$$

con i coefficienti $a_{hk}(x)$, $b_h(x)$ e $c(x)$ rispettivamente di classe $C^{(2)}(A + \Sigma)$, $C^{(1)}(A + \Sigma)$ e $C^{(0)}(A + \Sigma)$ e si supponga che esso sia in $A + \Sigma$ ellittico-parabolico, cioè che la forma quadratica $\sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}(x) \lambda_h \lambda_k$ nelle variabili reali $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sia definita o semi-definita (positiva) per ogni x di $A + \Sigma$.

Vediamo come si possa impostare il problema di derivata obliqua per l'equazione $E(u) = f$ seguendo le idee di un recente lavoro di G. FICHERA [6c].

Ricordiamo anzitutto che dicesi *iperpiano caratteristico* rispetto a $E(u)$ nel punto x un iperpiano tale che i coseni direttori della sua normale N verificano l'equazione

$$\sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}(x) \cos(x_h, N) \cos(x_k, N) = 0$$

Indichiamo allora con Σ'_i ($i = 1, \dots, r$) l'insieme dei punti di Σ_i nei quali l'iperpiano tangente è caratteristico rispetto a $E(u)$; e introduciamo poi la funzione

$$b(x) = \sum_h^{1,m} \left[b_h(x) - \sum_k^{1,m} \frac{\partial a_{hk}(x)}{\partial x_k} \right] \cos(x_h, n)$$

⁽⁵⁾ Nel presente lavoro diremo che una funzione $u(x)$ definita in un insieme I appartiene rispettivamente alle classi $\mathcal{L}^{(p)}(I)$ ($p > 0$), $C^{(0)}(I)$, $C^{0,h}(I)$, $C^{(r)}(I)$ (r intero positivo), $C^{r,h}(I)$ se è rispettivamente di potenza p -esima sommabile in I , continua in I , hölderiana in I , continua con le derivate fino all'ordine r in I , hölderiana con le derivate fino all'ordine r in I . Una porzione di ipersuperficie regolare si dirà poi di classe C^r se per ogni suo punto esiste un intorno rappresentabile parametricamente con funzioni di classe $C^{(r)}(I)$.

la quale è definita in tutti i punti di ogni Σ_i ($i = 1, \dots, r$) che non siano sul bordo di Σ_i e può per continuità prolungarsi in tutto Σ_i .

Detto infine $\Sigma_i^{(1)}$ l'insieme dei punti di Σ'_i in cui risulta $b(x) \geq 0$ poniamo

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1)} &= \Sigma_1^{(1)} + \dots + \Sigma_r^{(1)} \\ \Sigma^{(2)} &= (\Sigma_1' + \dots + \Sigma_r') - \Sigma^{(1)} \\ \Sigma^{(3)} &= \Sigma - (\Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)})\end{aligned}$$

onde $\Sigma^{(1)}$, $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$ esauriscono Σ e non hanno a due a due punti comuni.

Il problema di derivata obliqua per l'equazione

$$(10) \quad E(u) = f$$

è allora il seguente:

Supposto $\Sigma^{(3)}$ non vuoto e fissati la funzione α su $\Sigma^{(3)}$ e l'asse l per ogni punto di $\Sigma^{(3)}$, determinare una soluzione u della (10) che verifichi le condizioni al contorno:

$$(11) \quad u = \mu_2 \quad \text{su} \quad \Sigma^{(2)}$$

$$(12) \quad \frac{\partial u}{\partial l} + \alpha u = h \quad \text{su} \quad \Sigma^{(3)}$$

dove μ_2 , h e f sono funzioni assegnate rispettivamente su $\Sigma^{(2)}$, $\Sigma^{(3)}$ e A . Se l'asse l è in ogni punto penetrante in A diremo che il problema è « regolare ».

Naturalmente occorre, per completare l'enunciazione del problema e stabilire se esso sia « ben posto » nel senso di Hadamard, precisare in quale classe di funzioni va cercata la soluzione e in che senso essa verifica le condizioni (11) e (12). Ma ciò dipenderà volta per volta dall'operatore e dalle ipotesi fatte sui dati del problema e non si potrà pretendere una teoria abbastanza generale del problema se non limitandosi in un primo momento alla ricerca di una soluzione « debole » dello stesso.

