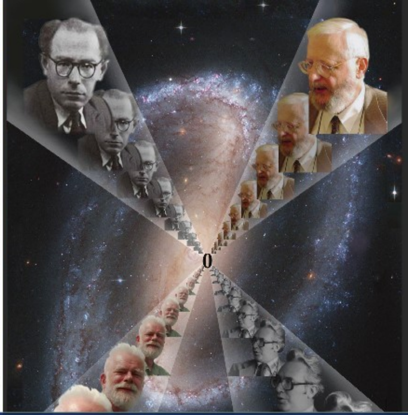
  

GESCHICHTE · KULTUREN · MENSCHEN

Thomas Sonar

3000 Jahre Analysis

Springer

Vom Zählstein zum Computer

Herausgegeben von
H.-W. Alten, A. Djafari Naini, K.-J. Förster,
B. Schmidt-Thieme, E. Wagner, H. Wesemüller-Kock
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
center for lifelong learning
Universität Hildesheim

In der Reihe „Vom Zählstein zum Computer“
sind bisher erschienen:

6000 Jahre Mathematik
Eine kulturgeschichtliche Zeitreise
Band 1: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton
Band 2: Von Euler bis zur Gegenwart
Wußing
ISBN 978-3-642-02363-7

4000 Jahre Algebra
Alten, Djafari Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, Wußing
ISBN 978-3-540-43554-9

5000 Jahre Geometrie
Scriba, Schreiber
ISBN 978-3-642-02361-3

Überblick und Biographien,
Hans Wußing et al. ISBN 978-3-88120-275-6
Vom Zählstein zum Computer – Altertum (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald ISBN 978-3-88120-236-7
Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald

Thomas Sonar

3000 Jahre Analysis

Geschichte, Kulturen, Menschen

Mit 558 Abbildungen, davon 363 in Farbe

Springer

Prof. Dr. Thomas Sonar
Institut Computational Mathematics
Technische Universität Braunschweig
Pockelsstr. 14
38106 Braunschweig
Deutschland

ISBN 978-3-642-17203-8 e-ISBN 978-3-642-17204-5
DOI 10.1007/978-3-642-17204-5
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification: 01-00, 26-03, 65-03

Einbandgestaltung: deblik, Berlin und H. Wesemüller-Kock, Hildesheim
Satz: Elena Bornschein und Sylvia Voß, Hildesheim

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Meinen Lehrern

Erwin Mues, Günter Mühlbach und *Horst Tietz*

in Dankbarkeit gewidmet.

„Ich glaube, König Gelon, daß dies der Menge der nicht mathematisch gebildeten Menschen unglaublich erscheinen wird ...“

ARCHIMEDES [Archimedes 1972, S. 360]

Thomas Sonar wurde 1958 in Sehnde bei Hannover geboren. Nach dem Maschinenbaustudium an der Fachhochschule Hannover wurde er kurzzeitig Laboringenieur im Labor für Regelungstechnik der FH Hannover und gründete ein eigenes Ingenieurbüro. Dem Mathematikstudium an der Universität Hannover folgte von 1987 bis 1989 eine Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter der DLR (damals DFVLR) in Braunschweig im Raumgleiterprojekt HERMES, dann als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl von Prof. Dr. Wolfgang Wendland in Stuttgart. Nach Studien in Oxford am Computing Laboratory promovierte Thomas Sonar 1991 im Fach Mathematik und arbeitete danach bis 1996 als Hausmathematiker am Institut für Theoretische Strömungsmechanik der DLR in Göttingen, gab dort den Anstoß zur Entwicklung des heute vielfach eingesetzten TAU-Codes zur numerischen Berechnung kompressibler Strömungen und programmierte dessen erste Versionen. 1995 erfolgte die Habilitation für das Fach Mathematik an der TU (damals TH) Darmstadt. Von 1996 bis 1999 wirkte er an der Universität Hamburg im Institut für Angewandte Mathematik und seit 1999 an der TU Braunschweig als Abteilungsleiter der Arbeitsgruppe für partielle Differentialgleichungen. Einen Ruf an die Universität Kaiserslautern und die damit verbundene Übernahme einer Führungsposition im dortigen Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik lehnte er 2003 ab. Im selben Jahr gründete er an der TU Braunschweig das bis heute sehr aktive Mathematiklehrerfortbildungszentrum „Mathe-Lok“, in dem auch regelmäßige Veranstaltungen für Schülerinnen und Schüler stattfinden.

Thomas Sonar entwickelte früh sein Interesse an der Geschichte der Mathematik, arbeitete insbesondere zur Geschichte der Navigation und der Logarithmen in England und begleitete die viel beachteten Braunschweiger Ausstellungen zum Gauß-Jahr 2005 und zum Euler-Jahr 2007 wissenschaftlich.

Weitere mathematikhistorische Arbeiten sind Eulers Analysis, seiner Mechanik und Strömungsmechanik, der Geschichte mathematischer Tafeln, William Gilberts' Magnettheorie, der Geschichte der Ballistik, dem Mathematiker Richard Dedekind, sowie den Vorgängen um den Tod Gottfried Wilhelm Leibniz' gewidmet. Im Jahr 2001 erschien nach intensiven Studien im Merton College in Oxford sein Buch über die frühen mathematischen Arbeiten von Henry Briggs. Insgesamt hat Thomas Sonar etwa 150 Fachbeiträge und 14 Bücher – zum Teil mit Kollegen – publiziert, eine Vorlesung zur Mathematikgeschichte an der TU Braunschweig etabliert und viele Jahre lang dieses Fach im Rahmen eines Lehrauftrages an der Universität Hamburg vertreten. Zahlreiche Veröffentlichungen beschäftigen sich auch mit der Vermittlung von Mathematik und Mathematikgeschichte an ein breiteres Publikum und der Verbesserung des Mathematikunterrichtes an Gymnasien.

Thomas Sonar ist Mitglied in der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft und korrespondierendes Mitglied in der Hamburger Akademie der Wissenschaften.

Vorwort des Autors

„6000 Jahre Mathematik“, „5000 Jahre Geometrie“, „4000 Jahre Algebra“ – und nun liegen „3000 Jahre Analysis“ vor. Es ist folgerichtig, nach einer Kulturgeschichte der Mathematik und nach der Geschichte von Geometrie und Algebra nun auch die Geschichte der Analysis für ein breiteres interessiertes Publikum zugänglich zu machen.

Dabei wurde versucht, an dem überaus erfolgreichen Konzept der Vorgängerbände festzuhalten: Wissenschaftlich gesicherte Fakten in einer lesbaren Form, die Freude an der Zukunftswissenschaft Mathematik und ihrer historischen Entwicklung vermitteln soll. Aber etwas ist doch anders. Während man die Kulturgeschichte der Mathematik weitgehend ohne mathematische Details spannend darlegen kann, während die Geometrie sich weitgehend aus der Geschichte ihrer Konstruktionen in wunderbaren Zeichnungen ergibt und während sich die Geschichte der Algebra – jedenfalls noch bis ins 19. Jahrhundert hinein – aus elementaren mathematischen Überlegungen entwickeln lässt, verlangt die Disziplin der Analysis mehr. Analysis ist im Kern die Wissenschaft des Unendlichen – und zwar des unendlich Großen wie des unendlich Kleinen. Ihre Wurzeln liegen schon in den Fragmenten der Vorsokratiker und deren Überlegungen zum „Kontinuum“ und der brennenden Frage, ob Zeit und Raum „kontinuierlich“ oder „atomar“ aufgebaut sind. Dünne Wurzelfäden der Analysis reichen sogar zurück bis ins Reich der Pharaonen und der Babylonier, von denen die Griechen gelernt haben. Spätestens mit Archimedes (ca. 287–212 v. Chr.) erreicht die Analysis jedoch eine Maturität, die nach einer aktiven Teilnahme des Lesers verlangt. Man kann beim besten Willen die Bedeutung der Archimedischen Analysis *nicht* verstehen, ohne einige Beispiele genau zu studieren und auch einmal mit Bleistift und Papier nachzuvollziehen. Nach Archimedes wird dieses Wissen zwar wieder verschüttet, aber spätestens mit der Renaissance schreitet die Analysis wieder in Riesenschritten fort und wieder fordert diese Wissenschaft den Leser! Um es poetisch auszudrücken: Die Analysis erweist sich als fordernde Geliebte und man muss sich ihr hingeben, wenn man sie verstehen will.

