CIME Summer Schools

26

E. Vesentini (Ed.)

Topologia differenziale

Urbino, Italy 1962

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

E. Vesentini (Ed.)

Topologia differenziale

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Urbino (Pesaro), Italy,
July 2-12, 1962

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10987-4 e-ISBN: 978-3-642-10988-1
DOI:10.1007/978-3-642-10988-1
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st Ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma, 1962
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Urbino, Italy, July 2-12, 1962

TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

J. CERF

INVARIANTS DES PAIRES D'ESPACES.

APPLICATIONS A' LA TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE.

Roma - Istituto Matematico dell'Università

INVARIANTS DES PAIRES D'ESPACES

APPLICATIONS A LA TOPOLOGIE DIFFERENTIELLE.

J. Cerf (Nancy)

<u>Introduction</u>. Soit V une variété compacte de classe C^{∞} ; le groupe de tous les difféomorphismes de V est muni naturellement de deux topologies: la topologie C^{∞}, ou topologie de la convergence uniforme des dérivées de tout ordre $\geqslant 0$ (muni de cette topologie, on note ce groupe G); et la topologie C^{0}, ou topologie de la convergence uniforme (muni de cette topologie, qui est <u>moins fine</u> que la précédente, on note ce groupe G'). Lorsque G a un bord, le groupe qu'on considère est celui des difféomorphismes qui sont tangents d'ordre infini à l'application identique le long du bord.

Prenons l'exemple $V = D^{n}$ (disque fermé de dimension n). La classique rétraction d'Alexander montre que G' est contractile; donc $\pi_i(G') = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. Par contre, on sait depuis Milnor qu'en général $\pi_0(G)$ n'est pas nul; toutefois la rétraction d'Alexander montre que tout i-lacet de G est homotope à un i-lacet <u>arbitrairement petit au sens de G'</u>; dans ce cas les groupes λ_i ("groupes d'homotopie locaux"), qu'on définira, sont canoniquement isomorphes aux groupes $\pi_i(G)$. Ceci est dû évidemment au fait que D^{n} est contractile; en général, on obtient une suite exacte reliant les groupes λ_i, les groupes $\pi_i(G)$, et certains groupes μ_i qu'on définit: dans certains cas, ces groupes μ_i s'identifient aux groupes $\pi_i(G')$.

Dans une première partie (n.$^{\text{s}}$ 1, 2 et 3), on fait une étude, d'un caractère général, des groupes λ_i et μ_i; on établit notamment le théorème d'isomorphisme entre les groupes μ_i et les groupes d'homotopie faibles pour les espaces "presque localement connexes en toute dimension".

Dans une second partie (n. 4), on applique ces résultats à certains espaces de difféomorphismes; on cherche d'une part à obtenir des renseignements sur leurs groupes μ_i, et d'autre part à montrer que ces espaces sont "presque localement connexes", de sorte que, d'après la première partie, leurs groupes μ_i s'identifient à leurs groupes d'homotopie faibles.

1. Définition et premières propriétés de groupes λ_i et μ_i

On appellera espace bitopologique (E', E) un espace muni de deux topologies telles que celle de E (dite "topologie forte") soit plus fine que celle de E' (dite "topologie faible").

On appellera paire topologique un couple (A, B) d'espaces topologiques, tel que B s'identifie à une partie de A, munie d'une topologie plus fine que celle induite par A. A la paire (A, B) est canoniquement associé un espace bitopologique, qu'on note (B', B). (B' s'identifie à B comme ensemble et sa topologie est celle induite par A).

Soit (E', E) un espace bitopologique; un chemin presque continu dans (E', E) est une application $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$, faiblement continue sur $[0, 1]$, fortement continue sur $]0, 1]$. On note $\tilde{\Sigma}^1(E', E)$ (ou, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, $\tilde{\Sigma}(E)$, ou même $\tilde{\Sigma}$) l'espace des chemins presque continus dans (E', E), muni de la topologie suivante: la topologie borne supérieure de la topologie de la convergence uniforme des applications $[0, 1] \longrightarrow E'$, et de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des applications $]0, 1] \longrightarrow E$.