È comunque interessante osservare anzitutto come nella formulazione del problema rientrino i problemi di derivata obliqua fino ad ora considerati della letteratura e precisamente i due casi delle

equazioni *totalmente ellittiche* o, più semplicemente, *ellittiche* (la forma $\sum_{h,k}^{1,m} a_{hk}(x) \lambda_h \lambda_k$ definita positiva per ogni x di $A + \Sigma$) e delle equazioni *paraboliche* « *del tipo del calore* » (cioè della forma

$$E(u) = \sum_{h,k}^{1,m-1} a_{hk}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h^{1,m-1} b_h(x) \frac{\partial u}{\partial x_h} + c(x) u(x) - \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

dove la parte dell'operatore che non contiene derivate rispetto ad x_m è totalmente ellittica rispetto a $(x_1, \dots, x_{m-1})$ per ogni x_m).

Nel primo caso si ha $\Sigma^{(3)} = \Sigma$; nel secondo caso $\Sigma^{(1)}$ è costituito dai punti di Σ in cui la normale n è parallela e di verso opposto all'asse x_m , mentre $\Sigma^{(2)}$ è formato dai punti nei quali la normale n è parallela ed equiversa a x_m .

In particolare rientrano nel nostro problema i due esempi del n. 1.

Anche nei due casi predetti il problema è però fino ad ora ben lungi dall'essere compiutamente trattato. Per l'equazione ellittica il problema generale è stato studiato a fondo nei lavori di A. LIENARD, G. GIRAUD, e della scuola russa di N. J. MUSHELIVILI solo nel caso $m = 2$ (si veda il corso parallelo svolto dal prof. FICHERA) ma nel caso $m > 2$ l'unico problema trattato finora è quello « regolare » (si vedano più avanti i nn. 3-8). Ancor meno si conosce finora per l'equazione del tipo del calore (v. n. 11); una trattazione esauriente e nel solo caso « regolare », è contenuta in un lavoro di M. PAGNI [18] del quale diremo nel n. 11.

Nei numeri seguenti noi cercheremo di dare una trattazione completa del problema « regolare » in m variabili; perverremo dapprima ad alcuni nuovi risultati nel caso dell'equazione generale ellittico-parabolica ed esporremo poi nel caso ellittico e in quello parabolico « del tipo del calore » i risultati più precisi finora noti.

n. 3 *Il problema « regolare » per l'equazione ellittico-parabolica: formula di Green e primi teoremi di unicità.* Precisiamo anzitutto ulteriormente le ipotesi sui dati del problema. Indicheremo con $\overline{\Sigma^{(i)}}$ ($i = 1, 2, 3$) l'insieme di $\Sigma^{(i)}$ e dei suoi punti di accumulazione. Supporremo senz'altro d'ora innanzi per semplicità che i $\Sigma^{(i)}$ siano costituiti da un'unica porzione di superficie regolare di classe $C^{(2)}$. Supporremo inoltre che l'asse l sia definito in tutti i punti ξ di $\overline{\Sigma^{(3)}}$, abbia ivi i coseni direttori di classe $C^{(1)}$ ($\Sigma^{(3)}$) e sia sempre pene-

trante in $A + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}$ ⁽⁶⁾. Infine faremo su α l'ipotesi che sia definita e continua su $\Sigma^{(3)}$.

Indichiamo con $C(E)$ la classe delle funzioni u definite e continue in $A + \Sigma$ insieme alla derivata $\frac{\partial u}{\partial x_h}$ se b_h non è identicamente nullo in $A + \Sigma$ e insieme alle derivate $\frac{\partial u}{\partial x_h}, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}$ se a_{hk} non è identicamente nullo in $A + \Sigma$.

È noto (v. ad es. M. Picone [19]) che per ogni coppia di funzioni u e v di $C(E)$ sussiste la seguente *formula di Green*

$$(13) \quad \int_A [u E^*(v) - v E(u)] dx = \int_{\Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}} b u v d\sigma + \\ + \int_{\Sigma^{(3)}} \left\{ a^{(l)} v \frac{\partial u}{\partial l} - a^{(\lambda)} u \frac{\partial v}{\partial \lambda} + b^{(l)} u v \right\} \lambda d\sigma$$

col seguente significato dei simboli:

a) $E^*(v)$ è l'operatore aggiunto di $E(u)$:

$$E^*(v) = \sum_{h,k}^{1,m} \frac{\partial^2 (a_{hk} v)}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_h^{1,m} \frac{\partial (b_h v)}{\partial x_h} + c v$$

b) $a^{(l)} = \frac{1}{\cos(l, n)} \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \cos(x_h, n) \cos(x_k, n)$ (si osservi che $a^{(l)} \geq 0$)

c) λ è l'asse « coriflesso » di l univocamente determinato insieme ad $a^{(\lambda)}$, in funzione di l , dalla posizione

$$a^{(\lambda)} \cos(x_h, \lambda) = 2 \sum_k^{1,m} a_{hk} \cos(x_k, n) - a^{(l)} \cos(x_h, l)$$

d) $b^{(l)} = b - \beta^{(l)}$ essendo $\beta^{(l)}$ una opportuna funzione determinabile in funzione di l e indipendente da u e v (v. con precisione ad es. [19, pag. 741 e seg.]) di cui qui interessa rilevare solo che è funzione continua su $\Sigma^{(3)}$.

