CIME Summer Schools

E. Marchionna (Ed.)

Questions on Algebraic Varieties

51

Varenna, Italy 1969

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

E. Marchionna (Ed.)

Questions on Algebraic Varieties

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
September 7-17, 1969

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-11014-6 e-ISBN: 978-3-642-11015-3
DOI:10.1007/978-3-642-11015-3
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1970
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

3° Ciclo - Varenna - dal 7 al 17 Settembre 1969

« QUESTIONS ON ALGEBRAIC VARIETIES »

Coordinatore: Prof. E. MARCHIONNA

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

Pierre DOLBEAULT

RESIDUS ET COURANTS

Corso tenuto a Varenna dal 7 al 17 Settembre 1969

RESIDUS ET COURANTS

par

Pierre DOLBEAULT
(Université de Poitiers)

1. Introduction:

Soit X une surface de Riemann et soit g une fonction méromorphe sur un voisinage U d'un point P de X ayant pour seul pôle P ; soit z une coordonnée locale sur U telle que $z(P) = 0$, alors g est holomorphe sur $U \setminus P$ et égale au voisinage de P à une série de Laurent dont le coefficient du terme en z^{-1} est appelé le résidu α de g en P ; en fait α est un invariant de la forme différentielle méromorphe fermée $\omega = g(z)dz$.

Sur $U \setminus P$, la forme différentielle ω définit un courant $\underline{\omega}$, c'est-à-dire une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{D}(U \setminus P)$ des formes différentielles φ , de classe C^{∞} , à support compact dans $U \setminus P$, par la formule :

$$\underline{\omega}\,[\varphi] = \int_U \omega \wedge \varphi \,.$$

Considérons maintenant, pour toute $\psi \in \mathcal{D}(U)$, la limite :

$$T\,[\psi] = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z| \geq \varepsilon} \omega \wedge \psi \quad \text{(valeur principale de Cauchy)}$$

Il est facile de vérifier que cette limite existe et définit un courant dont la restriction à $U \setminus P$ est $\underline{\omega}$. De plus, si $d = d' + d''$ est la différentiation extérieure, d'' étant la partie de d qui augmente le degré en $d\bar{z}$, on a :

$$d''T = 2\pi i \alpha\, \delta_P + d'B \,,$$

où δ_P est la mesure de Dirac de support P et B un courant. En particulier, on a : $B = 0$ si P est un pôle simple.

Soit maintenant X une variété analytique complexe paracompacte, de dimension complexe n. On dit qu'une forme différentielle ω de degré p définie sur X est méromorphe si elle contient seulement des différentielles des coordonnées locales complexes et si ses coefficients sont des fonctions méromorphes ; ω est dite semi-méromorphe si, localement, c'est le produit d'une forme différentielle α, de classe C^∞ par $\frac{1}{f}$ où f est une fonction holomorphe; il est clair que l'on peut définir le faisceau des germes de formes différentielles semi-méromorphes et qu'une forme semi-méromorphe sur un ouvert U de X est une section de ce faisceau au-dessus de U. Si $\omega = \frac{\alpha}{f}$ sur l'ouvert U, on appelle l'ensemble $S = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$ un ensemble polaire de ω sur U ; c'est un ensemble analytique de U de codimension complexe 1 dans le support de α ; il contient l'ensemble des points où ω n'est pas C^∞ ; le plus petit de ces ensembles sera dit l'ensemble polaire de ω / U.

Supposons maintenant $d\omega = 0$; (ω fermée). A la suite de H. Poincaré (1887) [8], J. Leray (1959) [7] a défini, dans le cas des pôles simples et lorsque S est lisse (sans points singuliers) une $(p-1)$-forme différentielle fermée sur S qui généralise le nombre résidue α en P ci-dessus. Avant lui, également guidés par le mémoire de H. Poincaré, Kodaira (1951; 1952) [5], [6], L. Schwartz (1953) [9] et P. Dolbeault (1957) [1] ont défini des courants généralisant le courant résidu $\alpha\,\delta_P$ pour des singularités particulières de S

Voici un essai de définition d'un courant résidu quelles que soient les singularités de S par utilisation de résultats connus sur les résolutions des singularités.

Un opérateur différentiel D sur l'espace $\mathcal{D}'(X)$ des courants sur X est dit semi-holomorphe si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x sur lequel des coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ sont définies et tel que, sur U : $D = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \alpha_{i_1 \ldots i_n}(z) \frac{\partial^{i_1}}{\partial z_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_n}}{\partial z_n^{i_n}}$, où les $\alpha_{i_1 \ldots i_n}$ sont des fonctions C^∞

Cette définition est indépendante du système de coordonnées et D opère également sur les formes semi-méromorphes [9]

Un problème préliminaire est le suivant : Soit ω une forme différentielle semi-méromorphe sur X, d'ensemble polaire S, construire un courant $T(\omega)$ prolongeant le courant $\underline{\omega}$ défini sur $X - S$ par ω et tel que, pour tout opérateur semi-holomorphe D, on ait : $T(D\omega) = DT(\omega)$.

Nous donnons d'abord une solution dans le cas de singularités assez simples (cas normal) puis une construction de $T(\omega)$ par réduction de singularités (Hironaka [3]) lorsque X est une variété algébrique, S une sous-variété algébrique de X. Pour terminer, nous appliquons le résultat à des exemples de résidus .

2. Le cas normal :

C'est une généralisation du cas régulier introduit par L. Schwartz [9].

