

E. Bompiani (Ed.)

Geometria proiettivo-differenziale

Pavia, Italy 1955



 Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

E. Bompiani (Ed.)

Geometria proiettivo-differenziale

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Pavia, Italy,
September 25-October 5, 1955

 Springer



FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10906-5 e-ISBN: 978-3-642-10907-2
DOI:10.1007/978-3-642-10907-2
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011
Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Florence, 1955
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Pavia, Italy, September 25-October 5, 1955

GEOMETRIA PROIETTIVO-DIFFERENZIALE

B. Segre:	Proprietà locali e globali di varietà e di trasformazioni differenziabili con speciale riguardo ai casi analitici ed algebrici	1
E. Cech:	Deformazioni proiettive di congruenze e questioni connesse	201

B E N I A M I N O S E G R E

PROPRIETA' LOCALI E GLOBALI DI VARIETA' E DI
TRASFORMAZIONI DIFFERENZIABILI
CON SPECIALE RIGUARDO AI CASI ANALITICI ED ALGEBRICI

ROMA-Istituto Matematico dell'Università, 1956

PROPRIETA' LOCALI E GLOBALI DI VARIETA' E DI TRASFORMAZIONI
DIFFERENZIALI CON SPECIALE RIGUARDO AI CASI ANALITICI
ED ALGEBRICI

PREFAZIONE.

La presente monografia trae la sua origine dal Corso di otto lezioni da me tenuto a Pavia dal 26 Settembre al 5 ottobre 1955, nel quadro dei ^{corsi} estivi organizzati dal C.I.M.E. In essa vengono omessi gli argomenti delle ultime due lezioni, attinenti alle relazioni fra Geometria differenziale e Topologia, poichè di ciò tratto già altrove con sufficiente ampiezza⁽¹⁾. Invece le altre sei lezioni ricevono qui uno sviluppo più largo ed organico, con un'esposizione che può bastare a se stessa qualora la si integri opportunamente mediante la lettura di qualcuno dei lavori indicati nella Bibliografia che chiude il volume.

Uno sguardo all'indice, potrà già bastare a dare un'idea degli argomenti trattati nella presente esposizione e delle loro mutue concatenazioni. Aggiungo soltanto che vari dei risultati ottenuti compaiono qui per la prima volta e suggeriscono sovente ricerche ulteriori, secondo quanto a volta a volta specificato nel testo e, particolarmente, nelle Notizie Storiche e Bibliografiche poste alla fine delle singole lezioni.

Beniamino SEGRE

(1) BENIAMINO SEGRE: Forme differenziali e loro integrali, vol.II
(in corso di stampa);
Recouvrements de sphères et correspondances
entre variétés topologiques.

LEZIONE PRIMA

INVARIANTI DIFFERENZIALI DI TRASFORMAZIONI PUNTUALI E DUALISTICHE

In questa prima lezione si mostrerà come si possa determinare un sistema completo di invarianti differenziali del 1° ordine, relativi ad una coppia di elementi omologhi in una corrispondenza puntuale o dualistica fra due porzioni di spazi euclidei, la quale sia biunivoca e di classe C^1 . Da tali invarianti metrici, si dedurranno certi invarianti topologici relativi ai punti fissi delle corrispondenze fra varietà sovrapposte; nonché taluni invarianti proiettivi inerenti ad una coppia di elementi comune a due corrispondenze dualistiche od anche a due ipersuperficie di un iperspazio fra loro tangenti in un punto. Ad un ulteriore approfondimento dello studio dei suddetti invarianti verranno in parte dedicate le due Lezioni successive.

1. STUDIO LOCALE METRICO DELLE TRASFORMAZIONI PUNTUALI.

Siano E_n, E'_n due spazi euclidei orientati (reali) ad $n (\geq 1)$ dimensioni, e sia T una qualunque corrispondenza biunivoca di classe C^1 fra due loro regioni. Se T muta il punto $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ di E_n nel punto $P'(X_1, X_2, \dots, X_n)$ di E'_n le equazioni di T si esprimeranno dando le X in funzione delle x , e la relativa matrice jacobiana

$$J = \frac{\partial (X_1, X_2, \dots, X_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

avrà determinante **non nullo**.

Per ottenere gli invarianti differenziali del 1° ordine di T inerenti alla coppia (P, P') osserviamo che, se un punto Q di E_n - prossimo a P - tende a P arbitrariamente in guisa che la retta

(semiretta) PQ tenda ad una retta (semiretta) r uscente da P , il punto omologo $Q'=T(Q)$ tende a $P'=T(P)$ in modo che la retta (semiretta) $P'Q'$ ammette una posizione limite r' , dipendente da r soltanto. È ben noto, ed è di verifica immediata, che la corrispondenza in tal guisa definita fra le rette (semirette) r ed r' risulta un'omografia non degenera fra le stelle di centri P e P' .