Ci proponiamo ora di stabilire un *teorema di unicità* in $C(E)$ per il problema « regolare » come è stato precisato nel presente nu-

⁽⁶⁾ Ciò significa che i punti di l sufficientemente vicini a ξ nel verso positivo di l appartengono a $A + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}$.

mero. Premettiamo anzitutto il seguente teorema, già di per sè notevole perchè estende alle equazioni ellittico-paraboliche un risultato ben noto nel caso ellittico e nel caso parabolico del tipo del calore; per risultati analoghi e per il procedimento che adopereremo si veda la memoria [6c] di G. FICHERA.

TEOREMA I: *Se è $c(x) < 0$ in $A + \Sigma$, per ogni soluzione della $E(u) = 0$ appartenente alla classe $C(E)$ risulta*

$$(14) \quad \max_{A+\Sigma} |u(x)| \equiv \max_{\Sigma^{(2)}+\Sigma^{(3)}} |u(x)|$$

Sia p un intero positivo pari e v una fissata funzione della classe $C(E)$ (o più in particolare di classe $C^{(2)}(A + \Sigma)$) tale che:

$$(15) \quad v = 0 \text{ su } \Sigma^{(3)}, \quad v < 0 \text{ in } A + \Sigma^{(3)} + \Sigma^{(2)}$$

La (13), scritta relativamente alla coppia di funzioni u^p e v , diviene:

$$\begin{aligned} \int_A u^p \{E_0^*(v) + p c v\} dx &= \int_A p(p-1) v u^{p-2} \Gamma(u) dx + \\ &+ \int_{\Sigma^{(1)}} b v u^p d\sigma + \int_{\Sigma^{(2)}} b v u^p d\sigma - \int_{\Sigma^{(3)}} a^{(\lambda)} u^p \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\sigma \end{aligned}$$

dove

$$E_0^*(v) \equiv \sum_{h,k}^{1,m} \frac{\partial^2 (a_{hk} v)}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_h^{1,m} \frac{\partial (b_h v)}{\partial x_h}$$

e

$$\Gamma(u) = \sum_{h,k}^{1,m} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

Per le ipotesi fatte e per le (15) si ha allora

$$(16) \quad \int_A u^p [E_0^*(v) + p c v] dx \leq \int_{\Sigma^{(2)}} b v u^p d\sigma - \int_{\Sigma^{(3)}} a^{(\lambda)} u^p \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\sigma$$

Indichiamo con I_e l'insieme dei punti di $A + \Sigma$ aventi da $\Sigma^{(3)}$ distanza $\leq \varrho$. La (16) può scriversi:

$$\begin{aligned} \int_{A-I_e} u^p [E_0^*(v) - p c v] dx &\leq - \int_{I_e} u^p E_0^*(v) dx - \int_{I_e} p u^p c v dx + \\ &+ \int_{\Sigma^{(2)}} b v u^p d\sigma - \int_{\Sigma^{(3)}} b a^{(\lambda)} u^p \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\sigma \leq - \int_{I_e} u^p E_0^*(v) dx + \\ &+ \int_{\Sigma^{(2)}} b v u^p d\sigma - \int_{\Sigma^{(3)}} a^{(\lambda)} u^p \frac{\partial v}{\partial \lambda} d\sigma \end{aligned}$$

Per la continuità delle funzioni $E_0^*(v)$, $b v$, $a^{(\lambda)} \frac{\partial v}{\partial \lambda}$ nei rispettivi insiemi di definizione è possibile determinare una costante K indipendente da u , p e ϱ tale che:

$$\int_{A-I_\varrho} u^p [E_0^*(v) + p c v] dx \leq K \left\{ \max_{I_\varrho} u^p + \max_{\Sigma^{(2)}} u^p + \max_{\Sigma^{(3)}} u^p \right\}$$

$$\leq 3 K \max_{I_\varrho + \Sigma^{(2)}} u^p$$

Fissato ϱ è possibile determinare un p_ϱ tale che per ogni $p > p_\varrho$ riesca, in $A - I_\varrho$, $E_0^*(v) + p c v \geq 1$ e quindi:

$$\int_{A-I_\varrho} u^p dx \leq 3 K \max_{I_\varrho + \Sigma^{(2)}} u^p$$

Elevando ad $\frac{1}{p}$, passando al limite $p \rightarrow \infty$, si ottiene, per un noto teorema di RIESZ,

$$\max_{A-I_\varrho} |u| \leq \max_{I_\varrho + \Sigma^{(2)}} |u|$$

e quindi, al limite per $\varrho \rightarrow 0$, si ha:

$$\max_{A+\Sigma} |u| \leq \max_{\Sigma^{(2)} + \Sigma^{(3)}} |u|$$

da cui la (14).