Aber keine Angst! Diese Bemerkungen sollen nicht abschreckend wirken – im Gegenteil: Sie sollen die Spannung auf die Inhalte dieses Buches erhöhen. Man muss von Zeit zu Zeit mitdenken, aber dann erhält man als Belohnung tiefe und befriedigende Einsichten in eine der wichtigsten Teildisziplinen der Mathematik, ohne die die technische Revolution und die damit verbundene Entwicklung unserer heutigen hochtechnisierten Welt undenkbar gewesen wäre.

Es sind mehrere Bücher über die Geschichte der Analysis auf dem Markt und der Leser verdient daher ein paar Bemerkungen über die Position dieses Buches im Hinblick auf die anderen. Ich beanspruche nicht, neueste und bisher unbekannte Forschungsergebnisse zu publizieren. Das vorliegende Buch unterscheidet sich dennoch von anderen ganz erheblich. Zum Einen kommt das daher, dass auch den geschichtlichen Entwicklungen im Umfeld genügend Raum eingeräumt wird, wie es sich für Bücher in dieser Reihe gehört. Des Weiteren habe ich einen Schwerpunkt auf die Vorsokratiker und das christliche Mittelalter gelegt, in dem die Kontinuumsdiskussionen bestimmend waren. Schließlich ist die Klammer, die alle in diesem Buch behandelten Themen umfasst, das „Unendliche“. Diese Klammer erlaubt es mir, im 20. Jahrhundert nicht vor der unglaublichen Breite der Entwicklung – Funktionalanalysis, Maßtheorie, Integrationstheorie, usw. – kapitulieren zu müssen, sondern vielmehr mit der Nichtstandard-Analysis zu enden, in der wir unendlich kleine und große Größen finden, in der das Kontinuum im vorsokratischen Sinne wieder zu Ehren kommt und somit ein großer Kreis geschlossen werden kann, der Zenon von Elea mit Thomas Bradwardine, Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler, Karl Weierstraß, Augustin Louis Cauchy und schließlich mit Abraham Robinson und Detlef Laugwitz verbindet. Dieser verbindenden Klammer ist es auch zu verdanken, dass ich die Entwicklung der Mengenlehre in die Geschichte der Analysis aufgenommen habe, was sicher nicht üblich ist. Aber unter dem Aspekt der Geschichte vom Umgang mit „Unendlich“ gehört die Mengenlehre einfach dazu.

Dieses Buch wurde erst ermöglicht durch die Projektgruppe Geschichte der Mathematik der Universität Hildesheim, der ich herzlich danken möchte. Besonderer Dank gebührt meinem Kollegen Heinz-Wilhelm Alten und meinem Freund und Kollegen Klaus-Jürgen Förster für ihr Vertrauen in mich. Insbesondere Herrn Kollegen Alten habe ich und hat dieses Buch außerordentlich viel zu verdanken. Er hat die Manuskripte in schneller Folge mit großer Sachkenntnis und scharfem Blick korrekturgelesen, kritische Anmerkungen gemacht und oft Textvorschläge unterbreitet. Herr Wesemüller-Kock hat sich in gewohnt professioneller Weise um die Gestaltung des Werkes gekümmert. Welche Arbeit damit verbunden ist, wenn man Bilder und Skizzen selbst anfertigen muss, vorhandene Bilder zu modifizieren hat und Bildunterschriften anfertigt oder korrigiert, kann nur der nachvollziehen, der sich einer solchen Aufgabe einmal selbst gestellt hat. Welch umfangreiche Arbeit er wieder einmal geleistet hat, kann man in diesem Buch – wie in allen anderen Bänden der Reihe – erkennen. Ohne den Verlag, der das Projekt wollte und unterstützte, hätte es dieses Buch ebenfalls nicht gegeben. Insbesondere danke ich Herrn Clemens Heine vom Springer Verlag.

Nun bin ich kein ausgebildeter Historiker. Natürlich hat mein stetes und langjähriges Interesse an Geschichte geholfen, aber auch gute Bücher wie „Der große Ploetz“ [Ploetz 2008] oder die wunderbaren Bände des Reclam-Verlages, die mit „Kleine Geschichte ...“ oder „Kleine ... Geschichte“ beginnen [Maurer 2002], [Altgeld 2001], [Dirlmeier et al. 2007], [Haupt et al. 2008]. Im Zweifel aber hilft Herr Kollege Alten oder nur ein gestandener Historiker wirklich weiter und ich schätze mich sehr glücklich, dass mein Freund und Kollege Gerd Biegel vom Institut für Braunschweigische Regionalgeschichte, trotz ständiger Arbeitsüberlastung geduldig an meiner Seite war und mir bei so mancher Virginier-Zigarre und unzähligen Espressi Einblicke in historische Zusammenhänge ermöglichte.

Frau Sylvia Voß hat mich mit großer Kompetenz LaTeXnisch betreut, wofür ich ihr sehr danken möchte. Außerordentlich dankbar bin ich Herrn Prof. Dr. Eberhard Knobloch nicht nur für die kostbare Zeit, die er mir beim Korrekturlesen geopfert hat, sondern auch für zahlreiche konstruktive Kritik und Hinweise und korrekte Übersetzungen aus dem Altgriechischen.

Vor vielen Jahren habe ich Analysis bei meinem verehrten Lehrer Prof. Dr. Erwin Mues gelernt, der sich längst im Ruhestand befindet. Seine Vorlesungen haben meine Liebe zur Analysis begründet, wofür ich ihm nur aus zeitlicher Ferne von Herzen danken kann. Meinen weiteren akademischen Lehrern Profs. Dres. Horst Tietz und Günter Mühlbach bin ich ebenfalls zu großem Dank verpflichtet. Dem ersten für die Lineare Geometrie – die von ihm bevorzugte Bezeichnung der Linearen Algebra – und Topologie und seine jahrelange väterliche Freundschaft, und dem zweiten für seine unerreichten Vorlesungen über Numerische Mathematik, in denen seine Studierenden lernen konnten, dass man erst einmal ein brauchbarer reiner Mathematiker sein muss, um die Numerik zu verstehen. Meinen drei Lehrmeistern ist dieses Buch gewidmet.

So ein Buch kostet Zeit, viel Zeit! Meine Entscheidung, dieses Buch zu schreiben, hatte für meine Frau Anke und die Kinder daher ernste Konsequenzen, wovon die „Großen“, Konstantin und Alexander, nicht so sehr betroffen waren, wohl aber Philipp und Sophie-Charlotte. Zwei Semesterferien gingen vollständig in dieses Buch, in denen ich im Arbeitszimmer oder in Bibliotheken saß, während um mich herum das Leben weiterging – ohne mich! Außerdem habe ich nicht unbedeutende Mengen von Geld in den Erwerb antiquarischer Bücher gesteckt, um meine Privatbibliothek zum Thema „Geschichte der Analysis“ zu vergrößern. Dies und die vielen, teils halbmeterhohen Bücherstapel in Wohn- und Esszimmer, auf Sofas und Stühlen und auf dem Boden, hat meine liebe Frau mit Humor und mit nur wenigen bissigen Bemerkungen hingenommen. Auch in den laufenden Semestern habe ich viel Zeit in dieses Buch gesteckt, was meine Studierenden (hoffentlich!) nicht bemerkt haben, meine Familie aber sehr wohl. Nach dem Erscheinen der beiden Bände „6000 Jahre Mathematik“ von Hans Wußing brachte meine Frau es auf den Punkt: „Mein Mann hat eine Geliebte, die ist 6000 Jahre alt, und er liebt sie wirklich!“ Dafür, dass sie es bis heute mit mir und der Geliebten ausgehalten hat, danke ich ihr von ganzem Herzen.