Si ha inoltre che - quando $Q \rightarrow P$ - il quoziente delle lunghezze dei segmenti $P'Q'$ e PQ ammette un limite (positivo) che dipende solamente dalla direzione di r ; tale numero ed il suo reciproco son detti rispettivamente il coefficiente di dilatazione ed il coefficiente di contrazione di T in P nella direzione di r .

Gli invarianti richiesti si deducono dallo studio del modo come tali coefficienti dipendono dalla relativa direzione. A tale scopo, sulle varie semirette di E'_n uscenti da P portiamo un segmento uguale al rispettivo coefficiente di contrazione: si ha allora che l'estremo libero di questo segmento genera un iperellissoide I di centro P , detto l'iperellissoide di deformazione di T inerente a P .

Si constata facilmente che (a meno di infinitesimi) I risulta simile al trasformato mediante T^{-1} di una ipersfera infinitesima di E'_n di centro P' ; e che la proiettività subordinata da T nel modo anzidetto fra le stelle di centri P e P' muta due diametri coniugati di I in due rette di E'_n uscenti da P' fra loro ortogonali. Esistono perciò sempre n rette per P fra loro a due a due perpendicolari che si trasformano in rette per P' ancora fra loro a due a due perpendicolari; tali rette - dette le rette principali di T uscenti da P - risultano ovviamente indeterminate se, e soltanto se, l'iperellissoide I è rotondo, e possono venir caratterizzati come quelle rette per P in cor-

rispondenza alle quali il coefficiente di contrazione o di dilatazione ha un e s t r e m o (non però necessariamente un massimo od un minimo), onde ad un tale coefficiente si dà pure l'attributo di principale. E' chiaro che gli n coefficienti di contrazione principali di T in P danno le lunghezze dei semiasse di I ; e sono inoltre evidenti le modifiche occorrenti in ciò che precede nell'ipotesi che I sia rotondo.

Enti analoghi si ottengono in E'_n , riferendosi alla corrispondenza T^{-1} . E' ovvio che i coefficienti di contrazione principali di T in P uguagliano i coefficienti di dilatazione principale di T^{-1} in P' , e che i due n -edri principali di vertici P e P' si corrispondono nell'omografia indotta da T fra le stelle di semirette uscenti da P e P' ; quest'ultima associa all'orientazione positiva del primo n -edro un'orientazione del secondo che risulta positiva o negativa secondochè J ha determinante positivo o negativo. E' da rilevare che:

Una trasformazione puntuale T fra due spazi euclidei ad n dimensioni, la quale sia invertibile e di classe C^1 , ammette n e soltanto n invarianti differenziali metrici del 1° ordine fra loro indipendenti. Più precisamente, gli n coefficienti di contrazione principali di T sono n invarianti siffatti, ed ogni altro invariante del 1° ordine risulta una loro funzione.

L'invarianza di quei coefficienti essendo implicita nella loro definizione, le proprietà asserite seguono da ciò che:

Esiste fra E_n ed E'_n una ed una sola trasformazione affine, A , approssimante la T nell'intorno del 1° ordine della coppia (P, P') , e ciò è soddisfacente alle seguenti condizioni

- 1°) A muta P in P' e subordina fra le stelle di semirette di centri questi punti la stessa omografia ivi indotta da T ;
- 2°) I coefficienti di contrazione di A e di T in P risultano fra loro uguali in tutte le direzioni.

Se si introducono in E_n, E'_n coordinate cartesiane riferite ai due n -edri principali inerenti a P, P' , il che può esigere di dover mutare l'orientazione positiva in uno dei due spazi, le equazioni di A assumono la forma semplice

$$X_1 = c_1 x_2, \quad X_2 = c_2 x_2, \dots, \quad X_n = c_n x_n,$$

ove $c_1, c_2, \dots, c_n$ denotano gli n coefficienti di dilatazione principali. E' chiaro che l'affinità A trasforma l'iperellissoide I di deformazione, inerente a P , nell'ipersfera di E'_n avente centro P' e raggio 1; A può anzi venir precisamente caratterizzata da questa proprietà, assieme a quella di mutare l'uno nell'altro i due n -edri principali relativi a P od a P' stabilendo fra essi e fra le loro orientazioni opportuni riferimenti.

E' poi subito visto che il prodotto degli n coefficienti di dilatazione principali uguaglia il valor assoluto del determinante di J , e può denominarsi la densità della trasformazione T inerente alla coppia (P, P') , in quanto appare così come il rapporto dei volumi di due campi infinitesimi omologhi di E'_n e E_n , rispettivamente contenenti P' e P .

Questo risultato è incluso nel seguente teorema, il quale fornisce le espressioni esplicite di n invarianti differenziali del 1° ordine di T , per ciò che precede fra loro generalmente indipendenti.