2.1. Une forme différentielle semi-meromorphe ω_x définie au voisinage de $x \in X$ est dite élémentaire s'il existe un système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ en x tel qu'un ensemble polaire de ω soit la réunion des ensembles $z_1 = o$, $z_2 = o, \ldots,$ $z_p = o$ $(p \leq n)$.

Toute forme semi-méromorphe ω sur X qui est, au voisinage de tout point de $x \in X$, égale à une somme finie de formes élémentaires est dite <u>normale.</u>

L'ensemble des opérateurs différentiels semi-holomorphes constitue un anneau Δ la multiplication étant définie par la composition des opérateurs.

2.2. <u>Lemme</u> : <u>L'espace</u> **C**-<u>vectoriel des formes différentielles semiméromorphes normales est un</u> Δ-<u>module engendré, sur tout compact , par les formes à coefficients localement sommables.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit ω une forme semi-méromorphe normale sur X ; pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U_x sur lequel ω est une somme finie de formes élémentaires ; soit $(u_i)_{i \in I}$ un sous-recouvrement localement fini de $(U_x)_{x \in X}$. Soit $\sum_{i \in I} \gamma_i$ une partition de l'unité subordonnée à $(u_i)_{i \in I}$; c'est un élément de Δ et ω est égale à la somme localement finie $\sum_{i \in I} \omega_i$, avec $\omega_i = \gamma_i \omega$. La forme ω_i est une somme finie de formes élementaires à support compact. Donc, sur tout compact K, ω est égale à une somme finie de formes élémentaires à support compact dans X, chaque support étant contenu dans un u_i ; il suffit d'établir que toute forme élémentaire, à support compact dans u_i, est l'image, par un élément de Δ, d'une forme différentielle à coefficients localement sommables. Soit ω' une telle forme élémentaire, il existe un système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ défini au voisinage

de son support et une forme C^{∞} α tels que :

$$\omega' = \frac{\alpha}{z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n}} \text{ , avec } p_k \geqslant o \text{ pour } k = 1, \dots, n \text{ .}$$

Si $p_s \geqslant 2$, on a : $\omega' = -\frac{1}{p_s - 1} \frac{\partial}{\partial z_s}\left(\frac{\alpha}{z_1^{p_1} \dots z_s^{p_s - 1} \dots z_n^{p_n}}\right) + \frac{1}{p_s - 1} \frac{(\partial\alpha / \partial z_s)}{z_1^{p_1} \dots z_s^{p_s - 1} \dots z_n^{p_n}}$

Par récurrence,on obtient : $\omega' = \sum_{\mu} D_{\mu} \omega''_{\mu}$ où D_{μ} est un opérateur

différentiel semi-holomorphe et $\omega''_{\mu} = \frac{\alpha''_{\mu}}{z_{i_1} \dots z_{i_p}}$ $(1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n)$;

ω''_{μ} est à coefficients localement sommables.

2.3 Théorème : Pour toute forme différentielle semi-méromorphe normale ω , il existe un courant unique $T(\omega)$ tel que :

(1) si ω a des coefficients localement sommables, alors $T(\omega)$ coincide avec le courant $\underline{\omega}$ défini par : $\underline{\omega}[\varphi] = \int_X \omega \wedge \varphi$;

(2) l'opérateur $T : \omega \longrightarrow T(\omega)$ est linéaire pour les structures de Δ-modules de l'espace $\mathcal{S}$ des formes différentielles semi-méromorphes normales et de l'espace des courants, en particulier pour tout $D \in \Delta$, pour toute $\omega \in \mathcal{S}$, on a : $T(D\,\omega) = DT(\omega)$;

(3) l'opérateur T est local (i.e. : si U est un ouvert de X alors : $T(\omega | U) = T(\omega) | U)$, et supp $T(\omega)$ = supp ω .

En particulier, le courant $T(\omega)$ prolonge canoniquement ω de $X \setminus S$ à X et satisfait à (2) . La démonstration du théorème sera faite de 2,4. à 2.6 .

2.4. Lemme : Pour toute forme ω élémentaire sur un ouvert, il existe des formes ω_μ, à coefficients localement sommables et des opérateurs semiholomorphes D_μ tels que

(4) $$\omega = \sum_\mu D_\mu \; \omega_\mu$$

et $\mathrm{supp}(\omega_\mu) \subset \mathrm{supp}\,(\omega)$.

Démonstration : Cela résulte de la construction des formes ω_μ donnée dans la démonstration du lemme 2.2.

2.5. Lemme : S'il existe un opérateur T satisfaisant à (1) et à (2) de 2.3, alors T est unique et satisfait à (3) de 2.3. De plus pour établir l'existence de $T(\omega)$, il suffit de le faire dans le cas où ω est élémentaire.

Démonstration : D'après 2.2, il existe des formes ω_ν à coefficients localement sommables et des opérateurs semi-holomorphes D_ν tels que : (5) $\omega = \sum_\nu D_\nu \, \omega_\nu$.

Alors (6) $T(\omega) = T(\sum_\nu D_\nu \omega_\nu) = \sum_\nu D_\nu \; T(\omega_\nu) = \sum_\nu D_\nu \; \omega_\nu$;

les deux dernières égalités résultent de (2) et (1) respectivement

Cela prouve que l'existence de $T(\omega)$ entraîne son unicité.

Pour tout ouvert U de X, on a:

$$\omega \,|\, U = (\sum_\nu D_\nu \; \omega_\nu) \,|\, U = \sum_\nu ((D_\nu \; \omega_\nu) \,|\, U) = \sum_\nu D_\nu(\omega_\nu \,|\, U)$$

parce que les D_ν sont des opérateurs locaux.