Si può di qui facilmente ricavare un teorema di unicità per il problema di derivata obliqua « regolare »:

TEOREMA II: Se $c(x) < 0$ in $A + \Sigma$ e $\alpha(x) < 0$ in $\overline{\Sigma^{(3)}}$, ogni funzione $u \in C(E)$ soddisfacente alle condizioni: $E(u) = 0$ in A , $u = 0$ su $\Sigma^{(2)}$, $\frac{\partial u}{\partial l} + \alpha u = 0$ su $\Sigma^{(3)}$, è identicamente nulla in $A + \Sigma$.

Infatti se u non fosse $\equiv 0$ in $A + \Sigma$ per il teorema I esisterebbe un punto x_0 di $\overline{\Sigma^{(3)}}$ tale che

$$\max_{A+\Sigma} |u(x)| = |u(x_0)| \neq 0$$

Se fosse $u(x_0) < 0$ si avrebbe

$$\min_{A+\Sigma} u(x) = u(x_0) \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial u}{\partial l} \right]_{x=x_0} = -\alpha(x_0) u(x_0) < 0;$$

se fosse $u(x_0) > 0$ si avrebbe invece

$$\max_{A+\Sigma} u(x) = u(x_0) \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial u}{\partial l} \right]_{x=x_0} = -\alpha(x_0) u(x_0) > 0.$$

In ogni caso, essendo l penetrante in $A + \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}$, si avrebbe un assurdo.

Se l'equazione è ellittica o parabolica «del tipo del calore» il teorema di unicità può essere generalizzato; i risultati in proposito sono assai noti e ci limiteremo qui a enunciarli.

TEOREMA III (si veda ad esempio [16a, pag. 8]). *Se $E(u)$ è ellittico, $c(x) \leq 0$ in $A + \Sigma$ e $\alpha(x) \leq 0$ su Σ (si ricordi che è ora $\Sigma^{(3)} \equiv \Sigma$) senza che siano entrambe identicamente nulle, ogni funzione u di $C(E)$, soddisfacente alle $E(u) = 0$ in A , $\frac{\partial u}{\partial l} + \alpha u = 0$ su Σ , è identicamente nulla in $A + \Sigma$; se invece risulta $c(x) \equiv 0$ in $A + \Sigma$ e $\alpha(x) \equiv 0$ su Σ allora $u(x)$ è costante in $A + \Sigma$.*

Si osservi anche che il teorema III vale in una classe $\mathcal{C}$ più vasta di $C(E)$: precisamente basta che u sia di classe $C(E)$ in ogni dominio interno di A , sia continua in $A + \Sigma$ e abbia derivata $\frac{\partial u}{\partial l}$ in ogni punto di Σ .

TEOREMA IV. (si veda ad esempio [19, pag. 715]). *Se $E(u)$ è parabolico «del tipo del calore» e $\alpha(x) \leq 0$ su $\Sigma^{(3)}$ ogni funzione u di $C(E)$, soddisfacente alle $E(u) = 0$ in A , $u = 0$ su $\Sigma^{(2)}$, $\frac{\partial u}{\partial l} + \alpha u = 0$ su $\Sigma^{(3)}$ è identicamente nulla in $A + \Sigma$.*

Anche questo teorema vale in ipotesi più generali per u , analoghe a quelle sopra viste per il teorema III.

Problema aperto e interessante è la generalizzazione del teorema II in modo da ottenere un risultato che comprenda fra l'altro i teoremi III e IV o in ogni caso perfezioni il teorema II; e già sarebbe interessante fermarsi a considerare classi di operatori parabolici che non siano «del tipo del calore».

n. 4 Il problema « regolare » per l'equazione ellittico-parabolica dal punto di vista delle soluzioni « deboli ».

Manteniamo in questo numero le ipotesi fatte nei nn. 2 e 3 e poniamoci la questione dell'esistenza di una soluzione « debole » del problema. Torna assai semplice studiare tale questione secondo le idee di recente esposte da G. FICHERA nella memoria già citata [6c] e anche in lavori precedenti [6b].

Supponiamo anzitutto che i dati f , μ_2 e h siano rispettivamente di classe $\mathcal{L}^{(2)}(A)$, $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(2)})$ e $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(3)})$.

