U. Jarecki
H.-J. Schulz

DUBBEL MATHEMATIK

Eine kompakte Ingenieurmathematik zum Nachschlagen

Springer

Dubbel Mathematik

U. Jarecki • Hans-Joachim Schulz

Dubbel Mathematik

Eine kompakte Ingenieurmathematik zum Nachschlagen

Springer

Prof. Dr. Hans-Joachim Schulz
Beuth Hochschule für Technik
Berlin
Luxemburger Straße 10
13353 Berlin
Deutschland
hjschulz@beuth-hochschule.de

Prof. Dr. U. Jarecki †
Beuth Hochschule für Technik
Berlin

ISBN 978-3-642-22058-6 e-ISBN 978-3-642-22059-3
DOI 10.1007/978-3-642-22059-3
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Einbandentwurf: eStudio Calamar S.L.

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort zur DUBBEL Mathematik

Die *DUBBEL Mathematik* in kompakter Form ist jetzt wieder gedruckt verfügbar. Sie enthält alle wesentlichen Elemente der *Ingenieursmathematik* für die Studierenden des Maschinenbaus und für den in der Industrie tätigen Ingenieur. Hervorragend eignet sie sich zum schnellen Nachlesen von mathematischen Regeln und Zusammenhängen und ergänzt damit das Standardwerk DUBBEL, das jetzt in der 23. Auflage vorliegt.

Weitere Informationen und das ausführliche Inhaltsverzeichnis zum
DUBBEL – Taschenbuch für den Maschinenbau
finden Sie unter
http://www.springer.com/engineering/mechanical+eng/book/978-3-642-17305-9

Die Herausgeber des DUBBEL K.-H. Grote und J. Feldhusen

Inhaltsverzeichnis

A Mathematatik

1 Mengen, Funktionen und Boolesche Algebra

U. Jarecki, Berlin

1.1 Mengen

1.1.1 Mengenbegriff

Die Menge ist als eine Gesamtheit von verschiedenen Objekten mit gemeinsamen Eigenschaften erklärt. Die grundlegende Beziehung zwischen Mengen M und ihren Elementen m ist die Relation des Enthaltenseins mit dem Symbol $\in$:

$m \in M$ m ist Element von M,
$m \notin M$ m ist nicht Element von M.

Endliche Mengen können durch Aufzählung ihrer Elemente in einer Mengenklammer erklärt sein, z.B. $M=\{1, 2, 3\}$. Einelementige Mengen, z.B. $\{a\}$, sind von ihrem Element, z.B. a, zu unterscheiden. Die leere Menge $\{\ \}$ oder $\emptyset$ enthält kein Element.

Unendliche Mengen werden durch die Eigenschaften ihrer Elemente gekennzeichnet. Bedeutet $G(x)$ die Aussageform „x ist gerade Zahl“, so wird die Menge G der geraden Zahlen dargestellt durch

$$G = \{x \mid G(x)\} = \{x \mid x \text{ ist gerade Zahl}\}.$$

Mengen werden durch Punktmengen in der Ebene, z.B. Kreise (**Bild 1**), veranschaulicht (Venn-Diagramm). Auf **Bild 1 a** ist der Punkt a ein Element der Menge A, während der Punkt b nicht zu A gehört.

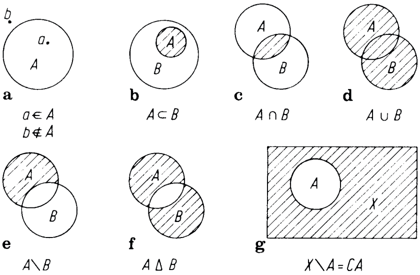

Bild 1 a–g. Venn-Diagramm

1.1.2 Mengenrelationen

Teilmengenrelation $A \subset B$ (Bild 1 b). A ist Teilmenge von B oder B ist Obermenge von A, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. So ist die Menge der natürlichen Zahlen Teilmenge der ganzen Zahlen. Es gelten die Eigenschaften

$$\emptyset \subset A,\ A \subset A; \quad \text{aus} \quad A \subset B \quad \text{und} \quad B \subset C \quad \text{folgt} \quad A \subset C.$$

Gleichheitsrelation $A{=}B$. Die Mengen A und B heißen gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Jedes Element von A ist in B und jedes Element von B ist in A enthalten. Also $A=B$ genau dann, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$.

Beispiele:

$$\{1;2\} = \{2;1\} = \{x \mid (x-1)(x-2) = 0\},$$
$$\{x \mid x^2 > 1\} = \{x \mid x > 1 \text{ oder } x < -1\}.$$

Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$. Sie ist definiert als Menge aller Teilmengen von X, also $A \in \mathfrak{P}(X)$ ist gleichbedeutend mit $A \subset X$.