Alors : $T(\omega) \,|\, U) = \sum_\nu D_\nu \, \underline{(\omega_\nu \,|\, U)} = \sum_\nu D_\nu(\underline{\omega}_\nu \,|\, U) = T(\omega) \,|\, U$, ce qui prouve le caractère local de T.

Soit U un ouvert de X sur lequel : $\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_p$, où $\omega_k (k = 1, \ldots, p)$ est élémentaire sur U . Soit $x \notin \operatorname{supp}(\omega)$, alors il existe un voisinage V de x sur lequel : $\omega | V = 0$; on désignera $\omega | V$ par ω et $\omega_k | V$ par ω_k pour simplifier la notation; on a :

$$(7) \qquad \omega_1 = -(\omega_2 + \ldots + \omega_p) = \omega'' .$$

Il existe un système de coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ sur V dans lequel: $\omega_1 = \dfrac{\alpha'}{z_1^{p_1} \ldots z_n^{p_n}}$ où α' est C^∞ ; alors :

ou bien l'ensemble polaire de ω_1 est contenu dans celui de ω'' ;

ou bien il existe j ($1 \leqslant j \leqslant n$) , par exemple $j = 1$ après changement éventuel du numérotage des coordonnées, tel que $\{z_1 = 0\}$ ne soit pas une composante de l'ensemble polaire de ω'' . Multiplions les deux membres de (7) par $z_2^{p_2} \ldots z_n^{p_n}$; alors :

$$z_1^{-p_1} \alpha' = z_2^{p_2} \ldots z_n^{p_n} \omega'' .$$ Mais $z_1^{-p_1} \alpha'$ est C^∞ sur le complémentaire du sous-ensemble rare et fermé de $\{z_1 = o\} \cap V$, intersection de l'ensemble polaire de ω'' et de $z_1 = o$; donc $z_1^{-p_1} \alpha'$ est C^∞ sur V d'après ([2] , th. 1; [2bis] , 4.2) .

Par récurrence, on est ramené au premier cas.

$\omega'' = \dfrac{\beta}{f_1^{q_1} \ldots f_m^{q_m}}$ où chacune des f_j est une fonction coordonnée sur V , mais où on peut avoir $m > n$; si $f_1 = o$ fait partie de l'ensemble polaire de ω_1 , au produit près par une fonction holomorphe sans zéro , il existe k tel que z_k soit égal à f_1 ; sinons, considérons :

$$f_1^{-q_1} \beta_1 = f_2^{q_2} \dots f_m^{q_m} \omega'' \quad ;$$

cette forme est C^∞ sur le complémentaire du sous-ensemble rare et fermé de $f_1 = o$ intersection de $f_1 = o$ et de l'ensemble polaire de ω_1 ; donc est C^∞ sur V , d'après ([2] , th. 1 ; [2bis] , 4.2) .

Par récurrence sur l'indice l de f_l , $(l = 1, .., m)$, on montre ainsi que l'ensemble polaire de ω'' est contenu dans celui de ω_1 , donc ω'' est une forme élémentaire.

Alors $\omega = \omega_1 - \omega''$ est une forme élémentaire sur V , nulle sur V ; en vertu du lemme 2.4, dans l'expression (4) de ω , les formes ω_γ sont nulles, donc si $T(\omega)$ est défini pour toute forme élémentaire, on a $T(\omega) = o$, en vertu de l'expression (6) Autrement dit, pour toute forme ω , $T(\omega)$ est indépendant de la décomposition (5) , donc aussi de la décomposition en formes élémentaires $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_p$. Pour établir l'existence de $T(\omega)$ il reste à établir l'existence de $T(\omega')$ pour toute forme élémentaire ω' et à poser $T(\omega) = \sum_{k=1}^{p} T(\omega_k)$

D'autre part, on a supp $T(\omega) \supset$ supp ω à cause de (1) et du fait que tout ensemble polaire de ω est contenu dans l'adhérence de l'ensemble des points où ω est C^∞ ; d'autre part si T existe et satisfait à (1) et (2) , alors d'après le résultat ci-dessus supp $T(\omega) \subset$ supp ω , d'où la propriété du support énoncée dans (3) .

2.6 . Existence de $T(\omega)$ satisfaisant à (1) est (2) pour ω élémentaire.

a) Soit $\omega = \dfrac{\alpha}{z_1^{p_1} \cdots z_n^{p_n}}$ où $z_1, \ldots, z_n$ sont des coordonnées locales complexes dans un ouvert U de X et α une forme différentielle C^∞ ; pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, soit $\alpha \wedge \varphi = \psi$ $dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$; posons :

$$T(\omega)[\varphi] = \lim_{\varepsilon_n \to 0} \int_{|z_n| \geq \varepsilon_n} \frac{dz_n \wedge d\bar{z}_n}{z_n^{p_n}} \left(\lim_{\varepsilon_{n-1} \to 0} \int_{|z_{n-1}| \geq \varepsilon_{n-1}} \frac{dz_{n-1} \wedge d\bar{z}_{n-1}}{z_{n-1}^{p_{n-1}}} \left(\ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots \left(\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{|z_1| \geq \varepsilon_1} \frac{\psi \, dz_1 \wedge d\bar{z}_1}{z_1^{p_1}} \right) \ldots \right) \right) .$$

On peut prouver, à l'aide de la formule de Taylor en $z_1, \bar{z}_n$ que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z_1| \geq \varepsilon} \frac{\psi(z_1, \ldots, z_n)}{z_1^{p_1}} dz_1 \wedge d\bar{z}_1$$

est une fonction C^∞ des parties réelles et imaginaires de $z_2, \ldots, z_n$. On définit $T(\omega)[\varphi]$ par récurrence sur n .