Poniamo poi la seguente

DEFINIZIONE: Una funzione $u(x) \in \mathcal{L}^2(A)$ si dirà soluzione « debole » del problema « regolare »

$$(17) \quad E(u) = f \quad \text{in } A;$$

$$(18) \quad u = \mu_2 \quad \text{su } \Sigma^{(2)}; \quad \frac{\partial u}{\partial l} + \alpha u = h \quad \text{su } \Sigma^{(3)}$$

se esistono due funzioni $\mu_1 \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(1)})$ e $\mu_3 \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(3)})$, tali che risulti

$$(19) \quad \int_A \left[u E^*(v) dx - \int_{\Sigma^{(1)}} b v \mu_1 d\sigma + \int_{\Sigma^{(3)}} \mu_3 \left\{ a^{(2)} \frac{\partial v}{\partial l} - [b^{(1)} - \alpha a^{(1)}] v \right\} d\sigma = \right. \\ \left. = \int_A v f dx + \int_{\Sigma^{(2)}} b v \mu_2 d\sigma + \int_{\Sigma^{(3)}} a^{(1)} h v d\sigma \right]$$

per ogni $v \in C(E)$.

Ad un teorema di esistenza della soluzione « debole » si può giungere applicando un principio generale di analisi funzionale dovuto a G. FICHERA [6b], che è qui opportuno richiamare brevemente.

Sia V una varietà lineare rispetto al corpo reale (o complesso) e siano definite in V due trasformazioni lineari $M_1(v)$ ed $M_2(v)$ aventi codominio rispettivamente in due spazi di Banach $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ reali (o complessi).

Sia Φ un assegnato funzionale lineare e continuo definito in $\mathcal{B}_1$ e consideriamo l'equazione funzionale

$$(20) \quad \Phi[M_1(v)] = \Psi[M_2(v)]$$

nell'incognita Ψ , funzionale lineare e continuo definito in $\mathcal{B}_2$.

Si ha il seguente:

TEOREMA V: *Condizione necessaria e sufficiente affinché, assegnato comunque Φ esista una soluzione Ψ della (20) è che esista una costante k tale che*

$$(21) \quad \|M_1(v)\| \leq k \|M_2(v)\| \text{ per ogni } v \in V.$$

Soddisfatta la (21) esiste una soluzione Ψ tale che

$$\|\Psi\| \leq k \|\Phi\|$$

e ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale ortogonale al codominio della trasformazione $M_2(v)$.

Indichiamo con V la varietà delle funzioni $v \in C(E)$, con $\mathcal{B}_1$ lo spazio hilbertiano completo dei vettori a tre componenti (f, μ_2, h) , dove $f \in \mathcal{L}^{(2)}(A)$, $\mu_2 \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(2)})$, $h \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(3)})$, con $\mathcal{B}_2$ lo spazio hilbertiano completo dei vettori a tre componenti (u, μ_1, μ_3) , dove $u \in \mathcal{L}^{(2)}(A)$, $\mu_1 \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(1)})$, $\mu_3 \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(3)})$.

Siano $M_1(v)$ e $M_2(v)$ le trasformazioni

$$M_1(v) \equiv [v, b v, a^{(l)} v].$$

$$M_2(v) \equiv \left[E^*(v), -b v, a^{(l)} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - (b^{(l)} - \alpha a^{(l)}) v \right].$$

In virtù del teorema V l'esistenza di una soluzione «debole» del problema (17) - (18) per ogni terna di dati (f, μ_2, h) sarà allora provata qualora valga la seguente formula di maggiorazione per ogni $v \in C(E)$:

$$(22) \quad \left(\int_A v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Sigma^{(2)}} (b v)^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Sigma^{(3)}} (a^{(l)} v)^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq k \left\{ \left(\int_A [E^*(v)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Sigma^{(1)}} (b v)^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Sigma^{(3)}} \left[a^{(l)} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - (b^{(l)} - \alpha a^{(l)}) v \right]^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

con k costante indipendente da v .

Ebbene, posto $c^*(x) = c(x) - \sum_h^{1,m} \frac{\partial b_h(x)}{\partial x_h} + \sum_{h,k}^{1,m} \frac{\partial^2 a_{hk}(x)}{\partial x_h \partial x_k}$ si può facilmente dimostrare il

TEOREMA VI: *Se esiste una funzione $w \in C(E)$ tale che*

$$(23) \quad E(w) + c^* w > 0 \quad \text{in } A + \Sigma$$

$$(23') \quad w \leq 0 \quad \text{in } A + \Sigma$$

$$(23'') \quad w < -|b| \quad \text{su } \overline{\Sigma^{(1)}} + \overline{\Sigma^{(2)}}$$

$$(23''') \quad a^{(l)} \frac{\partial w}{\partial l} - (b^{(l)} - \alpha a^{(l)}) w > 0 \quad \text{su } \overline{\Sigma^{(3)}}$$

allora vale la (22) per ogni v di $C(E)$ e quindi esiste almeno una soluzione «debole» di (17) - (18), qualunque siano $f \in \mathcal{L}^{(2)}(A)$, $\mu_2 \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(2)})$, $h \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(3)})$.