1.1.3 Mengenverknüpfungen

Durchschnitt $A \cap B$ (Bild 1 c). Er ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Beispiele:

$$\{a,b,c\} \cap \{b,d\} = \{b\},$$
$$\{x \mid x \geqq 1\} \cap \{x \mid x \leqq 2\} = \{x \mid 1 \leqq x \leqq 2\}.$$

Vereinigung $A \cup B$ (Bild 1 d). Sie ist die Menge aller Elemente, die mindestens in einer der beiden Mengen A und B enthalten sind.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Beispiele:

$$\{a,b,c\} \cup \{a,d\} = \{a,b,c,d\},$$
$$\{x \mid 0 \leqq x \leqq 2\} \cup \{x \mid -1 \leqq x \leqq 1\} = \{x \mid -1 \leqq x \leqq 2\}.$$

Differenz $A \setminus B$ (Bild 1 e). Sie ist die Menge aller Elemente, die zu A und nicht zu B gehören.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Beispiele:

$$\{a,b,c\} \setminus \{b,d\} = \{a,c\},$$
$$\{x \mid x \leqq 1\} \setminus \{x \mid x < 0\} = \{x \mid 0 \leqq x \leqq 1\}.$$

Diskrepanz $A \triangle B$ (Bild 1 f) oder symmetrische Differenz. Sie ist die Menge aller Elemente, die zu A und nicht zu B oder die zu B und nicht zu A gehören.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Komplement CA (Bild 1 g). Ist A Teilmenge einer Grundmenge X, so ist $CA = X/A$.

Beispiel: Bedeutet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und ist $A = \{x \mid x \leqq 0\} \subset \mathbb{R}$, dann lautet das Komplement

$$CA = \mathbb{R} \setminus A = \{x \mid x > 0\}.$$

1.1.4 Das kartesische oder Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt $A \times B$ zweier Mengen A und B ist erklärt als die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$,

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\},$$

wobei A und B als Faktoren bezeichnet werden. Im allgemeinen ist $A \times B \neq B \times A$. a und b heißen Koordinaten des Paares (a, b). Zwei Paare (a, b) und (x, y) sind genau dann gleich, wenn $x=a$ und $y=b$.

Beispiel: Ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, dann besteht die Menge

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}\}$$

aus den geordneten Zahlenpaaren (x, y), die als Punkte in der Ebene dargestellt werden können, wobei x und y die kartesischen Koordinaten des Punktes (x, y) bedeuten.

Das Kreuzprodukt aus den n-Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ist erklärt durch

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \text{ und } a_2 \in A_2 \ldots \text{ und } a_n \in A_n\}.$$

Seine Elemente $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißen geordnete n-Tupel mit den Koordinaten $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Zwei n-Tupel sind genau dann gleich, wenn ihre Koordinaten gleich sind. Sind alle n Faktoren gleich A, so ist

$$A \times A \times A \times \ldots \times A = A^n.$$

U. Jarecki, Hans-Joachim Schulz, *Dubbel Mathematik,*
DOI 10.1007/978-3-642-22059-3_1,

1.2 Funktionen

Ist jedem Element einer Menge X genau ein Element einer Menge Y zugeordnet, so wird eine solche Zuordnung als eine Funktion f auf der Menge X mit Werten in der Menge Y bezeichnet und geschrieben

$$f: X \longrightarrow Y \quad \text{oder} \quad X \xrightarrow{f} Y \quad (f \text{ bildet } X \text{ in } Y \text{ ab}).$$

Funktion und Abbildung sind synonyme Begriffe. Für $Y = X$ bildet f die Menge X in sich ab. X ist die Definitions-, Urbild- oder Argumentmenge von f, ihre Elemente heißen Urbilder, Argumente oder auch unabhängige Veränderliche (Variable). Das jedem Element $x \in X$ durch die Funktion f eindeutig zugeordnete Element $y \in Y$ heißt Wert oder Bild der Funktion an der Stelle x und wird mit $f(x)$ bezeichnet. Symbolisch wird dies ausgedrückt durch $x \mapsto f(x)$ oder $x \mapsto y = f(x)$. Bild der Funktion f auf X ist die Menge

$$B(f) = \{f(x) | x \in X\} \subset Y.$$

Sie enthält alle Bilder oder Werte der Funktion f auf X. Graph $[f]$ einer Funktion f auf X mit Werten in Y ist die Menge $[f] = \{(x, y) | x \in X \text{ und } y = f(x)\} = \{(x, f(x) | x \in X\}$. Sie enthält als Elemente alle geordneten Paare (x, y), bei denen die erste Koordinate x Argument von f und die zweite Koordinate y Wert von f an der Stelle x ist.
Sind insbesondere X und Y Teilmengen der reellen Zahlen, $X \subset \mathbb{R}$ und $Y \subset \mathbb{R}$, so ist der Graph $[f]$ eine Menge von geordneten Zahlenpaaren, die als Punkte in der Ebene veranschaulicht werden können. Dies ist ein gebräuchliches Verfahren, um eine reellwertige Funktion mit reellem Argument graphisch als Punktemenge darzustellen.