Soient x et y deux points de E; on utilisera les sous-espaces suivants de $\tilde{\Sigma}$:

$\tilde{\Sigma}_x$ (chemins d'origine x)

$\tilde{\tilde{\Sigma}}_{xy}$ (chemins d'origine x et d'extrémité y)

$\tilde{\tilde{\Sigma}}_{xx}$ sera noté $\tilde{\Omega}_x$ (espace des lacets presque continus d'origine x)

On convient de noter encore x le chemin constant en x.

Définitions.[1] On pose:

1) Pour tout $i \geqslant 0$: $\pi_i(\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(E', E); x) = \lambda_i(E', E; x)$

(i-ème groupe d'homotopie local de (E', E) au point x).

2) Pour tout $i \geqslant 1$: $\pi_{i-1}(\tilde{\Omega}_x(E', E); x) = \mu_i(E', E; x)$

(i-ème groupe d'homotopie mixte de (E', E) au point x).

Propriétées ((E', E) désigne un espace bitopologique et x un point de E)

1) Caractère local des λ_i. Soit (V', V) un voisinage faible de x; par homothétie, tout compact K de $\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(E', E)$ se rétracte dans $\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(V', V)$, de façon que $K \cap \tilde{\Sigma}_x(V', V)$ reste dans $\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(V', V)$; donc l'application canonique: $\pi_i(\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(V', V); x) \to \pi_i(\tilde{\tilde{\Sigma}}_x(E', E); x)$ est un isomorphisme; d'où l'isomorphisme:

$$\lambda_i(V', V; x) \xrightarrow{\simeq} \lambda_i(E', E; x).$$

Donc plus généralement: soit (U', U) un autre voisinage faible de x; $\lambda_i(V', V; x)$ et $\lambda_i(U', U; x)$ sont canoniquement isomorphes.

2) Soit F une partie ouverte et fermée de E (autrement dit, fortement ouverte et fermée), et soit $x \in F$. Alors, pour tout $i \geqslant 1$, $\lambda_i(F', F; x)$ (resp. $\mu_i(F', F; x)$) s'identifie canoniquement à $\lambda_i(E', E; x)$

[1] Je dois à M. B. Morin de m'avoir signalé que les définitions données en [2] pouvaient être mises sous cette forme très maniable.

(resp. $\mu_i\,(E', E);x)$).

(En effet, pour $i \geqslant 1$, un "i-lacet local" et un "i-lacet mixte" ont des images fortement connexes).

3) La suite exacte et la suite exacte complétée.

Le lemme suivant se démontre exactement comme un lemme (bien connu) de Serre:

Lemme. L'application canonique $\tilde{\Sigma}_x\,(E', E; x) \longrightarrow E$ (qui à tout chemin presque contenu d'origine x associe son extrémité) est une fibration de Serre, de fibre $\breve{\Omega}_x\,(E', E; x)$. (On notera que cette fibration n'est pas surjective en général.)

La suite exacte d'homotopie de ce fibré donne immédiatement la suite exacte:

$$(1) \qquad \ldots \longrightarrow \lambda_i\,(E',E;x) \longrightarrow \pi_i\,(E;x) \longrightarrow \mu_i\,(E',E;x) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \lambda_{i-1}\,(E',E;x) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mu_1\,(E',E;x) \longrightarrow \lambda_0(E',E;x) \longrightarrow \pi_0(E;x)$$

Définition de $\mu_0\,(E',E;x)$. La relation "il existe un chemin presque continu d'origine y et d'extrémité y' " n'est pas en général une relation d'équivalence entre points y et y' de E; lorsque c'est une relation d'équivalence, on peut définir $\mu_0(E',E;x)$: c'est l'ensemble pointé quotient de E (pointé en x) par cette relation d'équivalence. Alors la suite exacte (1) se prolonge naturellement comme suit:

$$(1') \quad \ldots\ldots \longrightarrow \mu_1\,(E',E;x) \longrightarrow \lambda_0(E',E;x) \longrightarrow \pi_0\,(E;x) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mu_0(E',E;x) \longrightarrow 0$$

Exemple. La condition ci-dessus est remplie dans le cas d'un groupe bitopologique (G',G). En effet, si γ est un chemin presque continu d'origine y et d'extrémité y', alors $y'.\,\gamma^{-1}.\,y$ est un chemin presque continu d'origine y' et d'extrémité y. Et si γ' est un chemin presque continu d'origine y' et d'extrémité y'', alors $\gamma' . y'^{-1} . \gamma$ est un chemin presque continu d'origine y et d'extrémité y''.