φ étant à support compact, on peut intervertir les passages à la limite et les intégrations, de sorte que :

$$T(\omega)[\varphi] = \lim_{\varepsilon_n \to 0} \left(\lim_{\varepsilon_{n-1} \to 0} \dots \left(\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{|z_n| \geq \varepsilon_n} \left(\int_{|z_{n-1}| \geq \varepsilon_{n-1}} \dots \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \dots \left(\int_{|z_1| \geq \varepsilon_1} \frac{\psi\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n}{z_1^{p_1} \dots z_n^{p_n}} \right) \dots \right) \right) .$$

On vérifie aisément que $T(\omega)$ est un courant .

b) Soit D un opérateur différentiel semi-holomorphe, il s'agit de démontrer : $T(D\,\omega) = DT(\omega)$. Il suffit de considérer les deux cas : D est la multiplication par une fonction $C^{\infty}\beta$ et $D = \dfrac{\partial}{\partial z_k}$.

On a évidemment : $T(\omega)[\beta\varphi] = T(\beta\omega)[\varphi]$. Reste à prouver :

$$- T(\omega)\left[\frac{\partial \psi}{\partial z_k}\right] = T\left(\frac{\partial \omega}{\partial z_k}\right)[\psi] .$$

Désignons par ω_J et α_L les coefficients de ω et φ, J et L étant des multi-indices convenables.

On peut commencer l'intégration par z_k et passer à la limite pour $\varepsilon_k \to 0$, sans changer $T(\omega)[\psi]$; mais :

$$\omega \wedge \psi = \sum_{JL} (-1)^I \omega_J \alpha_L\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$, où J, L sont des multi-indices dont la réunion est celle des indices de $z_1, \bar{z}_1, .\, z_n, \bar{z}_n$ et I la signature de la permutation faisant passer de J, L à l'ensemble ordonné des indices des z_1 et des $\bar{z}_1$; de plus :

$$\omega_J = \frac{\alpha_J}{z_1^{p_1}\cdots z_n^{p_n}} \int_{|z_k|\geqslant \varepsilon} \frac{\alpha_J}{z_k^{p_k}} \frac{\partial \psi_L}{\partial z_k} dz_k \wedge d\bar{z}_k + \int_{|z_k|\geqslant\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\alpha_J}{z_k^{p_k}}\right) \psi_L dz_k \wedge d\bar{z}_k$$

$$= \int_{|z_k|\geqslant} \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{\alpha_J \psi_L}{z_k^{p_k}}\right) dz_k \wedge d\bar{z}_k = \int_{|z_k|\geqslant\varepsilon} d\left(\frac{\alpha_J \psi_L}{z_k^{p_k}} d\bar{z}_k\right) =$$

$$= -\int_{|z_k|=\varepsilon} \frac{\alpha_J \psi_L}{z_k^{p_k}} d\bar{z}_k \quad \text{qui tend vers } 0$$

quand ε tend vers 0 .

c) Il est clair que, si ω a des coefficients localement sommables $T(\omega)$ coincide avec $\underline{\omega}$.

3. Réduction au cas normal :

3 . 1 Nous allons considérer le cas particulier suivant qui peut, probablement, être généralisé au cas de n'importe quelle variété analytique complexe (travaux non publiés d'Hironaka) .

Soit X une variété algébrique projective irréductible lisse de dimension n sur $\mathbb{C}$; c'est une variété analytique complexe. Soit ω une p-forme différentielle semi-méromorphe sur X dont l'ensemble polaire est contenu dans une sous-variété algébrique S de X , de codimension 1 . On sait (conjecture de Hodge Atiyah ([4] , p.81) prouvée par Hironaka ([3] , p.146)) qu'il existe une transformation birationnelle π : $X' \longrightarrow X$ d'une variété algébrique lisse X' sur X, qui est un morphisme et telle que $S' = \pi^{-1}(S)$ soit une sous-variété de X' de codimension 1, égale aù voisinage de tout point x' à la réunion des ensembles analytiques : $z_1 = 0 ; \ldots ; z_p = 0$ où $(z_1, \ldots, z_n)$ est un système de coordonnées locales au voisinage de x' et où $p \leqslant n$.

π est un morphisme analytique, donc de classe C^∞ et est propre; de plus $\pi \mid X' \setminus S'$ est un isomorphisme analytique : $X' \setminus S' \to X \setminus S$. On dira que π est un morphisme normalisant pour S.

3.2. Image réciproque de ω. Soit $x \in X$; il existe un voisinage U de x sur lequel ω est égale à : $f^{-1}\alpha$ où α est une forme C^∞. et f une fonction holomorphe sur U telle que : $S \cap U = \{ y \in U \mid f(y) = 0 \}$; on a : $f\omega =$ et, en dehors de S, $\pi^*(f\omega) = \pi^* f \,.\, \pi^*\omega = \pi^*\alpha$; on pose, sur U : $\pi^*\omega = \dfrac{\pi^*}{\pi^* f} \,.\, \pi^*\omega$ est semi-méromorphe sur $\pi^{-1}(U)$. L'ensemble polaire de $\pi^*\omega$ est contenu dans S' puisque :

$$\{ y' \in \pi^{-1}(U) \mid \pi^* f(y') = 0 \} = \{ y' \in \pi^{-1}(U) \mid f \circ \pi(y') = 0 \} = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(S) .$$

La forme $\omega' = \pi^*\omega$ définie comme ci-dessus au voisinage de tout point de X' est alors une forme différentielle semi-méromorphe normale sur X' ; en fait, au voisinage de tout point de X', elle est égale à une forme élementaire.