Beispiel: Durch die Gleichung $y = e^x$ ist jeder reellen Zahl x genau eine reelle Zahl y zugeordnet. Hierdurch wird die Exponentialfunktion exp definiert. Definitionsmenge ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die Werte der Funktion sind ebenfalls reelle Zahlen. Die symbolische Darstellung der Funktion bzw. ihrer Bild- oder Wertemenge lautet also exp: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}$ bzw. $B(\exp) = \{y | y > 0\} \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Exponentialfunktion exp lautet $[\exp] = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ und } y = \exp(x)\} = \{(x, \exp(x)) | x \in \mathbb{R}\}$.

Zwischen einer Funktion $f: X \rightarrow Y$, die X in Y abbildet, und ihren Werten $f(x)$ muß klar unterschieden werden. Für die Funktion f gilt:

Bild $f(A)$ der Menge $A \subset X$ (**Bild 2**) heißt die Menge $f(A) = \{y | \ y = f(x) \text{ und } x \in A\} = \{f(x) | x \in A\} \subset Y$. Sie enthält alle Elemente $y \in Y$, die Bild eines Elements $x \in A$ sind. Für $f(X) = Y$ heißt die Funktion f surjektiv.

Urbild oder inverses Bild $f^{-1}(B)$ von $B \subset Y$ (**Bild 3**) ist die Menge $f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\} \subset X$. Sie enthält alle Urbilder x, deren Bild $f(x)$ Element von B ist. Für den Sonderfall, daß $B = \{b\}$ eine einelementige Menge ist, lautet das Urbild $f^{-1}(\{b\})$ oder kürzer $f^{-1}(b) = \{x | f(x) = b\}$ (Menge aller Urbilder x mit dem Bild b). Enthält $f^{-1}(y)$ für jedes $y \in Y$ höchstens ein Element, so heißt die Funktion f eineindeutig, eindeutig umkehrbar oder injektiv.
Surjektive und injektive Funktionen heißen bijektiv. Bei einer bijektiven Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist jedem Element $y \in Y$ genau ein

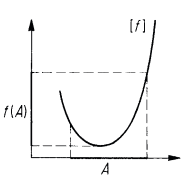

Bild 2. Bild $f(A)$

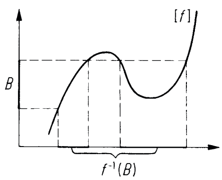

Bild 3. Urbild $f^{-1}(B)$

Urbild $x \in X$ mit $y = f(x)$ zugeordnet. Dem entspricht eine Funktion auf Y mit Werten in X. Diese Funktion heißt inverse Funktion oder Umkehrfunktion von f und wird symbolisch ausgedrückt durch $f^{-1}: Y \rightarrow X$. Ihre Definitionsmenge ist die Bildmenge von f, und ihre Bildmenge ist die Definitionsmenge von f. Es gelten die Identitäten

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle} \quad x \in X,$$
$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{für alle} \quad y \in Y.$$

Zwei Funktionen heißen gleich, wenn sie den gleichen Definitionsbereich und für jedes Argument die gleichen Werte haben.

Beispiel: Ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und $\mathbb{R}_+$ die Menge der positiven reellen Zahlen, so ist die Exponentialfunktion exp: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine eineindeutige Abbildung der Menge der reellen Zahlen auf die Menge der positiven reellen Zahlen und hat dementsprechend eine Umkehrfunktion $\exp^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, die als Logarithmusfunktion bezeichnet und mit dem Symbol „ln" gekennzeichnet wird.

1.3 Boolesche Algebra

1.3.1 Grundbegriffe

Einer Booleschen Algebra liegt eine Menge B mit mindestens zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 zugrunde, auf der eine unäre Verknüpfung, die Komplementierung mit dem Symbol „$^-$", zwei binäre Verknüpfungen, die Addition mit Symbol „$+$" und die Multiplikation mit dem Symbol „$\cdot$", erklärt sind, so daß für beliebige Elemente $a, b, c \in B$ die Eigenschaften gelten:

Kommutativität
$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a \tag{1}$$

Assoziativität
$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{2}$$

Distributivität
$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \qquad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \tag{3}$$

Adjunktivität
$$a + (a \cdot b) = a \qquad a \cdot (a + b) = a \tag{4}$$

Komplementarität
$$a + \bar{a} = 1 \qquad a \cdot \bar{a} = 0 \tag{5}$$

Idempotenz
$$a + a = a \qquad a \cdot a = a \tag{6}$$

Regel von de Morgan
$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \qquad \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \tag{7}$$

$$a + 0 = a \quad a \cdot 1 = a \tag{8}$$

$$a + 1 = 1 \quad a \cdot 0 = 0 \tag{9}$$

$$\bar{0} = 1 \quad \bar{1} = 0 \tag{10}$$

$$\overline{(\bar{a})} = a \tag{11}$$

Jede der Gln. (1) bis (10) hat ihre „duale" Form, die durch Tausch der Verknüpfungssymbole „$+$" und „$\cdot$" einerseits und der ausgezeichneten Elemente 0 und 1 andererseits entsteht. Dieses Dualitätsprinzip gilt für alle Gleichheiten und Sätze der Booleschen Algebra, die sich ebenso wie die Gln. (6) bis (11) aus den Gln. (1) bis (5) ableiten lassen.
Ein Beispiel für eine Boolesche Algebra ist die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ einer beliebigen Grundmenge X, auf der die unäre Verknüpfung als Komplement einer Menge aus $\mathfrak{P}(X)$ und die beiden binären Verknüpfungen als Durchschnitt und Vereinigung von zwei Mengen aus $\mathfrak{P}(X)$ erklärt sind. Die ausgezeichneten Elemente sind die leere Menge $\varnothing$ und die Grundmenge X.