Un autre exemple sera donné plus loin (2^o du théorème 3).

4) Chemins presque continus dans les espaces de lacets mixtes.

Outre la topologie dont on a muni $\widetilde{\Omega}_x$, considérons sur le même espace la topologie faible Ω'_x (celle de la convergence uniforme des applications $[0, 1] \longrightarrow E'$, qui, par définition de $\widetilde{\Omega}_x$, est moins fine que $\widetilde{\Omega}_x$).

Soit $\alpha \in \widetilde{\Omega}_x$; supposons qu'il existe un chemin presque continu dans $(\widetilde{\Omega}'_x, \widetilde{\Omega}_x)$, d'origine x, d'extrémité α ; autrement dit, qu'il existe une application $\gamma : I^2 \longrightarrow E$, faiblement continue, fortement continue pour $t > 0$, telle que:

$$\begin{cases} \gamma((I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I)) = \{x\} \\ \gamma(t, 1) = \alpha(t) \quad \text{pour tout } t \in I \end{cases}$$

Soit φ l'application $I^2 \longrightarrow I^2$ défini par:

$$\varphi(t,u) = \begin{cases} (1 - 2u(1-t), t) & \text{pour } 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ (t, 2t(1-u) + 2u - 1) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases}$$

Alors $\gamma \circ \varphi$ définit un chemin continu dans $\widetilde{\Omega}_x$, d'origine x, d'extrémité α . Comme, pour $i > 1$, un i-lacet mixte s'identifie à un 1-lacet dans un espace de $(i-1)$-lacets, on peut énoncer:

Soit $i \geqslant 1$; soit α un i-lacet mixte d'origine x dans (E', E). Pour que α soit homotope à 0, il suffit qu'il existe un chemin presque continu d'origine x, d'extrémité α . Soit en plus γ un tel chemin;

il existe une homotopie de α à x ayant même image dans E que γ

<u>Application:</u> <u>groupes μ_i des espaces presque contractiles.</u>

<u>Définition.</u> Soit (E', E) un espace bitopologique; soit $x \in E$. On dit que (E', E) est <u>presque contractile sur x</u> s'il existe une application $h : E \times I \to E$, faiblement continue (i. e., continue de $E' \times I$ dans E'), fortement continue sur $E \times]0, 1]$, et telle que:

$$h(y, 0) = y \quad \text{et} \quad h(y, 1) = x \quad \text{pour tout } y \in E.$$

Il est immédiat, compte tenu de ce qui précède, <u>que si (E', E) est presque contractile sur x, alors $\mu_i(E', E; x) = 0$ pour tout $i \geq 1$ (et même pout tout $i \geq 0$, si μ_0 existe).</u>

Exemples.

1. L'espace $\tilde{\Sigma}_x(E', E)$ est presque contractile sur le chemin constant x.

2. Le groupe (G', G) relatif à la boule (cf. Introduction) est presque contractile sur son élément neutre (donc sur chacun de ses points).

3. Soit δ la demi-boule fermée nord de D^n; soit (P', P) l'espace bitopologique des plongements C^∞ de δ dans D^n qui sont C^∞- tangents à l'identité en tout point de $\delta \cap S^{n-1}$; (P', P) est presque contractile sur chacun de ses points; dont tous ses μ_i sont nuls; mais tous les $\pi_i(P)$ sont nuls aussi (cf. [1], II, 4. 2. 2); donc, d'après la suite exacte (1'), ses groupes d'homotopie locaux sont tous nuls.

4. Si la topologie de E' est grossière, alors (E', E) est presque contractile sur chacun des ses points. Les composantes connexes fortes des espaces de jets des espaces des plongements, munis de la topologie quotient de la bitopologie (C^0, C^∞), sont de ce type; (ceci est une généra-

lisation de [1] , appendice au chapitre III).