Thomas Sonar

Vorwort des Herausgebers

3000 Jahre Analysis - mit diesem Band der Reihe „Vom Zählstein zum Computer“ legt die Projektgruppe Geschichte der Mathematik der Universität Hildesheim nach den bereits wiederholt aufgelegten beiden Bänden „6000 Jahre Mathematik“ und den Bänden „5000 Jahre Geometrie“ und „4000 Jahre Algebra“ einen weiteren Band über die Entwicklung eines großen Teilgebietes der Mathematik vor, eines Teilgebietes, das zu den Grundpfeilern der Mathematik gehört, in den beiden letzten Jahrhunderten rasanten Aufschwung und enorme Ausdehnung gewonnen hat und in seinen Anwendungen fast alle Bereiche unseres Lebens durchdringt.

Analysis – nicht zu verwechseln mit dem in Chemie, Medizin, Wirtschaft und Politik verwendeten Begriff Analyse – bei diesem Oberbegriff für viele große Teilgebiete der Mathematik denken Gymnasiasten, Studierende und viele, die sich mit „Höherer“ Mathematik befasst haben wohl zuerst an Differential- und Integralrechnung. Aber die haben doch Leibniz und Newton entdeckt und das war erst vor gut 300 Jahren! Wieso dann 3000 Jahre Analysis? Anderen fällt dazu vielleicht das schwer auszusprechende Wort Infinitesimalrechnung ein. Aber was bedeutet eigentlich infinitesimal? Wörtlich soviel wie „unendlich klein“! Und damit sind wir auf einen grundlegenden Begriff der Analysis gestoßen. Von „unendlich kleinen“ und „unendlich großen“ Größen ist dort die Rede, vom „Streben gegen Null“ und vom „Streben gegen Unendlich“, von Grenzwerten, Differentialen und Integralen, von Infinitesimalen und Indivisiblen, von Stetigkeit und dem Kontinuum der reellen Zahlen, auch von irrationalen und sogar von transzendenten, transfiniten und hyperreellen Zahlen. Aber was bedeuten all diese Begriffe und wie sind sie entstanden?

Antworten auf all diese Fragen gibt Thomas Sonar in diesem Buch! In erfrischend verständlicher Sprache spannt er einen weiten Bogen von den Vorstufen mathematisch-analytischen Denkens in den alten Kulturen des Vorderen Orients, über das Entsetzen der Pythagoreer bei der Entdeckung inkommensurabler Strecken (und damit irrationaler Zahlen), die Diskussionen über Kontinuum und Atomismus, Infinitesimale und Indivisible im Griechenland der Antike, fast 2000 Jahre später in der scholastischen Philosophie und Mathematik des Mittelalters, dann in der Renaissance bis hin zum Streit über die Kontinuumhypothese im 20. Jahrhundert und den überraschenden Beweisen von Gödel und Cohen, dass diese im Rahmen der von Fraenkel und Zermelo axiomatisierten Mengenlehre weder beweisbar noch zu widerlegen, also unentscheidbar ist.

Analysis wird deshalb oft auch als „Wissenschaft des Unendlichen“ charakterisiert und Leonhard Euler spricht im Vorwort seiner „Introductio in Analysin infinitorum“ von der Analysis des Unendlichen. Deshalb ist das Unendliche auch Klammer und Leitlinie dieses Buches und sein Autor beschränkt sich bewusst auf die Darstellung der historischen Entwicklung dieser grundlegenden Begriffe der Analysis. Ausführlich beschreibt er ihre Entwicklung und Wandlung im Streit von Mathematikern und Philosophen in langen Jahrhunderten bis hin zu den unendlich kleinen und unendlich großen bzw. hyperreellen Zahlen der erst in den letzten 50 Jahren entwickelten Ausprägungen der Nichtstandard-Analysis.

Das unendlich Kleine führt zur Infinitesimale, unbegrenzt Teilbares zum Infinitesimalkalkül, zu Differential und Integral, das unendlich Große als ohne Ende Wiederholbares zum Integral als Gesamtheit von Indivisiblen, zu unendlichen Folgen und Reihen und ihren Grenzwerten, zu den Hierarchien der unendlichen Mächtigkeiten in Cantors Mengenlehre, zu transfiniten Kardinal- und Ordinalzahlen, zu vollständiger und zu transfiniter Induktion. Beide sind neben dem Funktionsbegriff ausschlaggebend und zielführend bei der Definition und zur Klärung grundlegender Begriffe der Analysis: Grenzwert, Stetigkeit, Konvergenz, Differential und Integral.

Hingegen werden die mehrdimensionale Analysis und viele Zweige der modernen Analysis - Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Differentialgeometrie, Vektoranalysis und Funktionalanalysis nur in Anfängen und Grundzügen skizziert. Andere Teilgebiete wie die Theorie der reellen Funktionen und der unendlichen Reihen, Maß und Integral, Topologie, Approximationstheorie, Numerische Analysis und das riesige Gebiet der Funktionen komplexer Veränderlicher werden nur erwähnt, weil die Darstellung ihrer Geschichte den Rahmen dieses Buches sprengen würde und deshalb anderen Bänden vorbehalten bleibt.

Wie die Analysis und ihre Anwendungen heutzutage in fast alle Bereiche unseres Lebens eingedrungen sind, uns auf Schritt und Tritt begleiten - das erfährt der Leser im letzten Kapitel dieses Buches.

Wie in den anderen Bänden dieser Reihe ist die Darstellung eingebettet in die allgemeine und kulturelle Geschichte, in jedem Kapitel eingeleitet durch eine Tabelle und eine historische Einführung. Die Lebensläufe der Gelehrten geben Aufschluss über ihre Leistungen und Ergebnisse und das Umfeld ihres Wirkens. Am Ende jedes Kapitels (bis auf das erste und das letzte) sind die wesentlichen Inhalte und Ergebnisse der Mathematik in der jeweiligen Epoche in einer Tabelle aufgelistet und Aufgaben angegeben, deren Bearbeitung den Leser zu erneutem Nachdenken und tieferem Verständnis führen soll. Zahlreiche farbige Abbildungen und viele Figuren unterstützen und erläutern den Text. Ausführliche Verzeichnisse erleichtern das Nachschlagen.

Auch für dieses Buch ist es uns nicht gelungen, für einige Abbildungen die Rechtsinhaber zu ermitteln bzw. unsere Anfragen blieben unbeantwortet. Betroffene und Personen, die zur Klärung beitragen können, werden gebeten, sich beim Verlag zu melden.

„Sie haben eindeutig ein sehr schönes Buch verfasst“ schrieb Prof. E. Knobloch nach kritischer Durchsicht des Manuskripts. Dem kann ich mich nur anschließen und tue dies mit herzlichem Dank an ihn und an den Autor Thomas Sonar, für seinen unermüdlichen Einsatz, für die vielen Vorlagen von Abbildungen und Figuren und für das Eingehen auf meine Vorschläge zur Ergänzung und Umstellung des Textes.