La somma dei quadrati dei prodotti a t a t dei coefficienti di dilatazione principali ($1 \leq t \leq n$), uguaglia la somma dei quadrati degli $\binom{n}{t}^2$ minori d'ordine t estratti dalla matrice J .

2. ALCUNI INVARIANTI TOPOLOGICO-DIFFERENZIALI.

Atteso il carattere locale degli sviluppi precedenti, è subito visto com'essi possano venir estesi alle corrispondenze

puntuali fra varietà riemanniane. Anche per queste potranno venir definite le rette tangenti principali, i coefficienti di contrazione principali, ecc., ciò che suggerisce l'introduzione e lo studio delle linee che potranno dirsi principali, ossia delle curve aventi in ogni punto come tangente una retta principale. Senza qui insistere su ciò, rileviamo soltanto che una corrispondenza risulta conforme se, e soltanto se, le linee principali sono totalmente indeterminate. Particolare interesse avranno i casi d'indeterminazione parziale, caratterizzabili con la proprietà che in ogni punto l'iperellissoide di deformazione risulti di rotazione (in uno dei vari modi possibili).

Rileviamo inoltre il caso in cui (con le notazioni del n.1) si abbia $E_n = E'_n$, $n = 1, P = P'$, e cioè T sia una corrispondenza di una retta in sé dotata di un punto fisso P . In tale ipotesi, al coefficiente di dilatazione

di T in P si può intrinsecamente attribuire un segno, convenendo di assumere quello col segno $+$ o col segno $-$ secondo che nell'intorno di P la T è concorde o discorde; con ciò il suddetto coefficiente risulta in ogni caso uguale al valore della derivata $\frac{dX}{dx}$ calcolata in P , dove x ed X denotino le coordinate di due punti corrispondenti delle rette sovrapposte E_1, E'_1 in uno stesso sistema di riferimento. E' subito visto che tale espressione non muta se si cambia comunque il sistema di coordinate, ponendo quindi in luogo di x una qualunque funzione della medesima x di classe C^1 , a derivata non nulla in P , ed in luogo di X la stessa funzione della medesima X ; risultato, questo, che manifestamente sussiste non soltanto nel campo reale, ma altresì nel campo complesso. L'anzidetto coefficiente di dilatazione ha quindi significato topologico differenziale, in quanto dipende soltanto da T e da P , e non dalla

scelta di una coordinata interna sopra E_1 .

Questo permette di sostituire in ciò che precede ad E_1 una curva qualsiasi, che si può pensare dedotta da E_1 mediante una trasformazione di classe C^1 . Il risultato si estende poi ulteriormente al caso di n qualsiasi, nel modo che ora passiamo ad indicare.

Sia P un punto semplice di una varietà V_n , che supponiamo differenziabile (o complessa) in un intorno di P , e denotiamo con S_n lo spazio proiettivo reale (o complesso) tangente in P a V_n . Consideriamo una corrispondenza T di V_n in sè, che ammetta P come punto fisso e che, in un intorno di P , risulti invertibile e differenziabile (o analitica). Nella stella ∞^{n-1} delle rette tangenti in P a V_n , ossia delle rette reali (o complesse) di S_n passanti per P , la T definisce intrinsecamente in modo noto (n.1) un'omografia non degenera - che chiameremo l'omografia tangente a T in P - dotata generalmente di n rette unite distinte. I coefficienti di dilatazione di T nelle singole direzioni di queste rette forniscono allora n numeri (generalmente complessi), i quali risultano degli invarianti topologici-differenziali di T in P ; li chiameremo semplicemente i coefficienti di dilatazione di T in P , e vedremo più tardi (n.3) come a ciascuno di essi possa venir attribuito il significato geometrico di un certo birapporto $t o$.

Ne consegue che, per calcolare i suaccennati invarianti, si possono introdurre in V_n coordinate permissibili qualsiasi: se T trasforma il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nel punto $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e J denota la matrice jacobiana delle X rispetto alle x calcolate nel punto P , i suddetti birapporti non sono altro che le radici caratteristiche della matrice J . Il loro prodotto, vale dunque precisamente il determinante di J , il

quale è pertanto altresì un invariante topologico-differenziale di T in P , ciò che d'altronde si verifica direttamente in modo immediato.

Più generalmente, siano V_n e V'_n due varietà differenziabili (o complesse), fra cui si abbiano due corrispondenze differenziabili (o analitiche) T_1 e T_2 , le quali risultino entrambe invertibili nell'intorno di una loro coppia di punti omologhi comune (P, P') . Allora si può applicare ciò che precede alla trasformazione $T = T_1 \cdot T_2^{-1}$; la quale muta V_n in sé lasciando fisso P ; e questo fornisce n invarianti topologico-differenziali di T_1 e T_2 relativi alla coppia comune (P, P') ; Avuto riguardo a quanto sopra ed al n. 1, si ha tosto in particolare che:

Il rapporto delle densità di T_1 e di T_2 inerenti alla coppia (P, P') , costituisce un invariante topologico-differenziale a questa relativo (uguale alla densità della T nel suo punto fisso P).