3.3. Soit $T' = T'(\omega')$ le prolongement à X' du courant $\underline{\omega}'$ sur $X' \setminus S'$ défini en 2.3. L'application π étant propre, le courant π_* T' est défini sur X de la façon suivante: pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, on a : $\pi^*\varphi \in \mathcal{D}(X')$, alors : $\pi_* T'[\varphi] = T'[\pi^*\varphi]$.

Posons: $T_\pi(\omega) = \pi_* T'$; ce courant est complètement déterminé par ω et ; il possède les propriétés qui seront énumérées de 3.4. à 3.8 .

3.4. Lemme : Si ω est à coefficients localement sommables, alors $T_\pi(\omega) = \underline{\omega}$.

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, alors, parce que S est de mesure nulle sur X, que $\pi | X' \setminus S'$ est un isomorphisme, et d'après la construction explicite de $T'(\pi^*\omega)$, on a :

$$\underline{\omega}[\varphi] = \int_X \omega \wedge \varphi = \int_{X \setminus S} \omega \wedge \varphi = \int_{X' \setminus S'} \pi^*\omega \wedge \pi^*\varphi$$

$$= T'(\pi^*\omega)[\pi^*\varphi] = T_\pi(\omega)[\varphi].$$

3.5 Lemme : T_π est local et supp $T_\pi(\omega) = \mathrm{supp}(\omega)$. Cela résulte de 2.3 (3) appliqué à $T'(\omega')$.

3.6. Lemme : Pour tout opérateur différentiel semi-holomorphe D , on a : $T_\pi(D\,\omega) = D\, T_\pi(\omega)$.

Démonstration : Pour toute forme semi-méromorphe ω , pout tout opérateur semi-holomorphe D , l'ensemble polaire de $D\omega$ est contenu dans celui de ω . Pour toutes les formes semi-méromorphes dont l'ensemble polaire est contenu dans le même ensemble algébrique

S , on peut utiliser le même morphisme π .

Il suffit de montrer que, pour tout domaine de carte U dans X , on a, sur U :

$$\frac{\partial}{\partial z_1} T_\pi(\omega) = T_\pi\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\omega\right) .$$

et que , pour toute fonction C^∞ α sur U , $\alpha\, T_\pi(\omega) = T_\pi(\alpha\,\omega)$.

(a) Nous supposons, dans la suite, que U est relativement compact dans X (ce qui est possible puisque X est localement compact), alors $U' = \pi^{-1}(U)$ est relativement compact dans X' , donc est recouvert par un nombre fini de domaines de cartes $U'_1, \ldots, U'_L$ relativement compacts suffisamment petits pour que, dans chacun d'eux, $\pi^*\omega$ soit élémentaire.

On considère la restriction de ω à U que l'on note encore ω . Par définition :

$$T_\pi\left(\frac{\partial\omega}{\partial z_1}\right)[\varphi] = T'\left(\pi^*\frac{\partial\omega}{\partial z_1}\right)[\pi^*\varphi] .$$

Soit $\sum_{i=1}^{L} \psi'_i$ une partition de l'unité sur $\pi^{-1}(U)$ subordonnée au recouvrement $(U'_1, \ldots, U'_L)$ de U', alors :

$$T'\left(\pi^*\frac{\partial\omega}{\partial z_1}\right)[\pi^*\varphi] = \sum_{i=1}^{L} T'\left(\pi^*\frac{\partial\omega}{\partial z_1}\right)[\psi'_i\,\pi^*\varphi]$$

Soient $(z'^i_1, \ldots, z'^i_n)$ des coordonnées sur U'_i telle que $S' \cap U'_i$ soit contenu dans l'ensemble analytique $\bigcup_{\ell=1}^{n}\{z'^i_\ell = 0\}$.

Considérons $$\psi'_i \, T' (\pi^* \frac{\partial \omega}{\partial z_1}) [\pi^* \varphi]$$
$$= T'(\pi^* \frac{\partial \omega}{\partial z_1}) [\psi'_i \pi \varphi | U'_i] \, ,$$

parce que, dans la dernière expression, le support du courant considéré est contenu dans U'_i.

Posons : $$\lim_{\varepsilon' \to o} \int_{U'_{i\,\varepsilon'}} = \lim_{\varepsilon'_n \to o} (\ldots \lim_{\varepsilon'_1 \to o} \int_{U'_i \, |z'^i_n| \geqslant \varepsilon'_n \ldots |z'^i_1| \geqslant \varepsilon'_1} \quad) \ldots) \, ,$$

alors par définition de T' :

$$T' (\pi^* \frac{\partial \omega}{\partial z_1} \left[\psi'_i \pi^* \varphi | U'_i \right] = \lim_{\varepsilon' \to o} \int_{U'_{i\,\varepsilon'}} \pi^* \frac{\partial \omega}{\partial z_1} \wedge \psi'_i \, (\pi^* \varphi | U'_i) \, . \tag{8}$$

Considérons $\pi_i = \pi | U'_i$; $\pi_i \mid U'_i \setminus S'$ est un isomorphisme de $U'_i \setminus S'$ sur $\pi(U'_i \setminus S') \subset U \setminus S$; sur $\pi_i(U'_i \setminus S')$, posons $\psi_i = (\pi_i^{-1})^* \psi'_i$; alors : $\psi'_i = \pi_i^* \psi_i$ sur $U'_i \setminus S'$.