Mein besonderer Dank gilt dem Medienwissenschaftler und Mitherausgeber H. Wesemüller-Kock. In bewährter Weise hat er wieder die graphische Gestaltung des Buches maßgebend geprägt, auch Beiträge und Anregungen zum Text gegeben. Mit viel Hingabe hat er für viele Abbildungen zum historischen und kulturellen Hintergrund recherchiert und dieses Werk hervorragend visuell gestaltet. Besondere Anerkennung verdienen die Schmuckseiten am Anfang der Kapitel. Für die Unterstützung bei dieser Arbeit und die Besorgung der Lizenzen danke ich Frau Anne Gottwald. Für die Umsetzung und Überprüfung der Texte, der Abbildungen und der umfangreichen Verzeichnisse und den endgültigen Satz sage ich Frau Elena Bornschein und Frau Sylvia Voß herzlichen Dank, für die Unterstützung bei dieser Arbeit danke ich Frau Monika Winkler und den Mitarbeiterinnen im Institut für Mathematik und Angewandte Informatik, Frau Bettina David und Frau Tanja Seifert.

Meinen Kollegen und Mitherausgebern Prof. K.-J. Förster und Prof. E. Wagner gebührt besonderer Dank für die Unterstützung zur Finanzierung all dieser Arbeiten, dem Springer Verlag und seinem verantwortlichen Redakteur, Herrn C. Heine, danke ich für das Eingehen auf meine Wünsche und die hervorragende Ausstattung dieses Buches.

Möge auch dieser Band einen breiten Leserkreis erreichen, vielen Schülern und Studenten Anregungen zum tieferen Eindringen in die Analysis und besseres Verständnis für ihre Methoden und Anwendungen vermitteln und vielen Menschen Einblick geben in den Jahrtausende währenden Prozess der Entstehung und den Kern der mathematischen Analysis, einer Wissenschaft, die uns – ohne dass wir es merken – auf Schritt und Tritt begleitet.

Hildesheim, im Januar 2011

Im Namen der Herausgeber

Heinz-Wilhelm Alten
Leiter der Projektgruppe
Geschichte der Mathematik
der Universität Hildesheim

Hinweise für den Leser

Runde Klammern enthalten ergänzende Einschübe, Lebensdaten oder Hinweise auf Abbildungen.

Eckige Klammer enthalten

- Auslassungen und Einschübe in Zitaten
- im laufenden Text Hinweise auf Literatur
- unter Abbildungen Quellenangaben

Abbildungen sind nach Teilkapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Abb. 10.1.4 die vierte Abbildung in Abschnitt 10.1 von Kapitel 10.

Die Namen arabischer Gelehrter sind im Text der deutschen Aussprache entsprechend geschrieben. In Klammern und im Personenverzeichnis ist außerdem die wissenschaftliche Transskription aufgeführt.

Die Originaltitel von Büchern und Zeitschriften sind kursiv wiedergegeben, wörtliche Zitate kursiv. Auf weiterführende Literatur bzw. auf Erläuterungen eines nur verknappt dargestellten Sachverhaltes wird durch Hinweise wie (vgl. ausführlich in...) verwiesen.

Im Literaturverzeichnis ist wortwörtlich oder inhaltlich zitierte sowie weiterführende Literatur aufgeführt.

Inhaltsverzeichnis

1 Prolog: 3000 Jahre Analysis 1

1.1 Was ist Analysis? 3

1.2 Vorläufer von π 4

1.3 Das π der Bibel 7

1.4 Volumen eines Pyramidenstumpfes 8

1.5 Babylonische Näherung an $\sqrt{2}$ 13

2 Das Kontinuum in der griechisch-hellenistischen Antike . . . 15

2.1 Die Griechen formen die Mathematik 18

2.1.1 Der Beginn: Thales von Milet und seine Schüler 19

2.1.2 Die Pythagoreer 21

2.1.3 Die Proportionenlehre des Eudoxos in Euklids Elementen 27

2.1.4 Die Methode der Exhaustion – Integration auf griechisch 33

2.1.5 Das Problem der Kontingenzwinkel 37

2.1.6 Die drei großen klassischen Probleme 38

2.2 Kontinuum versus Atome – Infinitesimale versus Indivisible . . 47

2.2.1 Die Eleaten 48

2.2.2 Atomismus und Kontinuum 49

2.2.3 Indivisible und Infinitesimale 51

2.2.4 Die Zenonschen Paradoxien 54

2.3 Archimedes 59

2.3.1 Leben, Tod und Anekdoten 59

2.3.2 Das Schicksal der archimedischen Schriften 67

2.3.3 Die Methodenschrift: Zugang hinsichtlich der mechanischen Sätze 71

2.3.4 Die Quadratur der Parabel durch Exhaustion 76

2.3.5 Über Spiralen 80

2.3.6 Archimedes fängt π 84

2.4 Die Beiträge der Römer zur Analysis 86

2.5 Aufgaben zu Kapitel 2 89

3 Wie Wissen wanderte – Vom Orient zum Okzident 91
3.1 Der Niedergang der Mathematik und die Rettung durch die Araber 93
3.2 Die Beiträge der Araber zur Analysis 98
3.2.1 Avicenna (Ibn Sīnā): Universalgelehrter im Orient 98
3.2.2 Alhazen (Al-Haiṯam): Physiker und Mathematiker 99
3.2.3 Averroës (Ibn Rušd): Aristoteliker im Islam 106
3.3 Aufgaben zu Kapitel 3 108
4 Kontinuum und Atomistik in der Scholastik 109
4.1 Der Wiederbeginn in Europa 111
4.2 Die große Zeit der Übersetzer 120
4.3 Das Kontinuum in der Scholastik 127
4.3.1 Robert Grosseteste 130
4.3.2 Roger Bacon 131
4.3.3 Albertus Magnus 133
4.3.4 Thomas Bradwardine 136
4.3.5 Nicole Oresme 142
4.4 Scholastische „Abweichler“ 148
4.5 Nicolaus von Kues 150
4.5.1 Die mathematischen Werke 152
4.6 Aufgaben zu Kapitel 4 156
5 Indivisible und Infinitesimale in der Renaissance 157
5.1 Renaissance: Die Wiedergeburt der Antike 159
5.2 Die Schwerpunktrechner 162
5.3 Johannes Kepler 170
5.3.1 Neue Stereometrie der Fässer 190
5.4 Galileo Galilei 195
5.4.1 Der Umgang Galileis mit dem Unendlichen 203
5.5 Cavalieri, Guldin, Torricelli und die hohe Kunst der Indivisiblen 208
5.5.1 Die Indivisiblenrechnung nach Cavalieri 212
5.5.2 Die Kritik durch Guldin 220
5.5.3 Die Kritik durch Galilei 221
5.5.4 Torricellis scheinbares Paradoxon 222
5.5.5 De Saint-Vincent und die Fläche unter der Hyperbel .. 224
5.6 Aufgaben zu Kapitel 5 233