5) Lacets forts qui sont homotopes à zero en tant que lacets mixtes.

Par un procédé très analogue à celui utilisé ci-dessus (propriété 4^{o}) on montre: Soit $i \geqslant 1$; soit α un i-lacet d'origine x dans E (autrement dit, un i-lacet fort). Si α est homotope à 0 en tant que lacet mixte de (E', E), alors α est extrémité d'un chemin presque continu d'origine x dans l'espace des i-lacets de E. Soit en plus γ une homotopie de α à 0 (en tant que lacet mixte) alors il existe un tel chemin presque continu ayant même image dans E que γ .

2. Le théorème d'isomorphisme pour les paires presque n-localement connexes.

Préliminaires: paires n-localement connexes: théorème d'isomorphisme.

Notations. Soit A un espace topologique; on notera $\Sigma^n(A)$ l'espace des n-cubes singuliers à valeurs dans A, et $\dot{\Sigma}^n(A)$ l'espace des applications continues du bord ∂I^n de I^n dans A.

Définition 1. Soit $(f, g) : (A, B) \longrightarrow (C, D)$ un morphisme de paires topologiques. Soit $x \in A$; on dit que (f, g) est faiblement ouverte en x si pour tout voisinage U de x dans A il existe un voisinage V de f (x) dans C tel que $g(U \cap B) \supset V \cap D$.

Définition 2. Soit $f : A \longrightarrow C$ une application continue. On appelle relevée de f et on note $\rho^1(f)$ (ou simplement $\rho(f)$) l'application (canoniquement definie par f):

$\Sigma^1(A) \longrightarrow \Sigma^1_f(C)$, où $\Sigma^1_f(C)$ est le sous-espace de $\Sigma^1(C) \times A \times A$ formé des triples (γ, x, y) tels que $\gamma_0 = f(x)$ et $\gamma_1 = f(y)$.

Pour un morphisme (f, g) de paires topologiques, le relevé $\wp^1(f, g)$ est par définition $(\wp^1(f), \wp^1(g))$.

On note $\wp^2(f)$ le relevé de $\wp^1(f)$, etc.

Définition 3. Soit $(f, g) : (A, B) \to (C, D)$ un morphisme de paires topologiques. Soit $x \in A$; si le n-ème relevé $\wp^n(f, g)$ est faiblement ouvert en x, on dit que (f, g) est n-localement connexe (n-l. c.) en x.

Exemples. Soit (f, g) le morphisme $(A, B) \to (0, 0)$, où 0 est un espace ayant un seul point (evidemment, (f, g) est bien déterminé par la donnée de (A, B) et de 0). Soit $x \in A$; dire que (f, g) est faiblement ouverte en x, c'est dire que B est dense dans A en x, autrement dit que $x \in \bar{B}$.

Le relevé $\wp^1(f, g)$ est le morphisme $(\Sigma^1(A), \Sigma^1(B)) \to$ $\to (\dot{\Sigma}^1(A), \dot{\Sigma}^1(B))$ canoniquement défini par f; et plus généralement $\wp^n(f, g)$ est le morphisme $(\Sigma^n(A), \Sigma^n(B)) \to (\dot{\Sigma}^n(A), \dot{\Sigma}^n(B))$ canoniquement défini par f. La n-locale connexion de (f, g) en x équivaut donc bien à la n-locale connexion de (A, B) en x, au sens où elle a été définie en [1], p. 344.

Lemme. Soit $(f, g) : (A, B) \to (C, D)$ un morphisme de paires métrisables. Si (f, g) et $\wp^1(f, g)$ sont ouvertes en tout point de A, alors $\wp^1(f, g)$ est ouverte en tout point de $\Sigma^1(A)$.

Ce lemme généralise à la fois le 1) et le 2) du lemme 2 de [1], p. 345; sa démonstration est très analoque à celle du 1) de ce lemme.

Application. Soit comme plus haut le morphisme $(f, g) : (A, B) \to (0, 0)$ défini par (A, B). Si B est dense dans A, et si (A, B) est n-l. c. pour tout $n \geq 0$, cela signifie que $\wp^n(f, g)$ est faiblement ouverte sur