La validità della (22) è, nelle ipotesi fatte su w , una facile conseguenza della formula di Green (13) del n. 2 scritta ponendo w al posto di u e v^2 al posto di v .

È bene mettere in evidenza il

COROLLARIO: *Se $a^{(l)} > 0$ su $\overline{\Sigma^{(3)}}$, $\alpha \leq 0$ su $\overline{\Sigma^{(3)}}$ e $c(x) < -M$ in $A + \Sigma$ (essendo M una costante positiva opportunamente grande) allora la funzione w soddisfacente alle (23) ... (23''') esiste certamente e quindi esiste la soluzione «debole» per ogni terna (f, μ_2, h) .*

Si prenda infatti, come è ora possibile essendo $a^{(l)} > 0$ su $\overline{\Sigma^{(3)}}$, una funzione $w \in C(E)$ e tale che

$$w < 0 \text{ in } A + \Sigma, \quad w < -|b| \text{ su } \overline{\Sigma^{(1)}} + \overline{\Sigma^{(2)}}$$

$$a^{(l)} \frac{\partial w}{\partial l} - b^{(l)} w > 0 \text{ su } \overline{\Sigma^{(3)}}$$

La (23''') è verificata di conseguenza essendo $\alpha \leq 0$; e se $c < -M$, con M sufficientemente grande, è ovvio che w verifica anche la (23).

Si osservi a proposito dell'ipotesi $a^{(l)} > 0$ su $\overline{\Sigma^{(3)}}$ che essa in sostanza si riduce a supporre $a^{(l)} > 0$ sul bordo di $\Sigma^{(3)}$, perchè negli altri punti di $\Sigma^{(3)}$ $a^{(l)}$ è già in ogni caso positivo, per il modo come è definito (v. n. 3).

Si può ora porre la questione dell'unicità della soluzione «debole» così trovata; il problema è aperto, e in particolare è aperto il problema di sapere se nelle ipotesi del teorema II del n. 3, in cui c'è l'unicità della soluzione nella classe $C(E)$, c'è anche l'uni-

cità della soluzione «debole». Possiamo solo osservare che dal teorema V di Fichera segue che l'unicità della soluzione «debole» equivale ad un teorema di completezza hilbertiana e precisamente:

TEOREMA VII. *Condizione necessaria e sufficiente per l'unicità della soluzione «debole» di (17)-(18) è che i vettori di componenti $E^*(v)$ in A , $a^{(l)} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - (b^{(l)} - \alpha a^{(l)})v$ su $\Sigma^{(3)}$, b su $\Sigma^{(1)}$ costituiscano una base al variare di v in $C(E)$ per lo spazio di Hilbert dei vettori di componenti f_1 di classe $\mathcal{L}^{(2)}(A)$, f_2 di classe $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(2)})$, e bf_3 di classe $\mathcal{L}^{(2)}(\Sigma^{(1)})$.*

Ritorniamo in seguito nel caso totalmente ellittico e parabolico del tipo del calore sul problema dell'unicità.

Altri problemi interessanti e tuttora aperti relativi alle soluzioni «deboli» sono i seguenti.

L'uso del principio esistenziale del FICHERA (teorema V) permette di studiare il problema (17)-(18) quando esso sia risolubile per *ogni* terna (f, μ_2, h) dei dati e dunque in ipotesi *presumibilmente* di unicità. In generale però non ci si troverà in queste condizioni, ma è *presumibile* che debba valere un teorema dell'alternativa. Come è d'abitudine in questioni di questo tipo si può allora tentare, una volta risolto il problema nei casi di unicità, di tradurre il caso generale in un'equazione funzionale del tipo di Riesz. Ma la cosa potrà presentare difficoltà. Una nuova via utile da seguire per il conseguimento del teorema dell'alternativa può essere anche l'uso di un principio esistenziale di S. FAEDO [5], estensione del teorema V sopradetto; ma per esso e per la sua applicazione al problema (17)-(18) si veda la conferenza di S. Faedo unita al presente corso.