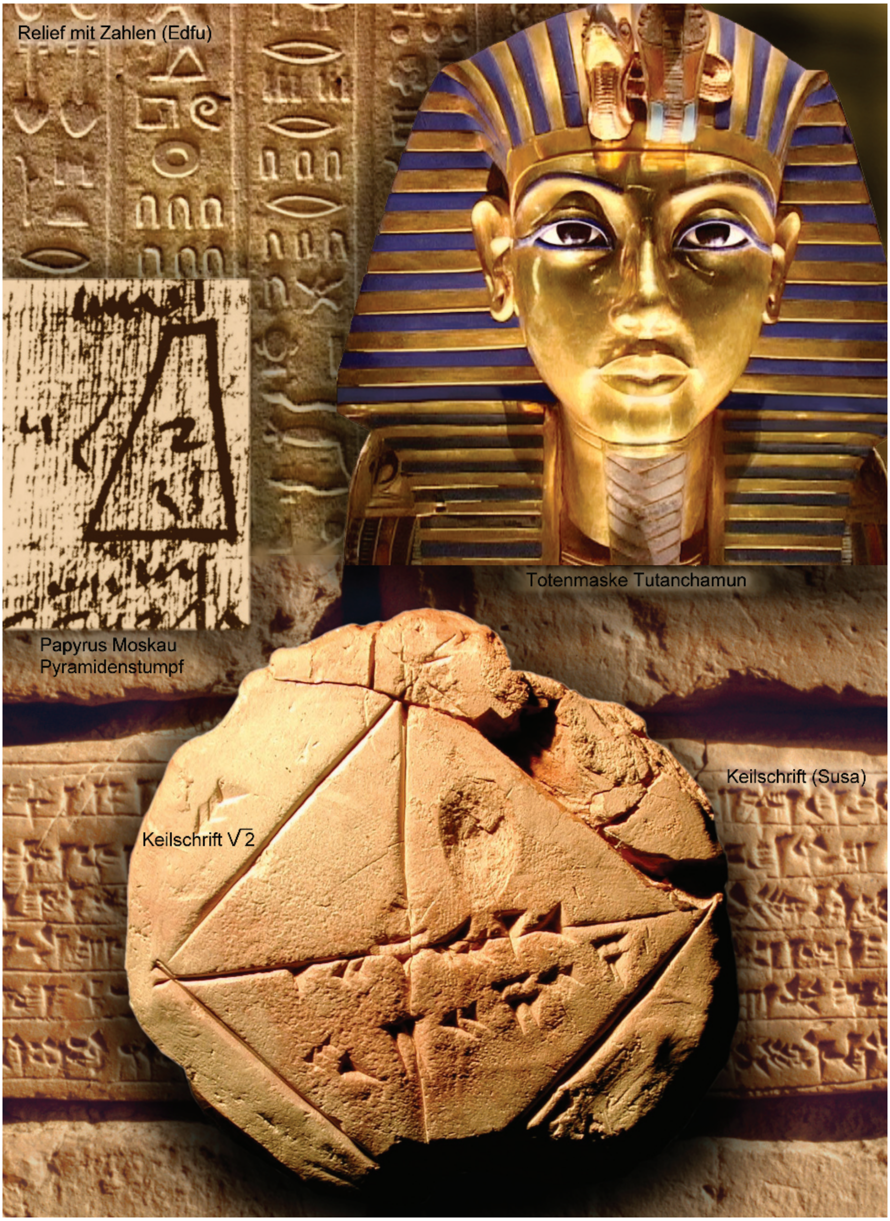
6 An der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert 235
6.1 Analysis vor Leibniz in Frankreich 237
6.1.1 Frankreich an der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert 237
6.1.2 René Descartes 240
6.1.3 Pierre de Fermat 250
6.1.4 Blaise Pascal 260
6.1.5 Gilles Personne de Roberval 273
6.2 Analysis vor Leibniz in den Niederlanden 279
6.2.1 Frans van Schooten jr. 281
6.2.2 René François Walther de Sluse 281
6.2.3 Johann van Waveren Hudde 283
6.2.4 Christiaan Huygens 286
6.3 Analysis vor Newton in England 289
6.3.1 Die Entdeckung der Logarithmen 289
6.3.2 England an der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert . 290
6.3.3 John Napier und die Napierschen Logarithmen 294
6.3.4 Henry Briggs und seine Logarithmen 301
6.3.5 England im 17. Jahrhundert 312
6.3.6 John Wallis und die Arithmetik des Unendlichen 315
6.3.7 Isaac Barrow und die Liebe zur Geometrie 325
6.3.8 Die Entdeckung der Reihendarstellung des Logarithmus durch Nicolaus Mercator 332
6.3.9 Die ersten Rektifizierungen: Harriot und Neile 337
6.3.10 James Gregory 346
6.4 Analysis in Indien 347
6.5 Aufgaben zu Kapitel 6 351
7 Newton und Leibniz – Giganten und Widersacher 353
7.1 Isaac Newton 355
7.1.1 Kindheit und Jugend 355
7.1.2 Der Student in Cambridge 358
7.1.3 Der Lucasische Professor 366
7.1.4 Alchemie, Religion und die große Krise 370
7.1.5 Newton als Präsident der Royal Society 375
7.1.6 Das Binomialtheorem 377

7.1.7 Die Fluxionsrechnung . . . 378
7.1.8 Der Hauptsatz . . . 381
7.1.9 Kettenregel und Substitutionen . . . 383
7.1.10 Das Rechnen mit Reihen . . . 383
7.1.11 Integration durch Substitution . . . 385
7.1.12 Newtons letzte Arbeiten zur Analysis . . . 387
7.1.13 Differentialgleichungen bei Newton . . . 387
7.2 Gottfried Wilhelm Leibniz . . . 389
7.2.1 Kindheit, Jugend und Studium . . . 389
7.2.2 Leibniz in Mainzer Diensten . . . 392
7.2.3 Leibniz in Hannover . . . 395
7.2.4 Der Prioritätsstreit . . . 401
7.2.5 Erste Erfolge mit Differenzenfolgen . . . 405
7.2.6 Die Leibnizsche Notation . . . 407
7.2.7 Das charakteristische Dreieck . . . 411
7.2.8 Die unendlich kleinen Größen . . . 414
7.2.9 Das Transmutationstheorem . . . 418
7.2.10 Das Kontinuitätsprinzip . . . 421
7.2.11 Differentialgleichungen bei Leibniz . . . 423
7.3 Erste Kritik: George Berkeley . . . 424
7.4 Aufgaben zu Kapitel 7 . . . 427
8 Absolutismus, Aufklärung, Aufbruch zu neuen Ufern . . . 429
8.1 Historische Einführung . . . 431
8.2 Jakob und Johann Bernoulli . . . 439
8.2.1 Die Variationsrechnung . . . 444
8.3 Leonhard Euler . . . 448
8.3.1 Der Funktionsbegriff bei Euler . . . 460
8.3.2 Das unendlich Kleine bei Euler . . . 462
8.3.3 Die trigonometrischen Funktionen . . . 465
8.4 Brook Taylor . . . 467
8.4.1 Die Taylor-Reihe . . . 469
8.4.2 Bemerkungen zur Differenzenrechnung . . . 470
8.5 Colin Maclaurin . . . 471
8.6 Die Algebraisierung beginnt: Joseph-Louis Lagrange . . . 471

8.6.1 Lagranges algebraische Analysis 472
8.7 Fourier Reihen und mehrdimensionale Analysis 475
8.7.1 Joseph Fourier 475
8.7.2 Frühe Diskussionen um die Schwingungsgleichung 477
8.7.3 Partielle Differentialgleichungen und mehrdimensionale Analysis 478
8.7.4 Eine Vorausschau: Die Bedeutung der Fourier-Reihen für die Analysis 479
8.8 Aufgaben zu Kapitel 8 484
9 Auf dem Weg zu begrifflicher Strenge im 19. Jahrhundert 485
9.1 Vom Wiener Kongress zum Deutschen Kaiserreich 489
9.2 Die Entwicklungslinien der Analysis im 19. Jahrhundert 497
9.3 Bernhard Bolzano und die Paradoxien des Unendlichen 497
9.3.1 Bolzanos Beiträge zur Analysis 500
9.4 Die Arithmetisierung der Analysis: Cauchy 503
9.4.1 Grenzwert und Stetigkeit 508
9.4.2 Die Konvergenz von Folgen und Reihen 509
9.4.3 Ableitung und Integral 512
9.5 Die Entwicklung des Integralbegriffs 514
9.6 Die finale Arithmetisierung der Analysis: Weierstraß 521
9.6.1 Die reellen Zahlen 524
9.6.2 Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Konvergenz 525
9.6.3 Gleichmäßigkeit 527
9.7 Richard Dedekind und seine Wegbegleiter 529
9.7.1 Die Dedekindschen Schnitte 536
9.8 Aufgaben zu Kapitel 9 542
10 An der Wende zum 20. Jahrhundert: Mengenlehre und die Suche nach dem wahren Kontinuum 543
10.1 Von der Gründung des Deutschen Kaiserreiches zu den Weltkatastrophen 546
10.2 Der heilige Georg erlegt den Drachen: Cantor und die Mengenlehre 551
10.2.1 Cantors Konstruktion der reellen Zahlen 561
10.2.2 Cantor und Dedekind 562
10.2.3 Die transfiniten Zahlen 570