1.3.2 Zweielementige Boolesche Algebra

Es wird eine Menge B mit zwei Elementen, die dann notwendig die ausgezeichneten Elemente 0 und 1 sind, zugrunde gelegt. Konkrete Modelle sind die Aussagen- und die Schaltalgebra, wobei die Elemente 0 und 1 die Aussagenwerte „falsch" und „wahr" bzw. die Schaltwerte „aus" und „ein" bedeuten.

Schaltalgebra

Hier werden die ausgezeichneten Elemente mit 0 und L bezeichnet, so daß $B = \{0, \mathrm{L}\}$. Ein Buchstabe, z.B. x, der durch die Elemente 0 oder L ersetzt werden kann, heißt Schaltvariable. Folgende Bezeichnungen und Symbole werden verwendet:

Komplementierung ($^{-}$) :
Negation „$^{-}$ " oder „$\neg$".
Addition $(+)$:
Oder-VerknüpfungoderDisjunktion „$\vee$".
Multiplikation $(\cdot)$:
Und-VerknüpfungoderKonjunktion „$\wedge$".

Ihre Definitionen auf der Menge $B = \{0, \mathrm{L}\}$ ergeben sich aus den Gln. (8) bis (10). Siehe **Tab. 1**.

Der Schaltalgebra liegen Netzwerke zugrunde, bei denen eine Anzahl von Schaltern mit den Variablen $E_\mathrm{i} \in \{0, \mathrm{L}\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ teils parallel, hintereinander geschaltet oder gekoppelt ist. Dem entspricht eine n-stellige Verknüpfung der Schaltvariablen E_i durch die Symbole „$\wedge$", „$\vee$", „$^{-}$", über die jedem n-Tupel $(E_1, E_2, \ldots, E_\mathrm{n})$ mit $E_\mathrm{i} \in \{0, \mathrm{L}\}$ genau einer der Werte aus $\{0, \mathrm{L}\}$, nämlich der Schaltwert des Netzwerks, zugeordnet ist. Ein solches Netzwerk wird durch eine Schaltfunktion $A = f(E_1, E_2, \ldots, E_\mathrm{n})$ mit den Eingangsgrößen $E_\mathrm{i} \in \{0, \mathrm{L}\}$ und der Ausgangsgröße $A \in \{0, \mathrm{L}\}$ beschrieben. Daher heißt die Negation auch Nicht-, die Disjunktion Oder- und die Konjunktion Und-Funktion.

Beispiel: Die durch $A = f(E_1, E_2, E_3) = \overline{(\bar{E}_1 \vee E_2)} \wedge E_3$ definierte Funktion f ordnet dem Wertetripel $(\mathrm{L}, 0, \mathrm{L})$ den Funktionswert $A = f(\mathrm{L}, 0, \mathrm{L}) = \overline{(\bar{\mathrm{L}} \vee 0)} \wedge \mathrm{L} = \overline{(0 \vee 0)} \wedge \mathrm{L} = \bar{0} \wedge \mathrm{L} = \mathrm{L} \wedge \mathrm{L} = \mathrm{L}$ zu.

Allgemein wird als n-stellige Boolesche Funktion f auf der Menge $B = \{0, \mathrm{L}\}$ eine Abbildung aller n-Tupel $(E_1, E_2, \ldots, E_\mathrm{n})$ mit $E_\mathrm{i} \in B$ in die Menge B bezeichnet, symbolisch

$$f : \underbrace{B \times B \times B \times \ldots \times B}_{n-\mathrm{mal}} \rightarrow B.$$

Tabelle 1. Boolesche Funktionen

Negation ($^{-}$) ($\bar{a}$: nicht a)

a	$\bar{a}$
0	L
L	0

Disjunktion ($\vee$) ($a \vee b$: a oder b)

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	L	L
L	0	L
L	L	L

Konjunktion ($\wedge$) ($a \wedge b$: a und b)

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	L	0
L	0	0
L	L	L

Da die E_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nur die beiden Werte 0 oder L annehmen, enthält die Definitionsmenge 2^n verschiedene n-Tupel, denen durch f genau einer der beiden Werte 0 oder L zugeordnet ist. Es gibt also $2^{(2^n)}$ verschiedene n-stellige Boolesche Funktionen auf B.