3. COSTRUZIONE PROIETTIVA DEI SUDETTI INVARIANTI.

Allo scopo di giungere rapidamente ai risultati di cui si è fatto cenno nel n. 2, consideriamo uno spazio proiettivo (reale o complesso) S_{2n-1} , di dimensione d i s p a r i $2n-1$. Tre S_{n-1} subordinati di questo che siano fra loro a due a due sghebbi risultano privi di invarianti proiettivi: si ha tosto infatti che, con opportuna scelta delle coordinate omogenee di punto $(x_1, x_2, \dots, x_n, X_1, X_2, \dots, X_n)$ in S_{2n-1} , le equazioni di tali S_{n-1} possono sempre ridursi alla forma:

$$\begin{aligned} S_{n-1}^{(1)} : x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0; \quad S_{n-1}^{(2)} : X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0; \\ S_{n-1}^{(3)} : x_1 = X_1, \dots, x_n = X_n; \end{aligned}$$

rimane anzi ancora lecito di mutare le coordinate in guisa da conservare queste equazioni il che - com'è subito visto - si ottiene nel modo più generale operando una medesima sostituzione

lineare invertibile sulle x e sulle X del tutto arbitraria.

Vi sono ∞^{n-1} rette appoggiate ai tre S_{n-1} , il luogo delle quali è la V_n^n di C. Segre di equazioni

$$\wp x_i = u_i, \quad \wp X_i = \lambda u_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

ove $\wp$ è il solito fattore di proporzionalità delle coordinate, le u sono n parametri omogenei che hanno rapporti costanti lungo una di quelle rette, e λ è un parametro non omogeneo che ha il significato di b i r a p p o r t o del punto di V_n^n dopo i tre punti d'appoggio coi tre dati S_{n-1} della retta per quello ad essi incidenti (tali punti d'appoggio ottenendosi rispettivamente per $\lambda = \infty, 0, 1$).

Consideriamo ora in S_{2n-1} un quarto spazio subordinato, $S_{n-1}^{(4)}$, che non si appoggi né ad $S_{n-1}^{(1)}$ né ad $S_{n-1}^{(2)}$: le sue equazioni possono scriversi nella forma

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

ove la matrice A della a_{ij} ha determinante diverso da zero. Un tale $S_{n-1}^{(n)}$ - se è generico - incontra la suddetta V_n^n in n punti distinti: ed è chiaro che i valori assunti dal parametro λ in tali punti non sono altro che le radici caratteristiche della matrice A . Disponendo dell'arbitrarietà che v'è ancora nella scelta delle coordinate, ed estendendo se occorre S_{2n-1} al campo complesso, le equazioni di $S_{n-1}^{(4)}$ possono in generale venir ridotte alla forma

$$X_i = a_i x_i \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

le a_i essendo le suddette radici caratteristiche. Abbiamo dunque che:

Quattro S_{n-1} di S_{2n-1} ammettono generalmente n invarianti proiettivi indipendenti e non di più. Come tali, possono assumersi i birapporti delle quaterne di punti segati dai quattro S_{n-1} sulle n rette di S_{2n-1} ad essi incidenti.

Ciò premesso, riferiamoci alle due corrispondenze T_1 e T_2 di cui al penultimo capoverso del n.2. Sulla varietà $W_{2n} = V \times V'$ esse si rappresentano con due varietà n -dimensionali, $M_n^{(1)}$ ed $M_n^{(2)}$, passanti entrambi semplicemente per il punto $O = P \times P'$, ed ivi non aventi nessuna tangente in comune né fra loro né con la varietà $L_n^{(1)} = V_n \times P'$, né con la $L_n^{(2)} = P \times U'_n$. Siano ordinatamente

$$S_{2n-1}^{(1)}, \quad S_{n-1}^{(1)}, \quad S_{n-1}^{(2)}, \quad S_{n-1}^{(3)}, \quad S_{n-1}^{(4)}$$

gli spazi tangenti in O alle varietà

$$(*) \quad W_{2n}, \quad L_n^{(1)}, \quad L_n^{(2)}, \quad M_n^{(1)}, \quad M_n^{(2)} :$$

essi si trovano nelle condizioni volute per le precedenti deduzioni, sicchè definiscono nel modo indicato n invarianti proiettivi. Poichè tali spazi vengono soltanto a subire una trasformazione omografica quando si assoggetti arbitrariamente W_{2n} (ossia separatamente V_n e V'_n) ad una trasformazione differenziale (od analitica), così gli invarianti ottenuti rimangono di fatto inalterati di fronte a siffatte trasformazioni, ciò che esprimiamo precisamente dicendo ch'essi sono degli invarianti topologico-differenziali.