10.2.4 Die Rezeption der Mengenlehre 573
10.2.5 Cantor und das unendlich Kleine 574
10.3 Auf der Suche nach dem wahren Kontinuum: Paul Du Bois-Reymond 575
10.4 Auf der Suche nach dem wahren Kontinuum: Die Intuitionisten 577
10.5 Vektoranalysis 582
10.6 Differentialgeometrie 585
10.7 Gewöhnliche Differentialgleichungen 587
10.8 Partielle Differentialgleichungen 590
10.9 Die Analysis wird noch mächtiger: Funktionalanalysis 592
10.9.1 Grundbegriffe der Funktionalanalysis 592
10.9.2 Ein geschichtlicher Abriss der Funktionalanalysis 596
10.10 Aufgaben zu Kapitel 10 605
11 Ein Kreis schließt sich: Infinitesimale in der Nichtstandardanalysis 607
11.1 Vom Kalten Krieg bis heute 611
11.1.1 Computer und Sputnikschock 613
11.1.2 Der „Kalte Krieg“ und sein Ende 615
11.1.3 Bologna-Reform, Krisen, Terrorismus 616
11.2 Die Wiedergeburt der unendlich kleinen Zahlen 618
11.2.1 Die Infinitesimalmathematik im „schwarzen Buch“ 620
11.2.2 Die Nichtstandardanalysis von Laugwitz und Schmieden 623
11.3 Robinson und die Nichtstandardanalysis 625
11.4 Nichtstandardanalysis durch Axiomatisierung: Der Ansatz von Nelson 627
11.5 Nichtstandardanalysis und glatte Welten 628
11.6 Aufgaben zu Kapitel 11 634
12 Analysis auf Schritt und Tritt 635
Literatur 647
Abbildungsverzeichnis 663
Personenverzeichnis mit Lebensdaten 683
Sachverzeichnis 693

1 Prolog: 3000 Jahre Analysis



Th. Sonar, *3000 Jahre Analysis*, Vom Zählstein zum Computer,
DOI 10.1007/978-3-642-17204-5_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

ab 3000 v. Chr.	Nomaden aus dem Norden wandern in das südliche Mesopotamien ein. Entstehung sumerischer Stadtstaaten und der Keilschrift auf Tontafeln. Einigung der Reiche am Nil. Entstehung der Hieroglyphen
ca. 2707–2170	Altes Reich in Ägypten. Die Stufenpyramide in Sakkara, die Knickpyramide in Dahschur, die großen Pyramiden des Cheops, Chefren und Mykerinos und die Sphinx in Giza entstehen
2170–2020	Erste Zwischenzeit in Ägypten
um 2235–2094	Das Reich von Akkad in Mesopotamien, begründet durch Sargon von Akkad
ca. 2137–1781	Mittleres Reich in Ägypten. Mathematische Papyri
1850	Vermutliche Entstehungszeit des Moskauer Papyrus
1793–1550	Zweite Zwischenzeit in Ägypten
1650	Ahmes schreibt den Papyrus Rhind
2000–1595	Altbabylonische Periode in Mesopotamien. Unter König Hammurabi (um 1700) entstehen die ersten Gesetzestexte der Menschheit
1675	Eine Tontafel mit der Länge der Diagonalen in einem Quadrat wird in Mesopotamien beschriftet
ca. 1550–1070	Neues Reich in Ägypten. Tempel der Hatschepsut und Königsgräber in Theben. Amuntempel in Karnak. Sonnenkult des Echnaton in Amarna
1279–1213	Rhamses II., Tempel von Abu Simbel
1070–525	Dritte Zwischenzeit und Spätzeit in Ägypten
ca. 1700–609	Assyrisches Reich. Mathematische Keilschrifttexte, Zikkurate
ca. 750–620	Neuassyrisches Reich, das erste Großreich der Weltgeschichte, Residenzen in Nimrud und Ninive
625–539	Neubabylonisches Reich, Blüte von Astrologie und Astronomie
539	Kyros der Große erobert Babylon
525	Perser erobern Ägypten
332	Alexander der Große erobert Ägypten

Bemerkung: Es gibt davon abweichende Chronologien

Abb. 1.1.1 Ägypten und Mesopotamien in vorchristlicher Zeit

1.1 Was ist Analysis?

Dreitausend Jahre Analysis? Ist die Analysis nicht erst im 17. Jahrhundert durch Newton und Leibniz entstanden?

Um diese Fragen zufriedenstellend beantworten zu können, sollten wir uns zu Beginn ansehen, was man unter Analysis versteht. Im Internet findet man unter der Adresse `http://de.wikipedia.org/wiki/Analysis` die folgende Definition:

> *Die Analysis [...] ist ein Teilgebiet der Mathematik, dessen Grundlagen von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton unabhängig voneinander entwickelt wurden. [...]*

Also doch! Analysis wäre demnach etwa 400 Jahre alt, aber Vorsicht ist geboten, denn der zitierte Wikipedia-Artikel steht zur Überprüfung seiner Qualität gerade auf dem Prüfstand und ist in dem Moment, an dem Sie diese Sätze hier lesen, vielleicht schon verschwunden!

Etwas dauerhafter als eine in der Veränderung sich befindliche Internetseite ist die gute alte Encyclopaedia Britannica. Unter „Analysis (mathematics)" findet man dort:

> *a branch of mathematics that deals with continuous change and with certain general types of processes that have emerged from the study of continuous change, such as limits, differentiation, and integration. Since the discovery of the differential and integral calculus by Isaac Newton and Gottfried Wilhelm Leibniz at the end of the 17th century, analysis has grown into an enormous and central field of mathematical research, with applications throughout the sciences and in areas such as finance, economics, and sociology.*

Dieser Definition bin ich bereit zu folgen! Es geht um die Mathematik der stetigen Veränderung, woraus sich Tangentenprobleme, Quadraturprobleme (Berechnung von Flächen unter Kurven) und schließlich mit Newton und Leibniz die eigentliche Differential- und Integralrechnung entwickelten.

In einem engeren Sinne ist Analysis aber die mathematische Teilwissenschaft der unendlichen Prozesse und der „unendlich kleinen Größen" und dieser Standpunkt soll das Band sein, das unsere Reise durch die Geschichte wie ein roter Faden begleiten soll. Nun ist das nicht durchgängig möglich. Der Begriff der „Funktion" ist in der Analysis zentral, hat aber erst einmal nichts mit unendlich kleinen Größen zu tun, dennoch gehört eine Diskussion des Funktionsbegriffs in eine Geschichte der Analysis.

Wie kommen nun aber die 3000 Jahre zustande? Nun, in der Analysis spielen auch spezielle Zahlen wie die Kreiszahl π oder $\sqrt{2}$ eine besondere Rolle, und solche Zahlen findet man bereits tatsächlich im alten Ägypten und im mesopotamischen Kulturraum.