Für $n = 2$ ergeben sich 16 zweistellige Boolesche Funktionen. Von ihnen sind außer der Oder-Funktion $f(a, b) = a \vee b$ und der Und-Funktion $f(a, b) = a \wedge b$ noch von Bedeutung: (s. **Tab. 2**).

Hiernach ist die Nand-Verknüpfung die Negation der Und-Verknüpfung und die Nor-Verknüpfung die Negation der Oder-Verknüpfung. Die vorstehenden Funktionen lassen sich mit Hilfe der Grundvauerknüpfungen „$^{-}$", „$\vee$", „$\wedge$" folgendermaßen darstellen:

Nand-Funktion	$a \bar{\wedge} b = \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$,
Nor-Funktion	$a \bar{\vee} b = \overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$,
Implikation	$a \supset b = \bar{a} \vee b$,
Äquivalenz	$a \equiv b = (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b})$,
Antivalenz	$a \not\equiv b = \overline{a \equiv b} = (\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (a \vee b)$ $= (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b)$.

Allgemein ist jede n-stellige Boolesche Funktion auf $B = \{0, \mathrm{L}\}$ mit Hilfe der Grundvauerknüpfungen darstellbar. Sind $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\mathrm{n}$ die Variablen einer n-stelligen Funktion, dann heißen

$$X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \ldots \wedge X_n \quad \text{bzw.} \quad X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \ldots \vee X_n,$$

bei denen an Stelle von X_i entweder E_i oder $\bar{E}_\mathrm{i}$ steht, ihr konjunktives bzw. disjunktives Elementarglied. Sie nehmen genau für eine Belegung der Variablen mit 0 oder L den Wert L bzw. 0 an. So nimmt das konjunktive bzw. disjunktive Elementarglied $\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3$ bzw. $\bar{E}_1 \vee E_2 \vee \bar{E}_3$ genau dann den Wert L bzw. 0 an, wenn $E_1 = 0$, $E_2 = L$, $E_3 = 0$ bzw. $E_1 = L$, $E_2 = 0$, $E_3 = L$ oder kürzer, wenn $(E_1, E_2, E_3) = (0, \mathrm{L}, 0)$ bzw. $(E_1, E_2, E_3) = (\mathrm{L}, 0, \mathrm{L})$.

Ist nun f eine Funktion, die mindestens für eine Belegung der Variablen den Wert L annimmt, so werden für alle n-Tupel $(E_1, E_2, \ldots, E_\mathrm{n})$ mit $f(E_1, E_2, \ldots, E_\mathrm{n}) = \mathrm{L}$ die konjunktiven Elementarglieder gebildet, so daß diese genau für ihre entsprechenden n-Tupel den Wert L annehmen. Die disjunktive Verknüpfung dieser Elementarglieder stellt dann die Funktion f dar. Diese Darstellung heißt disjunktive Normalform der Funktion f. Vollkommen analog läßt sich eine Funktion, die mindestens einmal den Wert 0 annimmt, in der konjunktiven Normalform darstellen, die aus der Konjunktion von disjunktiven Elementargliedern besteht.

Beispiel: Die dreistellige Boolesche Funktion f auf $B = \{0, \mathrm{L}\}$ sei durch die Tabelle erklärt.

E_1	E_2	E_3	$f(E_1, E_2, E_3)$
0	0	0	0
0	0	L	L
0	L	0	0
L	0	0	L
0	L	L	0
L	0	L	0
L	L	0	L
L	L	L	0

Tabelle 2. Weitere Boolesche Funktionen

Nand-Verknüpfung ($\bar{\wedge}$) ($a \bar{\wedge} b$: a nand b)

a	b	$a \bar{\wedge} b$
0	0	L
0	L	L
L	0	L
L	L	0

Nor-Verknüpfung ($\bar{\vee}$) ($a \bar{\vee} b$: a nor b)

a	b	$a \bar{\vee} b$
0	0	L
0	L	0
L	0	0
L	L	0

Implikation ($\supset$) ($a \supset b$: a impliziert b)

a	b	$a \supset b$
0	0	L
0	L	L
L	0	0
L	L	L

Äquivalenz ($\equiv$) ($a \equiv b$: a äquivalent b)

a	b	$a \equiv b$
0	0	L
0	L	0
L	0	0
L	L	L

Antivalenz ($\not\equiv$) ($a \not\equiv b$: a antivalent b)

a	b	$a \not\equiv b$
0	0	0
0	L	L
L	0	L
L	L	0

Sie nimmt für die folgenden 3-Tupel (0,0,L), (L,0,0), (L,L,0) den Wert L an. Die entsprechenden konjunktiven Elementarglieder lauten $\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3$, $E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3$, $E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3$. Die disjunktive Verknüpfung dieser Elementarglieder liefert die disjunktive Normalform der Funktion f.

$$f(E_1, E_2, E_3) = (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) \vee (E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3).$$