L'expression (8) est égale à :

$$\lim_{\varepsilon' \to o} \int_{U'_{i\,\varepsilon'}} \pi_i^* \frac{\partial \omega}{\partial z_1} \wedge \pi_i^* (\psi_i \varphi) = \lim_{\varepsilon' \to o} \int_{U'_{i\,\varepsilon'}} \pi_i^* \, \omega \wedge \pi_i^* \frac{\partial}{\partial z_1} (\psi_i \varphi) \, +$$
$$+ \lim_{\varepsilon' \to o} \int_{U'_{i\,\varepsilon'}} \pi_i^* \frac{\partial}{\partial z_1} (\omega \wedge \psi_i \varphi) \, .$$

Posons : $\omega \wedge \psi_i \varphi = u \, d z_1 \wedge d \bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d z_n \wedge d \bar{z}_n$, alors :

$\frac{\partial}{\partial z_1}(\omega \wedge \psi_i \varphi) = dv$, avec $v = u\, d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots dz_n \wedge d\bar{z}_n$;

$$\pi_i^* v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta'_j}{(z'^i_1)^{p_1} \dots (z'^i_n)^{p_n}} \dots \wedge \widehat{dz'^i_j} \wedge d\bar{z}'^i_j \wedge \dots \wedge d\bar{z}'_n$$ (à cause du

type) . Omettons l'indice i pour simplifier la notation.

$$\int_{U'_{\varepsilon'}} \pi^* \frac{\partial}{\partial z_1}(\omega \wedge \psi \varphi) = \int_{U'_{\varepsilon'}} \pi^* dv = \int_{U'_{\varepsilon'}} d\, \pi^* v = \int_{bU'_{\varepsilon'}} \pi^* v \quad \dots$$

$$= - \sum_{k=1}^{n} \int_{|z'_1| \geq \varepsilon'_1 \dots |z'_k| = \varepsilon'_k \dots |z'_n| \geq \varepsilon'_n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta'_j}{(z'_1)^{p_1} \dots (z'_n)^{p_n}} \dots \wedge \widehat{d\bar{z}_j} \wedge d\bar{z}_j \wedge \dots$$
$$\dots \wedge d\bar{z}'_n$$

$$= - \sum_{k=1}^{n} \int_{|z'_1| \geq \varepsilon'_1 \dots |z'_k| = \varepsilon'_n \dots |z'_n| \geq \varepsilon'_n} \frac{\beta'_k}{(z'_1)^{p_1} \dots (z'_n)^{p_n}} \dots \widehat{dz'_k} \wedge d\bar{z}_k \wedge \dots \wedge d\bar{z}'_n ,$$

à cause de la dimension de $|z'_k| = \varepsilon'_k$ dans le plan complexe z'_k .

L'intégrale peut être calculée en intégrant d'abord par rapport à $d\bar{z}'_k$:

$$\int_{|z'_k| = \varepsilon'_k} \beta'_k \frac{d\bar{z}'_k}{(z'_k)^{p_k}} \quad ;$$

la limite de cette dernière, quand $\varepsilon'_k \to 0$, est nulle ; il en est de même de : $\lim\limits_{\varepsilon' \to 0} \int_{U'_{\varepsilon'}} \pi^* \frac{\partial}{\partial z_1}(\omega \wedge \psi \varphi)$.

Considérons maintenant :

(9) $$T'\left(\pi^{*}\frac{\partial\omega}{\partial z_1}\right)\left[\pi^{*}\varphi\right] = - \sum_{i=1}^{L} \lim_{\varepsilon'\to 0} \int_{U'_{i\varepsilon'}} \pi_i^{*}\,\omega\wedge\pi_i^{*}\frac{\partial}{\partial z_1}\,(\psi_i\varphi) =$$

$$= - \sum_{i=1}^{L} \lim_{\varepsilon'\to 0} \int_{\bigcup_{j=1}^{L} U'_{j\varepsilon'}} \pi_i^{*}\,\omega\wedge\pi_i^{*}\frac{\partial}{\partial z_1}\,(\psi_i\varphi) \quad (\text{car supp } \pi_i^{*}\frac{\partial}{\partial z_1}(\psi_i\varphi)\subset U'_i)$$

$$= - \lim_{\varepsilon'\to 0} \int_{\bigcup_{j=1}^{L} U'_{j\,\varepsilon'}} \pi^{*}\omega\wedge \sum_{i=1}^{L} \pi_i^{*}\frac{\partial}{\partial z_1}\,(\psi_i\varphi)$$

Mais $\displaystyle\sum_{i=1}^{L}\pi_i^{*}\frac{\partial}{\partial z_1}\cdot(\psi_i\varphi) = \sum_{i=1}^{L}\pi_i^{*}\psi_i\,\pi_i^{*}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi\right) + \sum_{i=1}^{L}\pi_i^{*}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\psi_i\right)\pi_i^{*}\varphi$;

cela est égal à

(10) $$\left(\sum_{i=1}^{L}\pi_i^{*}\psi_i\right)\pi^{*}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi\right) + \sum_{i=1}^{L}\pi_i^{*}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\psi_i\right)\pi_i^{*}\varphi$$

On a : $\pi_i^{*}\psi_i = \psi'_i$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{L}\pi_i^{*}\psi_i = 1$ sur $U\setminus S$; pour tout $j\in[1,\dots,L]$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{L}\pi_i^{*}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\psi_i\right)\pi_i^{*}\varphi\,|\,U'_j\setminus S'_j =$