1.2 Vorläufer von π

Bereits in einem berühmten altägyptischen Papyrus, dem Papyrus Rhind[1], in dem der Schreiber Ahmes um das Jahr 1650 v. Chr. mathematische Aufgaben kopierte, die mindestens 200 Jahre älter sind, befindet sich eine angenäherte Kreisflächenberechnung. Ahmes zeigt in Problem 48 seines Papyrus einen Kreis, der von einem Quadrat umgeben ist. Die Berechnungen darunter lassen

[1] Benannt nach dem Schotten Alexander Henry Rhind, der den Papyrus im Jahr 1858 in Luxor kaufte.

Abb. 1.2.1 Der Anfang vom Papyrus Rhind. Das Papyrus ist 5,5 m lang und 32 cm breit. Es enthält Angaben und Aufgaben zu mathematischen Themen, die wir heute zur Algebra, Bruchrechnung, Geometrie und Trigonometrie zählen. Es ist die Abschrift einer Vorlage aus der 12. Dynastie (19. Jh. v. Chr.). Der Schreiber Ahmose verfasste diese Kopie um 1650 v. Chr. in hieratischer Schrift [Department of Ancient Egypt and Sudan, British Museum EA 10057, London; Creative Commons Lizenz CC-BY-SA 2.0]

darauf schließen, dass ein Quadrat mit Seitenlänge 9 den Flächeninhalt 81, und ein Kreis mit Durchmesser 9 den Flächeninhalt 64 hat. In Problem 50 findet man dann eine konkrete Anweisung zur Berechnung einer Kreisfläche[2]:

> *Beispiel der Berechnung eines runden Feldes vom (Durchmesser) 9. Was ist der Betrag seiner Fläche? Nimm 1/9 von ihm (dem Durchmesser) weg. Der Rest ist 8. Multipliziere 8 mal 8. Es wird 64.*

Diese Rechenvorschrift läßt darauf schließen, dass die Ägypter für $\pi/4$ den Wert $\pi_{\text{Ägypten}}/4 = (8/9)^2$ verwendeten. Da sie die Kreiszahl aber gar nicht als solche kannten, ergibt sich die Frage, wie man auf diesen Wert kam. Eine Möglichkeit wäre die Verwendung eines Gitternetzes. Man umschreibt einem Kreis mit Durchmesser d ein Quadrat der Kantenlänge d und teilt das Quadrat gleichmäßig in 9 Unterquadrate nach Abb. 1.2.2 (links). Nun würde die Fläche des Quadrates die Kreisfläche massiv überschätzen, also teilt man die vier Unterquadrate in den Ecken in je zwei Dreiecke, von denen nur jeweils eines zur Flächenberechnung beiträgt (vgl. Abb. 1.2.2 (rechts)). Damit bleiben noch 5 Unterquadrate und 4 Dreiecke übrig und die Kreisfläche wird durch die Beziehung

[2] Zitiert nach [Gericke 2003, S. 55]

$$A_{\text{Kreis}} \approx 5 \cdot \left(\frac{d}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}d^2$$

angenähert. Ahmes gibt jedoch als Näherung an

$$A_{\text{Kreis}} \approx \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 .$$

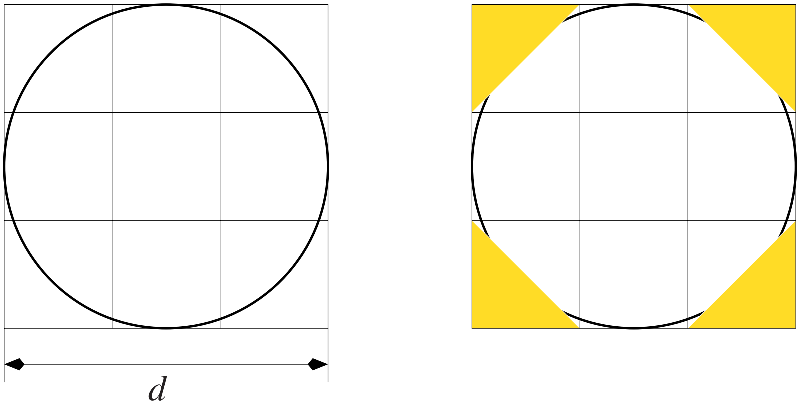


Abb. 1.2.2 Näherung der Kreisfläche von außen

Offenbar hat er die (korrekte!) Näherung $\frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2$ um die Fläche von $\frac{1}{81}d^2$ vergrößert, um schließlich zu Quadratzahlen in Zähler und Nenner zu kommen! Da die Kreisfläche durch $A_{\text{Kreis}} = \pi r^2 = (\pi/4)d^2$ gegeben ist, haben die alten Ägypter also mit einem Näherungswert

$$\pi_{\text{Ägypten}} = 3.16049$$

gearbeitet, der wirklich nicht schlecht ist! Immerhin ist der relative Fehler nur

$$\frac{\pi_{\text{Ägypten}} - \pi}{\pi} \approx 0.00601643,$$

also etwa 0.6%!

In der sehr sehenswerten Fernsehproduktion „The Story of Maths“ [Du Sautoy 2008] erläutert Marcus du Sautoy eine andere Möglichkeit, wie die Ägypter auf ihre Kreisberechnung gekommen sein könnten. Demnach stammt die Näherung $\pi_{\text{Ägypten}}/4 = (8/9)^2$ von einem alten ägyptischen Brettspiel, bei dem man Kugeln aus halbkugelförmigen Vertiefungen um ein Spielbrett herum bewegen muss. Mit den Spielkugeln läßt sich ein Kreis mit einem Durchmesser legen, der 9 Kugeln entspricht.

Abb. 1.2.3 Königin Nefertari (19. Dynastie, Gattin Rhamses II.) beim Senetspiel. Das Senetspiel konnte in seinen Regeln annähernd nachvollzogen werden. Die Regeln anderer Spiele wie Schild- oder Schlangenspiel sind dagegen weitgehend unbekannt (Wandmalerei Grabkammer Nefertari, Theben-West)

Legt man die Spielkugeln nun so um, dass sie ein Quadrat bilden, dann hat das Quadrat die Kantenlänge 8. Sollte du Sautoys Interpretation stimmen, dann liegt hier auch schon ein früher Versuch der „Quadratur des Kreises" vor, die uns später beschäftigen wird.

1.3 Das π der Bibel

Der ägyptische Wert für π ist war schon wesentlich besser als der „biblische" Wert. Im ersten Buch Könige, Kapitel 7, Vers 23, lesen wir:

> *Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen war das Maß ringsherum.*

Sollten noch Zweifel an der *Form* des Meeres vorhanden sein, so klärt uns der Vers 2 im vierten Kapitel des zweiten Buches Chronik auf:

> *Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern zehn Ellen breit, ganz rund, fünf Ellen hoch, und eine Schnur von dreißig Ellen konnte es umspannen.*

Damit ist die Form des Meeres tatsächlich ein Kreis mit Durchmesser $d = 10$ Ellen und Umfang $U = 30$ Ellen. Weil Umfang und Durchmesser eines jeden Kreises im Verhältnis $U = \pi d$ stehen, folgt damit

$$\pi_{\text{Bibel}} = \frac{U}{d} = \frac{30}{10} = 3.$$

Diesen Wert verwendeten auch die Babylonier, und Edwards schlägt in [Edwards 1979, S. 4, Ex.5] einen Erklärungsversuch dafür vor, der mir sehr realistisch zu sein scheint. An Stelle der Flächennäherung wie bei den Ägyptern kann man auch auf die Idee kommen, dem Kreis nicht nur ein Quadrat umzubeschreiben, sondern auch wie in Abb. 1.3.1 eines *ein*zubeschreiben, um die Fläche des Kreises dann als arithmetisches Mittel der beiden Quadratflächen anzunähern. Der Flächeninhalt des äußeren Quadrats ist offenbar $A_1 := d^2 = 4r^2$. Nach dem Satz des Pythagoras, den derselbe vermutlich aus Mesopotamien mitbrachte und den die Babylonier daher mit Sicherheit kannten, folgt für die Kantenlänge des inneren Quadrats $\sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r$, also für die Fläche des inneren Quadrats $A_2 := 2r^2$. Da die Fläche des äußeren Quadrats die Kreisfläche überschätzt, während die Fläche des inneren Quadrats die Kreisfläche unterschätzt, kann man hoffen, dass das arithmetische Mittel eine brauchbare Näherung an die Kreisfläche ergibt:

$$A_{\text{Kreis}} \approx \frac{A_1 + A_2}{2} = 3r^2.$$

Hier taucht also tatsächlich der biblische Wert für π auf.