Für die konjunktive Normalform werden alle 3-Tupel mit dem Funktionswert 0 betrachtet. Diese sind

$$(0,0,0), (0,\mathrm{L},0), (0,\mathrm{L},\mathrm{L}), (\mathrm{L},0,\mathrm{L}), (\mathrm{L}, \mathrm{L}, \mathrm{L}).$$

Die entsprechenden disjunktiven Elementarglieder sind

$$E_1 \vee E_2 \vee E_3, \quad E_1 \vee \bar{E}_2 \vee E_3, \quad E_1 \vee \bar{E}_2 \vee \bar{E}_3,$$
$$\bar{E}_1 \vee E_2 \vee \bar{E}_3, \quad \bar{E}_1 \vee \bar{E}_2 \vee \bar{E}_3.$$

Ihre konjunktive Verknüpfung liefert die konjunktive Normalform

$$f(E_1, E_2, E_3) = (E_1 \vee E_2 \vee E_3) \wedge (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \wedge (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3)$$
$$\wedge (\bar{E}_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) \wedge (\bar{E}_1 \vee \bar{E}_2 \vee \bar{E}_3).$$

Die Funktion f in der disjunktiven Normalform wird wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} f(E_1, E_2, E_3) &= (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge \bar{E}_3) \\ &\quad \vee (E_1 \wedge E_2 \wedge \bar{E}_3) \\ &= (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee [(E_1 \wedge \bar{E}_3) \wedge (E_2 \vee \bar{E}_2)] \\ &\quad \text{s.Distributivität } a(b+c) = ab + ac \\ &\quad \text{mit } \; a = E_1 \wedge \bar{E}_3, b = E_2 \text{ und } c = \bar{E}_2; \\ &= (\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2 \wedge E_3) \vee [(E_1 \wedge \bar{E}_3) \wedge \mathrm{L}] \\ &\quad \text{s.Komplementarität } a + \bar{a} = 1; \\ &= (\bar{E}_1 \wedge \bar{E} \wedge E_3) \vee (E_1 \wedge \bar{E}_3) \\ &\quad \text{aus } \; a \cdot 1 = 1 \; \text{ mit } \; a = E_1 \wedge \bar{E}_3. \end{aligned}$$

2 Zahlen

U. Jarecki, Berlin

2.1 Reelle Zahlen

2.1.1 Einführung

Die reellen Zahlen zeichnen sich durch Grundeigenschaften aus, nämlich eine algebraische, eine Ordnungs- und eine topologische Eigenschaft, die auf der Zahlengeraden (**Bild 1**)

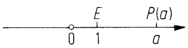

Bild 1. Zahlengerade

deutbar sind. Jeder reellen Zahl a kann genau ein Punkt $P(a)$ oder kurz a auf der Zahlengeraden zugeordnet werden, wobei insbesondere der Zahl 0 der Ursprung O und der Zahl 1 der Einheitspunkt E entspricht. Umgekehrt entspricht jedem Punkt P auf der Geraden genau eine reelle Zahl, die die Koordinate des Punkts P heißt.
Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Besondere Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	natürliche Zahlen,
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$	ganze Zahlen,
$\mathbb{Q} = \{p/q \| p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$, p und q teilerfremd$\}$	rationale Zahlen.

2.1.2 Grundgesetze der reellen Zahlen

Algebraische Eigenschaft. Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind die folgenden Verknüpfungen zweier Zahlen a und b definiert:
Addition $(+)$ mit der Summe $a+b \in \mathbb{R}$, wobei die Eigenschaften gelten:
für beliebige Zahlen a, b, c

$$a + b = b + a, \quad (a+b) + c = a + (b+c);$$

zu zwei beliebigen Zahlen a und b gibt es genau eine Zahl x, so daß gilt:

$a + x = b$, $\quad x = b - a$ heit die Differenz von b und a.

Multiplikation $(\cdot)$ mit dem Produkt $a \cdot b = ab \in \mathbb{R}$, wobei die Eigenschaften gelten:
für beliebige Zahlen a, b, c

$$ab = ba, \quad (ab)c = a(bc), \quad a(b+c) = ab + ac;$$

zu jeder Zahl $a \neq 0$ und zu jeder Zeit b gibt es genau eine Zahl x, so daß gilt:

$ax = b$, $\quad x = b/a \quad$ heit der Quotient von b und a.

Hieraus ergeben sich alle elementaren Rechenregeln wie

$$b + (-a) = b - a, \; -(a - b + c) = -a + b - c, \; a + (-a) = 0,$$
$$a \cdot 0 = 0, \; a \cdot 1 = a, \; a(b - c) = ab - ac;$$

$ab = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ oder $b = 0$;

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc},$$
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}, \quad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}.$$

Ordnungseigenschaft. In der Menge $\mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation $\leqq$ (kleiner oder gleich) definiert mit den Eigenschaften

$a \leqq a$ Reflexivität,
Wenn $a \leqq b$ und $b \leqq a$, so $a = b$
Wenn $a \leqq b$ und $b \leqq c$, so $a \leqq c$

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $a \leqq b$ oder $b \leqq a$.
$a < b$ (a kleiner b) ist erklärt durch $a \leqq b$ und $a \neq b$.