Non v'è ora difficoltà a riconoscere la coincidenza fra questi invarianti e quelli considerati verso la fine del n.2. Quelli introdotti al principio di tale numero col nome di coefficienti di dilatazione di Tin un punto fisso, P , non sono che loro casi partico-

lari, da essi ottenibili con l'assumere V'_n sovrapposta a V' e T_2 coincidente con la trasformazione identica di questa varietà in sè.

Rileviamo da ultimo che i risultati precedenti si applicano a due varietà $M_n^{(1)}$, $M_n^{(2)}$ segantisi in un punto O ed immerse in uno W_{2n} , che abbia come particolarità - d'altronde caratteristica per l'argomento in questione - quella di contenere due sistemi ∞^n di varietà $H_n^{(1)}$ ed $H_n^{(2)}$ mutuamente unisecantisi. Tali sono infatti sulla $W_{2n} = V_n \times V'_n$ dianzi considerata i sistemi descritti dalle

$$H_n^{(1)} = V_n \times Q', \quad H_n^{(2)} = Q \times V'_n,$$

ove Q e Q' siano punti variabili arbitrariamente rispettivamente su V_n e V'_n . Viceversa, se una W_{2n} contiene due sistemi siffatti ed inoltre due varietà $M_n^{(1)}$, $M_n^{(2)}$ passanti in modo generico per un punto O , si può definire su $M_n^{(1)}$ la corrispondenza $\odot$ che muta un punto R di $M_n^{(1)}$ in un punto R' della stessa $M_n^{(1)}$ quando la $H_n^{(1)}$ per R e la $H_n^{(2)}$ per R' sè segano in un punto di $M_n^{(2)}$. La $\odot$ ammette allora O come punto fisso; e gli n coefficienti di dilatazione di $\odot$ in O non differiscono dagli n invarianti ottenibili nel modo dianzi specificato a partire dalle $(*)$, quando si assumano come varietà $L_n^{(1)}$ ed $L_n^{(2)}$ rispettivamente le $H_n^{(1)}$ ed $H_n^{(2)}$ uscenti da O .

4. STUDIO LOCALE METRICO DELLE TRASFORMAZIONI DUALISTICHE.

Sia $\odot$ una trasformazione di classe C^1 , che muti i punti $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (d'una regione) di un E_n euclideo (reale) in iperpiani π , d'equazione $u_1 X_1 + u_2 X_2 + \dots + u_n X_n + u_{n+1} = 0$ di un altro E'_n euclideo ($n \geq 2$). Allora le u si esprimeranno come funzioni non tutte nulle di classe C^1 delle x , manifestamente alterabili per un comune fattore, dato da un'arbitraria funzione, non nulla delle x , di classe C^1 . Ciò permetterebbe di ridurre p.es. all'u-

unità una non nulla delle u , quindi di porre sotto forma un po' più semplice - ma meno simmetrica - taluno degli sviluppi analitici che seguono; e lasciamo al Lettore di esplicitare le diverse formulazioni così ottenibili.

Consideriamo la matrice quadrata d'ordine $n+1$ Δ , che si ricava orlando la matrice jacobiana $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ con la riga

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_n}, \quad u_{n+1}$$

e la colonna

$$u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1},$$

e poniamo inoltre per abbreviare

$$\omega = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Riferiamoci quindi ad una coppia di elementi (P, π) - omologhi in Θ - per i quali né ω né $\det \Delta$ si annulli, il che val quanto supporre che l'iperpiano π sia proprio e la corrispondenza Θ risulti biunivoca nell'intorno di detta coppia.

Se un punto Q di E_n , prossimo a P , tende a P arbitrariamente in guisa che la retta PQ tenda ad una retta r , l'iperpiano χ omologo di Q tende a π in modo che lo spazio ad $n-2$ dimensioni intersezione di π e χ ammette una posizione limite $\wp$, dipendente soltanto da r . La corrispondenza che così si ottiene fra le rette r di S_n uscenti da P e gli spazi $\wp$ massimi subordinati di π risulta proiettiva e non degenera (in virtù della biunivocità di Θ); questa corrispondenza può poi venir opportunamente completata stabilendo, con ovvio criterio, un riferimento biunivoco fra le orientazioni di due elementi r e $\wp$.

omologhi qualsiansi.

Si ha inoltre che il quoziente fra l'angolo infinitesimo $\pi\chi$ (misurato in radianti) e la lunghezza del segmento PQ , quando $Q \rightarrow P$, ammette un limite (non negativo) che dipende solamente dalla direzione di r ; tale numero ed il suo reciproco diconsi rispettivamente il coefficiente di dilatazione ed il coefficiente di contrazione di Θ in P nella direzione di r .