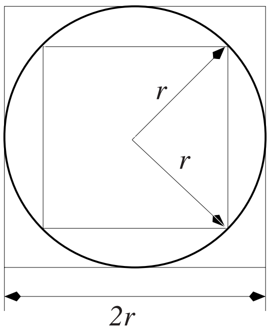


Abb. 1.3.1 Näherung der Kreisfläche von innen

1.4 Volumen eines Pyramidenstumpfes

Im sogenannten Moskauer Papyrus, der sich im Puschkin-Museum in Moskau befindet, finden wir das Problem 14, das fast schon auf eine Grundaufgabe der Analysis hinweist: es wird das Volumen von Pyramidenstümpfen

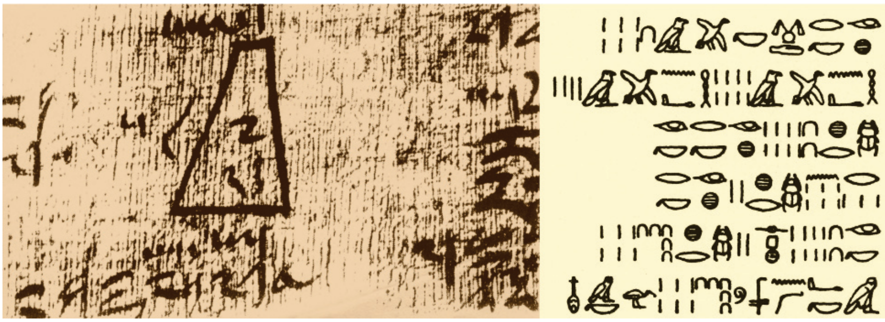


Abb. 1.4.1 Berechnung des Volumens eines Pyramidenstumpfes (Papyrus Moskau) in hieratischer Schrift und als Hieroglyphen

berechnet. Gerade für die Baumeister der Pyramiden muss diese Berechnung äußerst wichtig gewesen sein, denn die Pyramiden entstanden schichtweise. Eine Pyramide ist also nichts anderes als die Summe von Pyramidenstümpfen mit einer pyramidalen Spitze ganz oben. Wir wollen hier nicht spekulieren, wie die Ägypter zu ihrer (richtigen) Formel für das Volumen eines Pyramidenstumpfes gekommen sind, sondern verweisen auf die entsprechenden Abschnitte in [Gillings 1982] (siehe auch [Scriba/Schreiber 2010, S. 14 ff.], [Wußing 2008, S. 99f.]). Auf die Analysis hinweisend ist aber die Methode, mit der man vermutlich das Volumen einer Pyramide berechnete (in [Gillings 1982] wird noch eine weitere Methode präsentiert). Dazu betrachteten die ägyptischen Schreiber eine Pyramide, bei der die Spitze genau über einem der Eckpunkte steht.

Drei solcher rechtwinkligen (oder „schiefen") Pyramiden mit gleicher Höhe und Basiskante bilden zusammen einen Würfel mit gleicher Höhe und Basiskante, d. h. das Volumen jeder dieser Pyramiden ist ein Drittel des Volumens

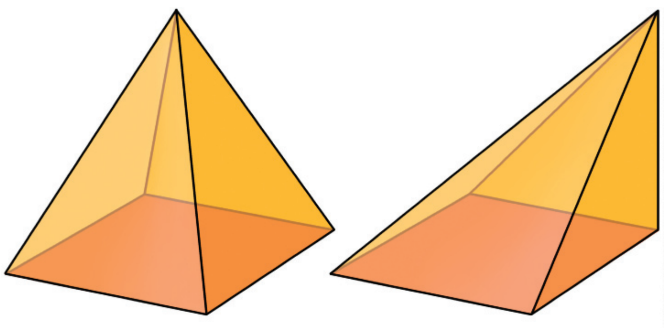


Abb. 1.4.2 Eine symmetrische und eine rechtwinklige Pyramide mit derselben Grundfläche und derselben Höhe haben das gleiche Volumen

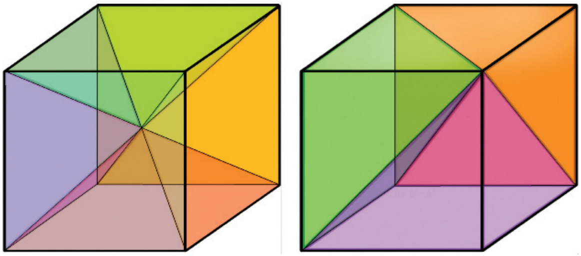


Abb. 1.4.3 Zerlegung eines Würfels in sechs symmetrische Pyramiden halber Höhe mit den Spitzen im Zentrum (li.), in drei rechtwinklige Pyramiden (re.)

des Würfels. Man kann auch aus 6 kongruenten, symmetrischen Pyramiden mit halber Höhe ihrer Basiskante einen Würfel zusammensetzen: Man setze zwei dieser Pyramiden mit der Spitze aufeinander und schließe die verbleibenden Hohlräume ringsum mit den anderen vier Pyramiden wie in Abb. 1.4.3 (links). Wenn man sich nun die rechtwinklige Pyramide in Abb. 1.4.2 in sehr viele dünne Schichten parallel zur Grundfläche zerlegt vorstellt und diese Schichten verschiebt, dann erhält man die symmetrische volumengleiche Pyramide, deren Spitze wie gewohnt über der Mitte der quadratischen Grundfläche thront. Dasselbe gilt natürlich auch für die Pyramidenstümpfe in Abb. 1.4.4. In der Tat sind die Pyramiden im alten Ägypten durch den Aufbau in vielen, vielen Schichten entstanden. Schon die für die Könige der ersten beiden Dynastien (ca. 3000–2700) als Grabanlagen erbeuten Mastabas weisen diese Schichten auf.

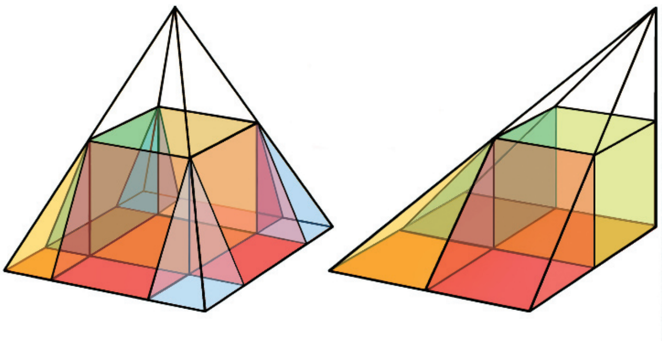


Abb. 1.4.4 Die Berechnung eines Pyramidenstumpfes lässt sich anschaulich durch die Aufteilung in seine geometrischen Grundformen nachvollziehen: bei der symmetrischen Pyramide 1 Quader in der Mitte, 4 Prismen an den Seiten und 4 rechtwinklige Pyramiden an den Ecken; bei der rechtwinkligen Pyramide derselbe Quader, jedoch nur 2 doppelt so große Prismen an den Seiten und 1 (rechtwinklige) Pyramide von vierfachem Volumen an der Ecke, so dass man für beide Stümpfe auf dasselbe Volumen $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ kommt.