Ist $a \geqq 0$ bzw. $a > 0$,
dann heißt a nichtnegativ bzw. positiv.
Ist $a \leqq 0$ bzw. $a < 0$,
dann hei a nichtpositiv bzw. negativ.

In Verbindung mit den algebraischen Verknüpfungen gilt:

Wenn $a \leqq b$, so $a + c \leqq b + c$ für beliebiges c.
Wenn $0 \leqq a$ und $0 \leqq b$, so $0 \leqq a \cdot b$.

Hieraus folgt z.B.

$a^2 \geqq 0$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$.
Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $ac < bc$.
Wenn $a < b$ und $c < 0$, so $ac > bc$.

Topologische Eigenschaft. Jede Intervallschachtelung bestimmt genau eine reelle Zahl.
Sind $a \leqq b$ zwei reelle Zahlen, dann heißen die Zahlenmengen

$\{x \mid a \leqq x \leqq b\} = [a, b]$ abgeschlossene,
$\{x \mid a < x < b\} = (a, b)$ offene,
$\{x \mid a \leqq x < b\} = [a, b)$ und
$\{x \mid a < x \leqq b\} = (a, b]$ halboffene Intervalle.

a und b sind ihre Randpunkte, und $b - a$ ist ihre Länge.
Für eine beliebige reelle Zahl a heißen die Zahlenmengen

$\{x \mid a \leqq x\} = [a, \infty)$ und $\{x \mid x \leqq a\} = (-\infty, a]$
unbeschränkte halboffene, sowie
$\{x \mid a < x\} = (a, \infty)$ und $\{x \mid x < a\} = (-\infty, a)$
unbeschränkte offene Intervalle.

U. Jarecki, Hans-Joachim Schulz, *Dubbel Mathematik*,
DOI 10.1007/978-3-642-22059-3_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

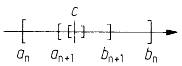

Bild 2. Intervallschachtelung

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leqq a_{n+1} \leqq b_{n+1} \leqq b_n$ für jedes $n \in N$, wobei die Intervallängen $b_n - a_n$ eine Nullfolge bilden. Auf der Zahlengeraden schrumpfen die Intervalle auf einen Punkt zusammen (**Bild 2**), dem eine reelle Zahl c zugeordnet ist.

Beispiel: Die Folge mit den Intervallen $I_n = [(1+\ 1/n)^n,\ (1+1/n)^{n+1}]$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist eine Intervallschachtelung, welche die Zahl e=2,7182818 … bestimmt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ $(1+1/n)^n \leqq \mathrm{e} \leqq (1+1/n)^{n+1}$ gilt. Die Randpunkte der Intervalle sind rationale Zahlen; sie sind approximative Werte für die irrationale Zahl e.

2.1.3 Der absolute Betrag

Der absolute Betrag (Modul) einer reellen Zahl a ist definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geqq 0 \\ -a & \text{für} \quad a \leqq 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad |a| = \max(-a, a),$$

wobei $\max(a, b)$ die größte der beiden Zahlen a und b bedeutet. Geometrisch kennzeichnet $|a|$ den Abstand des Punkts a vom Ursprung und $|b\text{-}a|$ den Abstand der beiden Punkte a und b. Es gelten $|a| \geqq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $|\ a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.

$$|-a| = |a|, \quad |ab| = |a||b|, \quad |a:b| = |a|:|b|,$$
$$-|a| \leqq a \leqq |a|, \quad ||a| - |b|| \leqq |a+b| \leqq |a| + |b|;$$

$|a| < c$ genau dann, wenn $-c < a < c$ $(c > 0)$.

2.1.4 Mittelwerte und Ungleichungen

Sind a_i für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ mit $n \geqq 2$ positive Zahlen, so sind für sie die Mittelwerte erklärt:

arithmetisch $A(a_i) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$,

geometrisch $G(a_i) = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$,

harmonisch $H(a_i) = \left[\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)\right]^{-1}$,

quadratisch $Q(a_i) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)/n}$.

Für sie gelten die Ungleichungen

$$H(a_i) \leqq G(a_i) \leqq A(a_i) \leqq Q(a_i).$$

Ist $\min a_i$ die kleinste und $\max a_i$ die größte der Zahlen a_i, so gilt $\min a_i \leqq H(a_i)$ und $Q(a_i) \leqq \max a_i$.
Bernoullische und Cauchy-Schwarzsche Ungleichungen:

$$(1+x)^n \geqq 1 + nx \ \text{für}\ 1 + x \geqq 0 \ \text{und}\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$
$$(1+x)^n > 1 + nx \ \text{für}\ 1 + x > 0 \ \text{und}\ n = 2, 3, 4, \ldots, \ \text{und}$$
$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2$$
$$\leqq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2).$$