Allo scopo di determinare invarianti differenziali del 1° ordine della corrispondenza dualistica Θ relativi alla coppia (P, π) , procediamo in modo analogo a quello tenuto nel n.1 per le trasformazioni puntuali. All'uopo portiamo sulle varie semirette di E_n uscenti da P , ed a partire da questo punto, un segmento di lunghezza uguale al relativo coefficiente di contrazione, l'estremo variabile di tale segmento viene così a generare un iper cilindro ellittico, Γ , semplicemente specializzato. L'asse a di questo cilindro dicesi la direttrice di Θ relativa al punto P ; esso è precisamente la retta passante per Γ che, nella proiezione indotta da Θ fra π e la stella di centro P , corrisponde all'iperpiano all'infinito di π . L'iperpiano α di E_n perpendicolare alla a in P incontra Γ secondo un iper ellissoide, Σ , avente per centro P ; e sia A il punto (proprio) di π che corrisponde ad α nella suddetta proiezione.

E' facile associare che tale proiezione muta due qualunque rette per P coniugate rispetto a Γ in due spazi ad $n-2$ dimensioni di π fra loro ortogonali. Esistono quindi sempre in α $n-1$ rette $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ uscenti da P e fra loro a due a due perpendicolari, alle quali corrispondono in π $n-1$ spazi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{n-1}$, ad $n-2$ dimensioni passanti per A e fra loro pure a due a due perpendicolari; tali rette, che diconsi le rette principali rela-

tive a P , possono anche venir caratterizzate in base alla proprietà che, in corrispondenza ad esse, il coefficiente di contrazione o dilatazione ha un estremo finito e non nullo (non però necessariamente un massimo od un minimo), ed ai relativi coefficienti si dà pure l'attributo di principale.

Se l'iperellissoide $\mathcal{J}$ suddetto è ad assi disuguali vi è una sola $(n-1)$ -pla di rette principali uscenti da P , data dai suoi assi e costituente - insieme alla direttrice α - quelle che denominasi l'n-edro principale relativo a P ; e le lunghezze $1:c_1, 1:c_2, \dots, 1:c_{n-1}$ dei semiassi di $\mathcal{J}$ sono manifestamente uguali agli $n-1$ coefficienti di contrazione principali di $\mathcal{J}$ in P (sicchè i loro reciproci $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ coincidono precisamente coi coefficienti di dilatazione principali). E' poi chiaro quali modifiche occorran in ciò che precede nell'ipotesi che $\mathcal{J}$ risulti rotondo.

Pure in E'_n si ha un n-edro principale, invariantivamente legato a π , il quale è completamente ortogonale ed ha per vertice A , le sue facce essendo π e gli $n-1$ iperpiani a questo perpendicolari lungo i singoli spazi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{n-1}$.

Usando per brevità il linguaggio infinitesimale, possiamo inoltre dire che un punto Q di E'_n infinitamente prossimo a P lungo α vien trasformato da $\mathcal{O}$ in un iperpiano χ di E'_n , infinitamente vicino e parallelo a π : il rapporto fra la distanza $\pi\chi$ e la distanza PQ è un invariante, c , che dicesi l'indice di allungamento di $\mathcal{O}$ in P , mentre il suo reciproco $1:c$ chiamasi l'indice di restringimento di $\mathcal{O}$ in P . Si ha che:

Una trasformazione dualistica $\mathcal{O}$ fra due spazi euclidei ad n dimensioni, la quale sia biunivoca e di classe C^1 , ammette n invarianti differenziali metrici del 1° ordine, dati dall'indice di allungamento c e dagli $n-1$ coefficienti di dilatazione principali $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$

della Θ . Questi n invarianti sono generalmente fra loro indipendenti, mentre ogni altro invariante differenziale metrico del 1° ordine risulta necessariamente una loro funzione.

Per stabilire questi risultati, è opportuno d'introdurre in E_n l'iperquadrica iperboloidica non rigata Λ , detta l'iperquadrica di deformazione di Θ inerente a P , definita dalle seguenti condizioni.

1°) Λ ha per centro P e per assi gli n spigoli dell' n -edro principale di Θ relativo a P ;

2°) Λ sega la direttrice a (che è l'unico suo asse trasverso) nei due punti che hanno da P distanza $1:c$;

3°) Λ sega l'iperpiano α nell'iperellissoide (a punti immaginari) coniugato ad I .

I risultati enunciati seguono allora da ciò che:

Esiste una ed una sola reciprocità fra E_n ed E'_n che approssima la Θ nell'interno del 1° ordine della coppia (P, π) , e che muta l'iperpiano improprio di E_n nella direzione di E'_n perpendicolare a π ; essa trasforma l'iperquadrica Λ di deformazione relativa a P nell'ipersfera di S'_n avente centro A e raggio 1 .