$= \pi_j^{*}\left(\dfrac{\partial}{\partial z_1}\displaystyle\sum_{i=1}^{L}\psi_i\right)\pi_j^{*}\varphi\,|\,U'_j\setminus S'$; mais $\displaystyle\sum_{i=1}^{L}\psi_i\,|\,\pi_j(U'_j\setminus S') = 1$, donc l'expression (10) se réduit à

$$\pi^*\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi\right) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i' \pi^* \frac{\partial}{\partial z_1}\varphi \text{ . D'où l'expression de (9) :}$$

$$T'\left(\pi \frac{\partial\omega}{\partial z_1}\right)\left[\pi^*\varphi\right] = -\lim_{\varepsilon'\to o} \int_{L - \bigcup_{j=1}^{n} U'_{j\varepsilon'}} \pi^*\omega \wedge \sum_{j=1}^{n} \psi_i' \pi^* \frac{\partial}{\partial z_1}\varphi =$$

$$= -\lim_{\varepsilon'\to o} \sum_{i=1}^{L} \int_{U_i'} \pi^*\omega \wedge \psi_i' \pi^* \frac{\partial}{\partial z_1}\varphi \text{ (car supp } \psi_i' \subset U_i' \text{) .}$$

$$= -\sum_{i=1}^{L} \psi'_i T'(\pi^*\omega)\left[\pi^* \frac{\partial}{\partial z_1}\varphi\right] = -T'(\pi^*\omega)\left[\pi^* \frac{\partial}{\partial z_1}\varphi\right]$$

$$= -T_\pi(\omega)\left[\frac{\partial}{\partial z_1}\varphi\right] = \frac{\partial T_\pi(\omega)}{\partial z_1}\left[\varphi\right].$$

(b) Pour toute forme $C^\infty \alpha$:

$$\alpha T_\pi(\omega)\left[\varphi\right] = \alpha \pi_* T'(\pi^*\omega) = \pi_* T'(\pi^*\omega)\left[\alpha\varphi\right] = T'(\pi^*\omega)\left[\pi^*(\alpha\varphi)\right] =$$

$$= T'(\pi^*\omega)\left[\pi^*\alpha \, . \, \pi^*\varphi\right] .$$

$$= T'(\pi^*\alpha\, \pi^*\omega)\left[\pi^*\varphi\right] \text{ (d'après 2.3 (2))}$$

$$= \pi_* T'(\pi^*(\alpha\omega))\left[\varphi\right] = T_\pi(\alpha\omega)\left[\varphi\right].$$

3.7. Lemme : Le courant $T_\pi(\omega)$ est indépendant du morphisme π normalisant pour S .

(a) Si ω est normale, $T_\pi(\omega)$, d'après 3.4, 3.5, 3.6 est le courant défini dans le théorème 2.4, donc, il est indépendant de π .

b) Si π est un morphisme : $X' \to X$ normalisant pour S et $\pi_1 : X'_1 \to X'$ un morphisme normalisant pour $S' = \overset{-1}{\pi}(S)$, soit T' le courant prolongeant ω' canoniquement et soit T'_1 celui qui prolonge canoniquement $\pi_1^* \omega'$; alors, d'après (a) , $\pi_{1*} T'_1 = T'$, donc :

$$T_\pi(\omega) = T_{\pi \circ \pi_1}(\omega) .$$

(c) Etant données la variété algébrique projective, irréductible, lisse X sur $\mathbf{C}$ et la sous-variété algébrique S de X , de codimension 1 , considérons deux variétés algébriques, irréductibles, lisses, birationnellement équivalentes à X et telles qu'il existe des morphismes normalisants pour S $\pi_i : X_i \to X$ (i = 1, 2) ; posons : $S_i = \overset{-1}{\pi}_i(S)$. Soit L le corps des fonctions de X , alors le morphisme π_i induit l'isomorphisme θ_i de L sur le corps des fonctions $K(X_i)$ de X_i. Soit $m(L/\mathbf{C})$ la classe des couples (Y, θ) formés d'un $\mathbf{C}$-schéma Y et d'un $\mathbf{C}$-isomorphisme θ de L sur le corps des fonctions K(Y) de Y .

Dans $m(L/\mathbf{C})$, on dit que (Y', θ') <u>domine</u> (Y'', θ'') si θ' et θ'' étant des isomorphismes de L sur K(Y') et K(Y'') respectivement, l'application rationnelle f unique de (Y', θ') dans (Y'', θ'') qui induit l'isomorphisme $\theta' \circ \theta''^{-1} : K(Y'') \to K(Y')$ est un morphisme. ([3], p. 144) .

Alors, ([3] , p. 144) , il existe $(X'', \theta'') \in m(L/\mathbf{C})$ qui se déduit de (X_1, θ_1). par un nombre fini de transformations monoïdales et tel que (X'', θ'') domine (X_2, θ_2). De plus (X'', θ'') domine (X_1, θ_1) . Enfin , on sait qu'il existe une application rationnelle unique $\pi'' : (X'', \theta'') \to (X, id)$ qui induit l'isomorphisme θ'' ; autrement dit on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & (X'', \theta'') \arrow[dl, "\pi''_1"'] \arrow[dr, "\pi''_2"] \arrow[dd, "\pi''"] & \\
(X_1, \theta_1) \arrow[dr, "\pi_1"'] & & (D_2, \theta_2) \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & (X, id) &
\end{tikzcd}$$

On sait, d'autre part que X_1 étant lisse, il en est de même de X'' . Considérons $\pi^{-1}{}''(S) = \pi_1^{-1}{}''(S_1) = \pi^{-1}{}''(S_2)$. Soit $\pi' : X' \to X''$ un morphisme normalisant pour S'' ; posons $\pi'_i = \pi''_i \circ \pi'$ $(i = 1, 2)$; $\pi_o = \pi''_o \circ \pi'$; alors on le diagramme commutatif de morphismes normalisants pour S, S_1, S_2 resp. :

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, "\pi''_1"'] \arrow[dr, "\pi''_2"] \arrow[dd, "\pi''"] & \\
X_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

D'après (b), on a : $T_{\pi_1}(\omega) = T_{\pi_1 \circ \pi'}(\omega) = T_{\pi_o}(\omega) = T_{\pi_2 \circ \pi_2}(\omega) = T_{\pi_2}(\omega)$.