2.1.5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Potenzen. Für die Potenzsymbole a^b ist vorauszusetzen, daß $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ oder $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{Z}$ oder $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$a^1 = a, \quad a^0 = 1, \quad 1^b = 1, \quad a^{-b} = 1/a^b;$$
$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}, \quad (a \cdot b)^c = a^c b^c, \quad (a^b)^c = a^{bc};$$
$$a^b : a^c = a^{b-c}, \quad (a:b)^c = a^c : b^c.$$

Wurzeln. Ist $b \neq 0$, so gibt es zu jeder positiven Zahl c genau eine positive Zahl a, so daß $a^b = c$. Diese Zahl $a = \sqrt[b]{c}$ heißt b-te Wurzel aus a, wobei b der Wurzelexponent und c der Radikand bedeuten. Also ist

$$a^b = c \quad \text{äquivalent} \quad a = \sqrt[b]{c} \quad \text{für}\ b \neq 0 \quad \text{und} \quad c > 0.$$

Es gilt

$$\sqrt[a]{1} = 1, \quad \sqrt[b]{c^b} = c, \quad \sqrt[b]{a}^c = \sqrt[b]{a^c} = a^{c/b},$$
$$\sqrt[bp]{a^{cp}} = \sqrt[b]{a^c}, \quad \sqrt[bc]{a} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}, \quad \sqrt[c]{ab} = \sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b},$$
$$\sqrt[c]{a:b} = \sqrt[c]{a} : \sqrt[c]{b}.$$

Logarithmen. Ist $a > 1$, so gibt es zu jeder positiven Zahl c genau eine Zahl b, so daß $a^b = c$. Diese Zahl $b = \log_a c$ heißt der Logarithmus von c zur Basis a, wobei a die Basis und c der Logarithmand oder Numerus bedeuten. Also ist

$$a^b = c \quad \text{äquivalent} \quad b = \log_a c \quad \text{für}\ a > 1 \quad \text{und} \quad c > 0.$$

Bevorzugte Logarithmen sind der dekadische mit der Basis 10, der natürliche mit der Basis e und der binäre mit der Basis 2. Es gilt

$$a^{\log_a c} = c, \quad b = \log_a a^b, \quad \log_a 1 = 0,$$
$$\mathrm{e}^{\ln c} = c, \quad b = \ln \mathrm{e}^b, \quad \ln 1 = 0.$$
$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad \log_a(b:c) = \log_a b - \log_a c,$$
$$\log_a(1/b) = -\log_a b, \quad \log_a b^c = c\ \log_a b,$$
$$\log_a \sqrt[c]{b} = (1/c) \log_a b.$$
$$\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c, \quad \lg a = \lg \mathrm{e} \cdot \ln a \ \text{mit}\ \lg \mathrm{e} = 0{,}43429$$

2.1.6 Zahlendarstellung in Stellenwertsystemen

Hierzu dient meist das Dezimalsystem mit der Basis (Grundzahl) 10 und den zehn Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$. Jeder natürlichen Zahl n wird dann eine endliche Folge von Ziffern zugeordnet, wobei jedes Glied der Folge neben seinem Ziffern- noch einen Stellenwert hat (z.B. $9021 = 9 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$). Ist $g > 1$ eine natürliche Zahl und $\{0, 1, 2, \ldots, g-1\}$ eine Ziffernmenge, so läßt sich jede natürliche Zahl n als Ziffernfolge im Stellenwertsystem mit der Basis g eindeutig darstellen.

$$n = (a_m a_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 a_0)_g = \sum_{i=0}^{m} a_i g^i$$
$$\text{für}\ a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, g-1\}.$$

Das Binär- oder Dualsystem hat die Basis 2 und die Ziffernmenge $\{0,\ 1\}$. Die Darstellung der natürlichen Zahl 18 ist z.B. $(10010)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = (18)_{10} = 18$. Da das Binärsystem ebenso wie das Dezimalsystem ein Stellenwertsystem ist, sind die für das Rechnen mit Stellenwerten gültigen Regeln übertragbar. Lediglich das kleine Einspluseins und Einmaleins sind verschieden. Im Binärsystem gilt:

Addition $0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 10.$

Multiplikation $0 \cdot 0 = 0; 0 \cdot 1 = 0; 1 \cdot 0 = 0; 1 \cdot 1 = 1.$

Beispiel: Addition bzw. Multiplikation von Dezimalzahlen im Binärsystem.

$41 + 13$		$13 \cdot 5$
		$1101 \cdot 101$
		1101
101001		0000
+ 1101		1101
1 1	Überträge	111
110110 (=54)		1000001 (=65)

Das Hexadezimalsystem hat die Basis 16 und die Ziffernmenge {0, 1, 2, …, 9, A, B, C, D, F}. Dabei entsprechen die hexadezimalen Ziffern A, B, …, F den Dezimalzahlen 10, 11, …, 15. So ist

$$(940)_{10} = 3 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^0 = (3\mathrm{AC})_{16}.$$