La reciprocità in questione oltre a soddisfare a quest'ultima condizione, viene naturalmente a mutare P in π , $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ in $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$, ed a nello spazio all'infinito di π . Viceversa, queste condizioni e la suddetta, completate con quella di indurre opportuni orientamenti fra gli elementi omologhi considerati, individuano pienamente tale reciprocità. Le equazioni di questa riduconsi alla forma semplice:

$$u_1 : u_2 : \dots : u_n : u_{n+1} = c_1 x_1 : c_2 x_2 : \dots : c_{n-1} x_{n-1} : 1 : c x_n,$$

(dove i coefficienti hanno precisamente i significati dianzi specificati), quando si riferiscono E_n ed E'_n agli n -edri princi-

pali relativi a P ed a π , assumendo la direttrice a come asse x_n e l'iperpiano π come faccia $x_n=0$.

5. CALCOLO DEGLI INVARIANTI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE.

Per ciò che concerne la determinazione analitica degli elementi precedentemente introdotti relativi ad una Θ definita nel modo indicato al principio del n.4, valgono i seguenti risultati. Denotiamo con D il valor assoluto del determinante della matrice Δ , e con D_i il complemento algebrico dell'elemento $\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x_i}$ in tale determinante ($i = 1, 2, \dots, n$). Allora i coseni direttori α_i della direttrice a si calcolano mediante le

$$\alpha_i = \frac{D_i}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2}} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

e l'indice c di allungamento è dato da

$$c = \frac{D}{\omega \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2}}$$

Consideriamo inoltre la matrice ad $n+2$ righe ed $n+1$ colonne che si ricava orlando la matrice jacobiana $\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ con le righe:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial x_n}, \omega$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0$$

e con la colonna formata dagli elementi

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \omega, 0.$$

Si ha allora che la somma dei prodotti a $t-1$ a $t-1$ dei quadrati degli $n-1$ coefficienti di dilatazione principali ($2 \leq t \leq n$),

si ottiene dividendo per ω^{2t} la somma dei quadrati degli $\binom{n}{t+1} \cdot \binom{n}{t}$ minori d'ordine $t+1$ estratti dalla suddetta matrice e contenenti come subordinata la matrice $\begin{vmatrix} \omega \\ 0 \end{vmatrix}$.

In particolare, per $t = n$, da qui si deduce che il prodotto degli $n-1$ coefficienti di dilatazione principali vale

$$c_1 c_2 \dots c_{n-1} = \frac{\sqrt{D^2 + D_1^2 + \dots + D_n^2}}{\omega^n}$$

Pertanto il prodotto dell'indice di allungamento e degli $n-1$ coefficienti di dilatazione è dato da

$$d = D / \omega^{n+1}$$

Questo invariante differenziale chiamasi la densità della corrispondenza $\odot$ nella coppia (P, π) , in quanto esso - a norma di ciò che precede - dà una misura locale dell'addensarsi attorno a π degli iperpiani dello spazio E'_n corrispondenti mediante $\odot$ ai punti di E_n prossimi a P .

Un altro semplice significato geometrico della suddetta densità d , si ottiene nel modo seguente. Si fissi in E'_n un qualunque punto proprio, O , e, per ogni iperpiano π di E'_n (che provenga mediante $\odot$ da un punto P di E_n), si consideri il piede P' della perpendicolare su esso abbassata da O , oppure il polo P'' di tale iperpiano rispetto all'ipersfera di centro O e raggio 1 (talchè P' e P'' vengono a corrispondersi nell'inversione rispetto a quest'ipersfera). Assunto (com'è lecito) il punto O nell'origine degli assi $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, le coordinate X'_i ed X''_i di P' e P'' valgono:

$$X'_i = - \frac{u_i u_{n+1}}{\omega^2}, \quad X''_i = - \frac{u_i}{u_{n+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Avuto anche riguardo al n. 1, da qui si trae che:

La densità d della corrispondenza dualistica Θ si ottiene dividendo per $\overline{O P}^{n-1}$ la densità della corrispondenza puntuale che intercede fra P e P' ; od anche dividendo per $\overline{O P}^{n+1}$ la densità della corrispondenza puntuale che intercede fra P e P'' . Tali quozienti risultano perciò indipendenti dalla scelta del punto O .

6. ALCUNE TRASFORMAZIONI PARTICOLARI. RELAZIONI FRA DENSITA'.

Ove si volesse approfondire lo studio delle trasformazioni dualistiche $\Theta : P \rightarrow \pi$, fra due spazi euclidei E_n, E'_n , sarebbe opportuno far intervenire le linee direttrici e le linee principali, ossia quelle curve di E_n aventi come tangente in ogni loro punto P rispettivamente la retta direttrice od una delle $n-1$ rette principali di Θ relative a P . Si potrebbero quindi studiare $\mathcal{C}_\Theta$ per le quali una o più delle congruenze formate da tali linee risultino ortogonali, ecc.