Cela établit l'indépendance de $T_{\pi}(\omega)$ par rapport au morphisme π normalisant pour S On désigne désormais le courant $T_{\pi}(\omega)$ par $T(\omega)$.

Résumons les propriétés de $T(\omega)$ dans le théorème suivant :

3.8. Théorème : Soit X une variété algébrique projective, irréductible, lisse sur $\mathbf{C}$ et soit ω une p-forme différentielle semi-méromorphe sur X dont l'ensemble polaire est contenu dans une sous-variété algébrique S de X de codimension 1 . Alors il existe un courant $T(\omega)$ défini canoniquement qui prolonge le courant $\underline{\omega}$ défini par ω sur $X \setminus S$ et qui possède les propriétés suivantes

1) Si ω est à coefficients localement sommables, alors ; $T(\omega)$ est égal au courant défini par ω sur X .

2) L'opérateur $T : \omega \longmapsto T(\omega)$ est local et supp $T(\omega) = \operatorname{supp} \omega$.

3) Pour tout opérateur différentiel semi-holomorphe D, on a : $T(D\omega) = DT(\omega)$.

4. Exemple de définition du résidu d'une forme différentielle méromorphe fermée.

On considère le cas d'une forme ω à pôles simples, de degré n sur une variété de dimension complexe n.

4.1. Cas d'une forme élémentaire. On considère une forme ω définie sur le domaine U d'une carte, au voisinage d'un point x de X , de la façon suivante :

$$\omega = \frac{\alpha}{z_{i_1} \ldots z_{i_p}} \; dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

où α est holomorphe, alors ω est à coefficients localement sommables et $d\omega = d'\omega = 0$.

Sur U , on considère le courant $T = T(\omega)$; il est défini par:

$$T[\varphi] = \frac{\alpha \wedge \varphi}{z_{i_1} \ldots z_{i_p}}$$

$$d''T[\psi] = (-1)^{n+1} \; T[d''\psi] = \lim_{\varepsilon_1 \to 0 \ldots \varepsilon_n \to 0} \int_{|z_1| \geq \varepsilon_1 \ldots |z_n| \geq \varepsilon_n}$$

$$\frac{\alpha dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d''\psi}{z_{i_1} \ldots z_{i_p}} \qquad \psi = \sum_{j=1}^{n} \psi_j \ldots \wedge \widehat{d\bar z_j} \wedge \ldots$$

$$d'' \; T[\psi] = - \lim_{\varepsilon_1 \to 0 \ldots \varepsilon_n \to 0} \int_{|z_1| \geq \varepsilon_1 \ldots |z_n| \geq \varepsilon_n} d\left(\frac{\alpha dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge \psi}{z_{i_1} \ldots z_{i_p}}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0 \ldots \varepsilon_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \int_{|z_1| \geq \varepsilon_1 \ldots |z_k| = \varepsilon_k \ldots} \frac{\alpha \wedge \psi_k}{z_{i_1} \ldots z_{i_p}} \; dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge \ldots \wedge \widehat{d\bar z_k} \wedge .$$

$$= 2\pi i \sum_{l=1}^{p} \int_{S_{i_l}} (\alpha \psi_{i_l} | S_{i_l}) \frac{\dots \wedge \widehat{dz_{i_l}} \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{z}_{i_l}} \wedge \dots}{z_{i_1} \dots \widehat{z_{i_l}} \dots z_{i_p}}$$

où S_{i_l} désigne la sous- variété $z_{i_l} = 0$ de U.

$\dfrac{\alpha | S_{i_l}}{z_{i_1} \dots \widehat{z_{i_l}} \dots z_{i_p}} dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_{i_l}} \wedge \dots \wedge dz_n = \text{Rés}_{i_l}(\omega)$ est appelée la <u>forme résidu de</u> ω sur S_{i_l}

et
$$d''T[\psi] = 2\pi i \sum_{l=1}^{p} \int_{S_{i_l}} \text{Rés}_{i_l}(\omega) \wedge (\psi | S_{i_l}) .$$

4.2. Supposons que X soit une variété algébrique projective lisse et que ω ait un ensemble polaire contenu dans une sous-variété algébrique S de codimension 1 de X. Soit π un morphisme normalisant pour S ; alors $\pi^*\omega = \omega'$ a ses pôles simples et contenus dans $S' = \pi^{-1}(S)$; $d''T'(\pi^*\omega)$ est défini localement comme en 4.1. et :

$$\pi_* d''T'(\pi^*\omega)[\psi] = d''T'(\pi^*\omega)[\pi^*\psi] = T'(\pi^*\omega)[d''\pi^*\psi] = T'(\pi^*\omega)[\pi^* d''\psi]$$
$$= \pi_* T'(\pi^*\omega)[d''\psi]\ d''T_\pi(\omega)[\psi] .$$

$T(\omega)$ étant indépendant de π, on le désignera par $T(\omega)$ et on appelera $d''T(\omega) = \pi_* d''T'(\pi^*\omega)$ <u>le courant résidu de</u> ω ; <u>il est porté par</u> S.