Prima di chiudere questo numero sullo studio esistenziale del problema (17)-(18) dal punto di vista delle soluzioni deboli è necessario segnalare due recenti interessanti lavori di J. L. LIONS [12a,b] sull'esistenza di una soluzione debole diversa da quella da noi introdotta; in essi il problema regolare è studiato addirittura per equazioni d'ordine qualunque, trattasi però dei soli casi delle equazioni ellittiche e di una classe particolare di quelle del tipo del calore e lo studio delle condizioni al contorno è fatto in modo meno preciso di quanto noi faremo nei seguenti n. 5. e 8 per la soluzione da noi considerata (*).

(*) Durante la correzione delle bozze sono venute a conoscenza di un nuovo lavoro di J. L. LIONS, che uscirà sui Reports dell'University of Kansas, Lawrence,

n. 5. *Il caso dell'equazione ellittica: «regolarizzazione» della soluzione debole, il teorema di inversione della formula di Green.*

Nel n. precedente abbiamo considerato l'esistenza di una soluzione «debole» del problema. Si pone ora la questione di vedere se essa è anche soluzione «forte», cioè se possiede ulteriori proprietà di regolarità, che dipenderanno ovviamente dal tipo di operatore differenziale considerato. Il problema è quanto mai complesso in generale. Ci limiteremo perciò a studiare il caso ellittico e quello parabolico del tipo del calore.

Iniziamo dal caso ellittico; in questo caso $\Sigma^{(3)}$ coincide con tutto Σ , che supporremo dunque per semplicità essere un'unica superficie regolare di classe C^2 . Manteniamo anche le altre ipotesi fatte nei nn. 3 e 4 sui coefficienti di $E(u)$ e sull'asse l e su α .

Il problema regolare diventa ora

$$(17) \quad E(u) = f \text{ in } A$$

$$(18') \quad \frac{\partial u}{\partial l} + \alpha u = h \text{ su } \Sigma$$

Osserviamo che ora risulta $a^{(l)} > 0$ in tutto Σ . Il corollario del teorema VI ci assicura dunque la validità del

TEOREMA VIII. *Se $E(u)$ è ellittico in $A + \Sigma$, $\alpha \leq 0$ su Σ e $c(x) < -M$ su $A + \Sigma$ (con M sufficientemente grande) esiste una soluzione debole del problema «regolare» e precisamente: assegnate comunque due funzioni $f \in \mathcal{L}^{(2)}(A)$ e $h \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ esistono in corrispondenza due funzioni $u \in \mathcal{L}^{(2)}(A)$ e $\mu \in \mathcal{L}^{(2)}(\Sigma)$ tali che risulti*

$$(24) \quad \int_{\Sigma} a^{(l)} h v d\sigma + \int_A f v dx = \int_{\Sigma} \mu \left[a^{(l)} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \right. \\ \left. - (b^{(l)} - \alpha a^{(l)}) v \right] d\sigma + \int_A u E^*(v) dx$$

per ogni $v \in C(E)$.

La «regolarizzazione» di tale soluzione «debole» nell'interno di A , cioè lo studio delle proprietà differenziali di u nell'interno di A è un fatto ormai ben noto, trattandosi di un'equazione ellittica; esso non è legato alle condizioni al contorno ed è comune agli altri problemi al contorno (problema di Dirichlet e di Neumann o misto). Non ci soffermeremo perciò su di esso rimandando per

june 1957, nel quale il problema regolare per le equazioni paraboliche del tipo del calore in domini cilindrici è studiato dal punto di vista esistenziale mediante un procedimento, introdotto per lo studio dei problemi di propagazione per la prima volta da S. FAEDO.

notizie più precise e indicazioni a [13d]. Ci limiteremo solo a osservare che, usando ad esempio i ragionamenti svolti da L. Amerio in [1], si può dimostrare che se u è soluzione «debole» del problema, essa verifica anche le seguenti *formule di Green*:

$$\begin{aligned} (25) \quad u(x) &= \left\{ - \int_A f(y) s(x, y) dy + \int_{\Sigma} \mu(y) \left\{ a^{(2)}(y) \frac{\partial s(x, y)}{\partial \lambda_y} - \right. \right. \\ (25') \quad 0 &= \left. - [b^{(l)}(y) - \alpha(y) a^{(l)}(y)] s(x, y) \right\} d\sigma_y - \int_{\Sigma} a^{(l)}(y) h(y) s(x, y) d\sigma_y \end{aligned}$$

rispettivamente per x quasi-ovunque in A e per x esterno ad A , dove $s(x, y)$ è una soluzione fondamentale dell'equazione $E(u)=0$; dunque in particolare se $f \in \mathcal{L}^{(2)}(A)$, u ha derivate seconde di quadrato sommabile in ogni dominio interno ad A e verifica quasi ovunque in A l'equazione $E(u)=f$, se f è inoltre localmente hölderiana in A , u ha derivate seconde localmente hölderiane in A e verifica la $E(u)=f$ in ogni punto di A .

Questa osservazione è assai utile anche per l'ulteriore problema della «regolarizzazione» della soluzione «debole»: la «regolarizzazione alla frontiera», cioè l'interpretazione della condizione al contorno (18'). Poichè u verifica le (25)-(25') si può infatti utilizzare il cosiddetto *teorema di inversione delle formule di Green* sul quale ora ci soffermeremo.

TEOREMA IX. *Se f, μ, h, u sono funzioni rispettivamente di classe $\mathcal{L}^{(2)}(A)$, $\mathcal{L}^{(1)}(\Sigma)$, $\mathcal{L}^{(1)}(\Sigma)$, $\mathcal{L}^{(1)}(A)$ e verificano la (25) per quasi-tutti gli x di A e la (25') per tutti gli x esterni ad A , allora si ha, per quasi tutti i punti ξ di Σ :*

$$\lim_{x \rightarrow \xi \text{ (su } \nu_{\xi}^+)} u(x) = \mu(\xi); \quad \lim_{x \rightarrow \xi \text{ (su } \nu_{\xi}^-)} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial l_{\xi}} + \alpha(\xi) u(x) \right] = h(\xi)$$

Questo teorema è dovuto a L. AMERIO [1] nel caso che $l \equiv \nu$ su Σ . Per il caso $l \neq \nu$ si veda [13b] e [13c]; la dimostrazione data in [13b] ricorre alla teoria degli integrali e delle equazioni integrali singolari, teoria che può in realtà evitarsi, con dimostrazione assai più semplice, come è fatto in [13c] e come ora vedremo; un teorema analogo, relativo al sistema all'elasticità, trovasi già in un lavoro di G. FICHERA [6d].

Il teorema IX segue immediatamente dal preventivo studio di certe formule limiti dei potenziali generalizzati di dominio,

di semplice strato e di doppio strato obliquo :

$$w_1(x) = \int_A \delta_1(y) s(x, y) dy,$$

$$w_2(x) = \int_{\Sigma} \delta_2(y) s(x, y) d\sigma_y,$$

$$w_3(x) = \int_{\Sigma} \delta_3(y) \frac{\partial s(x, y)}{\partial \lambda_y} d\sigma_y;$$

e precisamente: per quasi-tutti gli ξ di Σ si ha

$$(26) \quad \lim [w_1(x') - w_1(x)] = 0; \quad (26') \quad \lim \left[\frac{\partial w_1(x')}{\partial l_{\xi}} - \frac{\partial w_1(x)}{\partial l_{\xi}} \right] = 0;$$

$$(27) \quad \lim [w_2(x') - w_2(x)] = 0; \quad (27') \quad \lim \left[\frac{\partial w_2(x')}{\partial l_{\xi}} - \frac{\partial w_2(x)}{\partial l_{\xi}} \right] = \frac{\delta_2(\xi)}{a^{(l)}(\xi)};$$

$$(28) \quad \lim [w_3(x') - w_3(x)] = -\frac{\delta_3(\xi)}{a^{(\lambda)}(\xi)};$$

$$(28') \quad \lim \left[\frac{\partial w_3(x')}{\partial l_{\xi}} - \frac{\partial w_3(x)}{\partial l_{\xi}} \right] = \frac{b^{(l)}(\xi) \delta_3(\xi)}{a^{(l)}(\xi) a^{(\lambda)}(\xi)}$$

dove $x \rightarrow \xi$ su ν_{ξ}^+ e x' è il simmetrico di x rispetto a ξ su ν_{ξ} .

Queste formule sono ben note nel caso $l = \nu$ (v. ad es. l'esposizione contenuta nella monografia [16a] di C. MIRANDA, cui rinvio senz'altro per tutte quelle proprietà di teoria del potenziale ormai note, che avremo bisogno di ricordare qui e nel seguito).

Nel caso $l \neq \nu$, rimanendo ovviamente immutate le (26), (26') (27), occorre dimostrare le (27'), (28), (28'); esse si possono dimostrare direttamente con artifici e ragionamenti del tutto analoghi a quelli che si usano nel caso $l = \nu$, opportunamente completati. (Si veda ad es. per la (28') [14]).

Ci limiteremo qui per semplicità a darne la dimostrazione nel caso che sia $E(u) \equiv \Delta_2 u$ e $m = 3$, usando però di un diverso artificio, che ci sarà utile anche in altra questione. Le dimostrazioni si possono ripetere anche nel caso di $E(u)$.