Particolare interesse offrono - per $n \geq 3$ - quelle Θ che in ogni punto hanno gli $n-1$ coefficienti di dilatazione uguali fra loro, il che val quanto dire che per esse l'i p e r - q u a d r i c a d i d e f o r m a z i o n e in ogni punto deve risultare di r o t a z i o n e a t t o r n o a l l a r e l a t i v a d i r e t t r i c e . Tali trasformazioni dualistiche appaiono in certa guisa analoghe alle trasformazioni c o n f o r m i , in forza del primo capoverso del h.2, ed anche tenuto conto della seguente loro p r o p r i e t à c a - r a t t e r i s t i c a , che facilmente si desume dalle equazioni finali del n.4.

Se P e π sono un punto di E_n ed un iperpiano di E'_n che si corrispondono in una Θ del tipo suddetto, a due direzioni qualsiasi di E_n uscenti da P e non parallele alla relativa direttrice restano associati su π due spazi propri $(n-2)$ -dimensionali, il cui angolo risulta uguale all'angolo compreso fra i due

piani proiettanti dalla direttrice le due dimensioni considerate.

Senza approfondire qui ulteriormente le molteplici questioni suggerite da ciò che precede, ci proponiamo ora di trasportare al caso attuale - per quanto possibile - le considerazioni svolte per le trasformazioni puntuali alla fine del n.2. All'uopo ci riferiamo a due trasformazioni dualistiche Θ_1 , Θ_2 trasformanti i punti di E_n negli iperpiani di E'_n , ed aventi in comune una coppia (P, π) . Allora $T = \Theta_1 \cdot \Theta_2^{-1}$ è una trasformazione puntuale di E_n in sé che ammette P come punto fisso, e che quindi (n.2) è generalmente dotata di n coefficienti di dilatazione relativi a P ; ciascuno di questi - essendo un invariante topologico - differenziale di T in P - risulta un invariante differenziale di Θ_1 e Θ_2 inerente alla coppia (P, π) , che non muta se si assoggettano E_n ad una trasformazione differenziabile ed E'_n ad una trasformazione omografica arbitrariamente scelte. Avrebbe interesse d'indagare in quali casi tali invarianti possono venir espressi mediante i coefficienti di dilatazione principali e gli indici di-allungamento di Θ_1 e di Θ_2 in P (a prescindere dalle posizioni mutue dei vari n-e-dri principali). Un risultato parziale in proposito si ha osservando che:

La densità di T in P uguaglia il rapporto delle densità di Θ_1 e Θ_2 inerenti alla coppia (P, π) .

Per dimostrarlo, possiamo rappresentare Θ_1 nel modo indicato per Θ al principio del n.4; è inoltre lecito assumere P come punto $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ e π come iperpiano $u_1=\dots u_{n-1}=u_{n+1}=0$ (onde per π si ha $\omega = \pm u_n$), e sostituire a Θ_2 la relativa reciprocità approssimante, rappresentata dalle equazioni che si deducono da quelle date alla fine del n.4 col sostituire a c , $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ le analoghe quantità $c', c'_1, c'_2, \dots, c'_{n-1}$ relative a Θ_2 . Allora la trasformazione puntuale $T = \Theta_1 \cdot \Theta_2^{-1}$ ha le equazioni

$$X_1 = \frac{u_1(x)}{c'_1 u_n(x)}, \dots, X_n = \frac{u_{n-1}(x)}{c'_{n-1} u_n(x)}, X_n = \frac{u_{n+1}(x)}{c'_1 u_n(x)}.$$

Basta quindi calcolare il determinante jacobiano delle X rispetto alle x nel punto P , e ricordare i nn. 1, 5, per ottenere l'asserto. Da qui si deduce immediatamente che:

Il rapporto delle densità di due trasformazioni dualistiche in una loro coppia comune risulta un loro invariante proiettivo.

7. CURVATURA DI IPERSUPERFICIE E DI FORME PFAFFIANE.

Una forma pfaffiana

$$\Theta = a_1(x) dx_1 + a_2(x) dx_2 + \dots + a_n(x) dx_n$$

definisce intrinsecamente nell' E_n delle variabili x una corrispondenza dualistica Θ , e precisamente quella che associa al punto $P(x)$ l'iperpiano π di equazione

$$a_1(x)(x_1 - x_{11}) + a_2(x)(x_2 - x_{21}) + \dots + a_n(x)(x_n - x_{n1}) = 0$$

La densità di Θ nella coppia (P, π) è un invariante metrico di ω , che può denominarsi la curvatura di Θ nel punto P . Essa infatti in base al n. 5, nel caso particolare in cui Θ sia integrabile e cioè della forma

$$\Theta = g(x) d\int(x)$$

riducesi alla curvatura totale k in P dell'ipersuperficie integrale $f(x) = \text{cost.}$ che passa per P ; ciò si ottiene con facile calcolo, tenendo conto che k vien dato dalla formula nota: