CIME Summer Schools

19

R. Righi (Ed.)

Teoria algebrica dei meccanismi automatici

Varenna, Italy 1956

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

R. Righi (Ed.)

Teoria algebrica dei meccanismi automatici

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
August 20-29, 1959

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10930-0 e-ISBN: 978-3-642-10932-4
DOI:10.1007/978-3-642-10932-4
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Florence, 1959.
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Varenna, Italy, August 20-29, 1959

TEORIA ALGEBRICA DEI MECCANISMI AUTOMATICI

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

M.SOUBIES-CAMY

L'ALGEBRE LOGIQUE APPLIQUEE AUX TECHNIQUES BINAIRES

ROMA - Istituto Matematico dell'Università - 1959

L'ALGEBRE LOGIQUE APPLIQUEE AUX TECHNIQUES BINAIRES

- - - - - - -

PRINCIPES ET OPERATIONS DE BASE

Le but de la présente étude est d'exposer les possibilités offertes par l'algèbre logique dans la synthèse des circuits, aussi complexes soient-ils, d'étudier ses applications à la réalisation des calculateurs numériques électroniques, et de montrer comment elle permet d'apporter des solutions originales à des problèmes industriels.

PRINCIPES ET OPERATIONS DE BASE

SOMMAIRE

LISTE DES FIGURES

M. Soubies-Camy

1. PRINCIPES ET OPERATIONS DE BASE

L'algèbre logique se propose d'étudier des combinaisons que l'on peut réaliser avec des éléments ayant en commun certaines qualités. Introduite pour la première fois par le philosophe logicien anglais George BOOLE en 1847 dans une étude sur le calcul logique en analyse mathématique, elle ne devait en fait recevoir ses premières applications pratiques que beaucoup plus tard grâce aux travaux, d'une part de deux ingénieurs japonais - NAKASIMA et HANZAWA (1936) -, d'autre part de l'Américan C.E.SHANNON (1938). Les premiers indiquèrent une méthode de calcul des circuits de contacts électriques, le second montra l'intérêt de l'algèbre logique pour l'étude des réseaux complexes. Depuis cette époque, les applications n'ont cessé de s'étendre, aux systèmes de commutation téléphonique d'abord, aux calculateurs numériques ensuite, aux problèmes industriels enfin.

De même qu'une proposition logique est vraie ou fausse, mais ne peut être à la fois vraie et fausse, de même la continuité d'un circuit sera réalisée ou non, mais ce circuit ne pourra être à la fois ouvert et fermé. C'est de ce parallélisme entre la logique des philosophes et le comportement des circuits à l'éléments multiples auxquels elle s'applique que l'algèbre logique tire son nom. On voit en même temps que *cette algèbre logique est une algèbre binaire,* dans laquelle un état ou une qualité peuvent être caractérisés par l'un ou l'autre des déux digits 0 et 1 à l'exclusion de tout autre valeur. Dans l'exemple précédent, si le circuit est fermé, il sera conventionnellement dans l'état 1; s'il est ouvert, il sera dans l'état 0.

Il existe de nombreux exemples de systèmes à deux états stables, qui sont donc susceptibles d'être utilisés pour la représentation des digits binaires: relais (une position de repos, une position de travail), bascule binaire à tubes électroniques ou à transistors, etc... Suivant les cas, la discrimination entre les deux valeurs possibles du digit sera basée sur l'absence ou la présence d'un signal, sur la valeur haute ou basse d'un potentiel, etc... Nous verrons dans ce qui suit de nombreux exemples d'application. Ce qu'il faut retenir dès maintenant, c'est que l'algèbre logique est surtout qualitative à l'inverse de l'algèbre classique qui est essentiellement quantitative, et qu'elle se prête particulièrement bien à l'étude des techniques binaires "par tout ou rien".

Dans ce domaine, elle a l'avantage de représenter les propriétés d'un circuit - aussi complexe soit-il - par une fonction, dite *fonction de commutation,* à partir de laquelle *il est possible de déduire des formes mathématiquement équivalentes représentant le fonctionnement de circuits ayant les mêmes propriétés, mais des formes topologiquement différentes.* Partant d'une structure donnée, on dispose ainsi d'un moyen simple pour obtenir, par des transformations purement mathématiques, des structures nouvelles entre lesquelles il sera possible d'opérer une sélection pour ne conserver par exemple que celle qui comporte le nombre minimum d'éléments et qui représente en conséquence la solution la plus économique.

1.1 - *Signification des opérations logiques de base :*

Pour mieux faire comprendre la signification des opérations logiques, nous considérerons successivement l'addition logique et le produit logique, en donnant dans chaque cas une signification physique et une signification géométrique.

1.1.1- Addition logique :

L'addition logique traduit ce qu'on appelle encore une condition "OU". Considérons deux variables binaires indépendantes x et y pouvant prendre chacune l'une des valeurs 0 ou 1 suivant que les états (x) et (y) qu'elles représentent respectivement sont absents ou présents. Si ces deux états concourent au même effet (S), il suffira, pour que cet effet se manifeste (S = 1), que l'un OU l'autre des deux états (x) et (y), OU les deux à la fois, existent :

$$\begin{array}{lll} S = 1 & \text{si} & x = 1 \,,\; y = 0 \\ & \text{OU si} & x = 0 \,,\; y = 1 \\ & \text{OU si} & x = 1 \,,\; y = 1 \end{array}$$

Par contre, si ni l'un ni l'autre de ces deux états n'existent, l'effet qui se manifestait dans l'une des trois éventualités précédentes est supprimé:

$$S = 0 \qquad \text{si} \qquad x = 0 \,,\; y = 0$$

On résumera ces propriétés par la relation logique d'addition:

$$S = x + y$$

On voit que l'addition logique conduit au même résultat que l'addition arithmétique, sauf dans le cas où x = 1, y = 1, pour lequel l'addition binaire donnerait : 1 + 1 = 0 (en négligeant le report qui apparaît alors).

On peut obtenir une représentation géométrique de l'addition logique en traçant les *cercles d'EULER* relatifs aux deux variables x et y (figure 1.1). On désigne sous ce nom deux cercles sécants (x) et (y) contenus tous deux dans un même cercle extérieur (R) appelé le référentiel. Par convention, le domaine intérieur à chaque cercle représente la variable binaire correspondante : x dans le cas du cercle (x), y dans le cas du cercle (y).

La somme logique $S = x + y$, dans la représentation d'EULER, est constituée par la ***réunion*** des domaines intérieurs aux cercles (x) et (y) (ensemble des aires hachurées de la figure 1.1). La condition OU s'exprimera en disant que le domaine intérieur à (x) est intérieur au contour en traits renforcés qui limite l'ensemble des aires hachurées, de même que le domaine intérieur a (y), de même encore que l'ensemble des domaines intérieurs à la fois à (x) et à (y).

Pour avoir une représentation physique de l'addition logique, il suffit d'imaginer un *jeu de deux contacts* (x) *et* (y) *montés en parallèle* et alimentant une lampe de signalisation, le circuit ainsi constitué étant alimenté par une source de tension convenable (figure 1.2). La valeur 0 de l'une des variables x ou y caractérisera l'état d'ouverture du contact (x) ou (y), et la valeur 1 son état de fermeture. Le circuit sera fermé et la lampe allumée chaque fois que l'un des contacts (x), OU l'autre (y), OU les deux à la fois, sera fermé. Au contraire, le circuit sera ouvert et la lampe éteinte chaque fois que (x) et (y) seront tous deux ouverts.

Bien entendu, la notion de somme logique est susceptible de s'étendre à un nombre quelconque n de variables. Si les n variables sont nulles, leur somme logique est nulle. Si toutes les variables, OU un certain nombre seulement, OU encore une seule variable quelle qu'elle soit est égale à l'unité, la somme logique sera dans chaque cas égale à l'unité.

1.1.2- Produit logique :

Le produit logique traduit ce qu'on appelle une condition "ET" ou condition de simultanéité. Pour que l'effet auquel concourent les deux états considérés puisse se manifester, il faut que les deux états existent simultanément, c'est-à-dire qu'on ait à la fois le premier état ET le second. En désignant comme précédemment chacun des deux états respectivement par (x) et (y), et l'effet résultant per (p), on peut écrire, en considérant les valeurs des variables et de la fonction :

$$P = 1 \quad \text{si} \quad x = 1 \quad \text{et} \quad y = 1$$

Dans tous les autres cas, si l'un seulement des états existe, ou si aucun n'existe, l'effet auquel ils concourrent tous deux est supprimé :

$$P = 0 \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} x = 1 \,,\ y = 0 \\ x = 0 \,,\ y = 1 \\ x = 0 \,,\ y = 0 \,. \end{array}$$

Les propriétés peuvent être résumées par la relation logique de multiplication :

$$P = xy$$

qui, ici, conduit au même résultat que le produit arithmétique. En se reportant aux *cercles d'EULER* relatifs aux deux variables x et y (figure 1.3), on obtiendra une représentation géométrique particulièrement simple du produit logique. En effet, ce dernier est constitué par la partie hachurée commune aux deux cercles (x) et (y), c'est-à-dire per l'*intersection* des deux cercles. La condition ET s'exprimera en disant que le domaine ainsi délimité est intérieur à la fois au cercle (x) ET au cercle (y).

Pour obtenir une représentation physique du produit logique, il suffit de remplacer le montage en parallèle des contacts (x) et (y) du circuit de la figure 1.2 par *un montage sèrie des mêmes contacts* (figure 1.4). La lampe ne s'allumera (P = 1) que lorsque les deux contacts seront fermés ($x = 1$, $y = 1$). Elle s'éteindra au contraire (P = 0) chaque fois qu'un contact ou l'autre ou les deux à la fois sera ouvert ($x = 0$, ou $y = 0$, ou $x = 0$ et $y = 0$).

De la même façon, dans le cas de n variables binaires indépendantes, leur produit logique sera égal à 1 si toutes les variables sont simultanément égales à 1. Il suffit qu'une seule variable, ou plusieurs à la fois, s'annule, pour que le produit logique des n variables s'annule en même temps.

1.1.3- Fonction NE PAS :

La fonction NE PAS est un concept de l'algèbre logique qui n'a pas son équivalent en algèbre ordinaire. Elle représente le "complément à 1" de la variable x, que l'on écrit $\bar{x}$ et que l'on lit "x barre".

Si $x = 1$, $\bar{x} = 0$; de même, si $x = 0$, $\bar{x} = 1$. On a donc les relations :

$$x + \bar{x} = 1$$

$$x\bar{x} = 0$$

$$\overline{(\bar{x})} = x$$

Géométriquement, la fonction $\bar{x}$ est représentée par le domaine extérieur au cercle d'EULER (x), ce domaine étant limité au référentiel (R).

Dans le cas de deux variables binaires x et y, si l'on se réfère à la figure 1.3, on voit qu'il existe quatre domaines élémentaires déterminés par les cercles (x), (y) et (R), et qui correspondent aux quatre produits logiques qu'il est possible de former à partir des deux variables x et y et de leurs compléments $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Ce sont respectivement :

- le domaine extérieur à (x) et extérieur à (y) : $\bar{x}\bar{y}$;
- le domaine extérieur à (x) et intérieur à (y) : $\bar{x}y$;
- le domaine intérieur à (x) et extérieur à (y) : $x\bar{y}$;

- le domaine intérieur à (x) et intérieur à (y) : xy .

D'une façon générale, dans le cas de n variables indépendantes, il serait possible de définir 2^n domaines élémentaires tous représentés par des produits logiques à n termes comprenant les variables et leurs compléments à 1.

1.2- *Propriétés des opérations logiques :*

1.2.1- Addition logique :

Les relations indiquées précédemment permettent d'écrire, d'une façon générale, x étant une variable binaire pouvant prendre l'une des deux valeurs 0 ou 1 :

$$x + 0 = x$$
$$x + 1 = 1$$
$$x + x = x$$

Géométriquement parlant, cette dernière relation montre que la somme logique ne fait pas de distinction entre un domaine couvert une seule fois et le même domaine couvert plusieurs fois.

L'addition logique est commutative :

$$x + y = y + x$$

Elle est aussi associative :

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

1.2.2- Produit logique :

On peut écrire, d'une façon générale :

$$x.0 = 0$$
$$x.1 = x$$
$$x.x = x$$

Comme précédemment, le produit logique a la même valeur quel que soit le nombre de fois où le domaine représentatif est couvert.

La multiplication logique est commutative :

$$xy = yx$$

Elle est associative :

$$(xy)z = x(yz)$$

Enfin elle est distributive :

$$xy + xz = x(y + z)$$

1.3- *Premiers exemples de calcul logique :*

1.3.1- Donnons tout d'abord un exemple de transformation de la fonction :

$$z = (x + y)(\bar{x} + \bar{y})$$

qui est engendrée dans les circuits dits "EXCLUSIVEMENT OU". Ces circuits effectuent l'addition binaire sans report des variables d'entrée x et y. En effet :

$$\begin{array}{lllll} & Z = 0 & \text{si} & x = 0 \text{ et } & y = 0 \\ & & \text{ou} & x = 1 \text{ et } & y = 1 \\ \text{et} & Z = 1 & \text{si} & x = 0 \text{ et } & y = 1 \\ & & \text{ou} & x = 1 \text{ et } & y = 0 \end{array}$$

La fonction considérée pourra s'écrire, par application des règles précédentes :

$$\begin{aligned} z &= (x + y)(\bar{x} + \bar{y}) \\ &= x\bar{x} + \bar{x}y + x\bar{y} + y\bar{y} \end{aligned}$$

Mais : $x\bar{x} = y\bar{y} = 0$

Donc : $z = \bar{x}y + x\bar{y}$

1.3.2- Démontrons la relation simple : $x(x + y) = x$.

On a : $$\begin{aligned} x(x+y) &= xx + xy = x + xy \\ &= x(1+y) = x.1 = x \end{aligned}$$

1.3.3- Etablissons la relation : $(x+y)(x+z) = x + yz$.

On a : $$\begin{aligned} (x+y)(x+z) &= (x+y)x + (x+y)z \\ &= xx + xy + xz + yz \\ &= x + xy + xz + yz \\ &= x(1+y+z) + yz \\ &= x.1 + yz \\ &= x + yz \end{aligned}$$

1.4- *Transformation de sommes logiques en produits logiques et transformation inverse :*

Nous vous proposons de démontrer les deux relations ci-après qui traduisent les propriétés des combinaisons complémentaires :

$$\overline{x + y} = \bar{x}.\bar{y}$$

$$\text{et} \qquad \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$$

La première relation est évidente si l'on se reporte à la représentation géométrique des sommes et produits logiques. On a vu en effet que la somme x + y est représentée par l'ensemble des aires hachurées intérieures à la fois au cercle (x) et au cercle (y) (figure 1.1). Son complément $\overline{x + y}$ est donc représenté par le domaine non hachuré, extérieur à la fois à (x) et (y). On voit sur la figure 1.3 que ce dernier représente précisément le produit logique $\bar{x}.\bar{y}$, ce qui démontre la relation

$$\overline{x + y} = \bar{x}.\bar{y}$$

De la même façon, le produit $\overline{xy}$ qui figure au premier membre de la seconde relation et qui est le complèment du produit xy est représenté par le domaine extérieur à la zone hachurée de la figure 1.3, intersection des cercles (x) et (y). C'est donc la réunion des domaines extérieurs à (x) et (y), laquelle est représentée par la somme $\overline{x + y}$.

On aurait pu procéder autrement, dans ce dernier cas, en remarquant que le domaine extérieur à la zone hachurée de la figure 1.3 comporte les domaines élémentaires $\bar{x}y$, $x\bar{y}$ et $\bar{x}\bar{y}$. On a donc:

$$\begin{aligned}
\overline{xy} &= \bar{x}y + x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} \\
&= \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} \\
&= \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} \\
&= \bar{x}(y + \bar{y}) + \bar{y}(\bar{x} + x) \\
&= \bar{x}.1 + \bar{y}.1 \\
&= \bar{x} + \bar{y}.
\end{aligned}$$

Les règles ci-dessus, valables pour deux variables binaires indépendantes x et y, le sont également pour un nombre quelconque de variables.

D'une façon générale, *le complément d'une somme est égale au produit des compléments de chaque terme figurant dans la somme et, inversement, le complément d'un produit est égal à la somme des compléments de chaque terme figurant dans le produit.*

On peut combiner ces deux règles dans la transformation d'expressions plus complexes, telles que des sommes de produits ou des produits de sommes. Ainsi, la fonction suivante s'écrira, x, y et z étant trois variables binaires indépendantes.

$$\overline{xy + yz + zx} = \overline{xy} \,.\, \overline{yz} \,.\, \overline{zx}$$
$$= (\bar{x} + \bar{y})(\bar{y} + \bar{z})(\bar{z} + \bar{x})$$
$$= (\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z})(\bar{z} + \bar{x})$$

avec $\bar{y}\bar{y} = \bar{y}$

et $\bar{y}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} = \bar{y} + \bar{y}\bar{z} = \bar{y}(1 + \bar{z}) = \bar{y}.1 = \bar{y}$

Donc : $\overline{xy + yz + zx} = (\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y})(\bar{z} + \bar{x})$

En développant le produit, il vient :

$$\overline{xy + yz + zx} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z}\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{x}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$$
$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$$

Le développement fait apparaître deux fois chacun des termes $\bar{x}\bar{z}$ et $\bar{x}\bar{y}$. On ne changera pas la valeur de la fonction en supprimant dans chaque cas le terme superflu.

Donc :

$$\overline{xy + yz + zx} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}$$
$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$$
$$= \bar{x}\bar{y}(\bar{z} + 1) + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$$
$$= \bar{x}\bar{y}.1 + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}$$
$$= \bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + \bar{z}\bar{x}$$

1.5- *Transformation d'une fonction logique quelconque en une somme de produits ou en un produit de sommes :*

On démontre qu'une fonction de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, peut être mise sous l'une des formes :

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 . F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_1=1} + \bar{x}_1 . F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_1=o} \\
&= x_2 . F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_2=1} + \bar{x}_2 . F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_2=o} \\
&= \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&= x_n . F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_n=1} + \bar{x}_n . F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_n=o}
\end{aligned}
$$

ou sous l'une des suivantes :

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= [x_1 + F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_1=o}] . [\bar{x}_1 + F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_1=1}] \\
&= [x_2 + F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_2=o}] . [\bar{x}_2 + F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_2=1}] \\
&= \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
&= [x_n + F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_n=o}] . [\bar{x}_n + F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_n=1}]
\end{aligned}
$$

Dans ces relations, les quantités $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_i=1}$ et $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{x_i=o}$ désignent respectivement les valeurs prises par la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour chacune des valeurs 1 et 0 de la variable x_i.

Vérifions ces relations dans les deux cas simples considérés précédemment.

Soit tout d'abord $F(x,y) = \overline{x + y}$ on a :

$$F(x,y)_{x=1} = \overline{1 + y} = \bar{1} = 0$$

$$F(x,y)_{x=o} = \overline{0 + y} = \bar{y}$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= x . F(x,y)_{x=1} + \bar{x} . F(x,y)_{x=o} \\
&= x . 0 + \bar{x} . \bar{y} \\
&= 0 + \bar{x} . \bar{y}
\end{aligned}
$$

ou $$\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y} \quad .$$

La même fonction deviendra, par application des formules du second groupe :

$$F(x,y) = [x + F(x,y)_{x=o}][\bar{x} + F(x,y)_{x=1}]$$
$$= [x + \bar{y}][\bar{x} + o]$$
$$= (x + \bar{y})\bar{x} = x\bar{x} + \bar{x}\bar{y} = 0 + \bar{x}\bar{y}$$

ou :

$$\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$$

Passons maintenant à la seconde fonction :

$$F(x,y) = \overline{xy}$$

On a :

$$F(x,y)_{x=1} = \overline{1.y} = \bar{y}$$
$$F(x,y)_{x=o} = \overline{0.y} = \bar{0} = 1$$

Le premier groupe de formules donne :

$$F(x,y) = x.F(x,y)_{x=1} + \bar{x}.F(x,y)_{x=o}$$
$$= x.\bar{y} + \bar{x}.1$$
$$= x\bar{y} + \bar{x}$$

On ne changera pas la valeur de $\bar{x}$ en multipliant ce têrme par la quantité $1 + \bar{y} = 1$; par suite :

$$F(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}(1 + \bar{y})$$
$$= x\bar{y} + \bar{x} + \bar{x}\bar{y}$$
$$= \bar{x} + \bar{y}(x + \bar{x})$$
$$= \bar{x} + \bar{y}.1$$

ou :

$$\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$$

Enfin le second groupe de formules donne :

$$F(x,y) = [x + F(x,y)_{x=o}][\bar{x} + F(x,y)_{x=1}]$$
$$= [x + 1][\bar{x} + \bar{y}]$$
$$= 1.(\bar{x} + \bar{y})$$

ou :

$$\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$$

1.6- *Autres opérations logiques :*

Les opérations logiques autres que la somme logique ou le produit logique sont assez peu couramment utilisées. Aussi passerons-nous rapidement sur ces opérations.

1.6.1- Différence logique :

La notion de différence logique sera encore illustrée par les cercles d'EULER (figure 1.3). La différence $z = x-y$ consiste dans l'extraction, à partir d'un domaine donné représentant le premier terme x de la différence, des domaines élémentaires représentant le second terme y de la différence.

Pour l'evaluation de la différence logique, il y a lieu de tenir compte que l'extraction de certains éléments dans un domaine qui ne les contient pas n'affecte pas ce domaine. On écrira donc:

$$x = x\bar{y} + xy$$

$$y = \bar{x}y + xy$$

et :

$$\begin{aligned} z = x-y &= (x\bar{y} + xy) - (\bar{x}y + xy) \\ &= x\bar{y} - \bar{x}y \\ &= x\bar{y} \end{aligned}$$

puisque l'élément $\bar{x}y$ n'appartient pas au domaine x duquel est extrait y.

1.6.2- Division logique :

C'est surtout dans les transformations de fonctions qu'on est susceptible d'utiliser la division logique, afin de simplifier par des facteurs communs. Il faut être très prudent dans les simplifications de fonctions.

Considérons par exemple la fonction résultant du produit de $x + y$ par y, x et y étant deux variables binaires. On a :

$$\begin{aligned} (x + y)y &= xy + yy = xy + y \\ &= (x + 1)y = 1.y \end{aligned}$$

ou encore :

$$(x + y)y = y$$

Lorsqu'une telle relation se présente, on peut être tenté de simplifier les deux membres par y et d'écrire :

$$x + y = 1$$

Or ce n'est pas nécessairement exact, puisque, en supposant $x = y = 0$, on aurait bien $(0 + 0)0 = 0$, mais non pas $x + y = 1$.

Il convient donc d'être très prudent chaque fois qu'une simplification par un facteur commun pourra être mise en évidence.

BIBLIOGRAPHIE

Arithmetic Operations in Digital Computers, par R.K.RICHARDS (Van Nostrand éditeur, NEW-YORK).

M. Soubies-Camy

FONCTIONS DE COMMUTATION

SOMMAIRE

LISTE DES FIGURES

2. FONCTIONS DE COMMUTATION

2.1- *Définitions* :

On désigne sous le nom de *fonction de commutation* toute fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables binaires indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La fonction considérée peut se présenter sous la forme d'une somme de produits comprenant chacun les n variables ou leurs compléments à 1. On dit, dans ce cas, que la fonction a été mise sous sa *forme élémentaire*. Elle définit alors celles des combinaisons de variables qui, appliquées à l'entrée du système physique représenté par la fonction, engendrent un signal à la sortie.

2.2- *Forme élémentaire équivalente à une fonction donnée* :

A titre d'exemple, appliquons les règles de l'algèbre logique à la transformation de la fonction :

$$F(x,y,z) = \overline{x + \bar{y}z}$$

On écrira successivement :

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \bar{x} \,.\, \overline{\bar{y}z} \\ &= \bar{x}(y + \bar{z}) \\ &= \bar{x}y + \bar{x}\bar{z} \end{aligned}$$

Pour obtenir la forme élémentaire, dans laquelle chaque produit doit contenir chacune des variables ou son complément à 1, nous multiplierons les deux produits à deux variables $\bar{x}y$ et $\bar{x}\bar{z}$ par un facteur égal à la somme de celle des variables qui n'y figure pas et de son complément à 1, soit $z + \bar{z} = 1$ dans le premier cas, et $y + \bar{y} = 1$ dans le second :

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \bar{x}y(z + \bar{z}) + \bar{x}\bar{z}(y + \bar{y}) \\ &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

soit encore, en ne conservant qu'un seul des deux produits $\bar{x}y\bar{z}$:

$F(x,y,z) = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

Le nombre N des fonctions de commutation qu'il est possible d'obtenir à partir des produits dont la somme représente l'une des formes élémentaires croît très vite avec le nombre n des variables indépendantes. On démontre que, d'une façon générale:

$$N = (2)^{2^n}$$

En se limitant au cas particulier où n = 1, on a : $N = 2^2 = 4$, les quatre fonctions étant respectivement :

0	(circuit ouvert)
x	(liaison directe entre l'entrée x et la sortie)
$\bar{x}$	(sortie d'un circuit inverseur)
$x+\bar{x} = 1$	(circuit délivrant un signal indépendamment du signal appliqué à l'entrée).

2.3- *Simplification de la forme élémentaire :*

Il existe plusieurs méthodes de simplification que nous examinerons successivement, étant donné l'intérêt qu'elles présentent en pratique pour la simplification des circuits électriques dont les propriétés sont précisément résumées par les fonctions considérées. On supposera dans ce qui suit que ces fonctions se réduisent à une somme de produits élémentaires.

2.3.1- Simplification de la forme élémentaire par regroupement des termes :

2.3.1.1- Emploi de relations fondamentales :

Des regroupements de termes seront toujours possibles chaque fois que ces termes se présenteront sous l'une des trois formes fondamentales ci-après, où l'on a indiqué à la suite la forme simplifiée équivalente :

$$xy + \bar{x}y = (x+\bar{x})y = y \qquad (1)$$

$$x + xy = x(1 + y) = x.1 = x \qquad (2)$$

$$x + \bar{x}y = x(y + \bar{y}) + \bar{x}y = xy + x\bar{y} + \bar{x}y$$
$$= (xy + \bar{x}y) + (xy + x\bar{y})$$
$$= y + x \qquad (3)$$

Ces relations peuvent être généralisées de la façon suivante, S_1 et S_2 désignant respectivement deux suites de variables binaires dont certaines peuvent appartenir à l'une et l'autre des deux suites, $F_1(S_1)$ et $F_2(S_2)$ deux fonctions de chacune de ces suites, enfin $\overline{F_1(S_1)}$ et $\overline{F_2(S_2)}$ les compléments de ces fonctions:

$$F_1(S_1).F_2(S_2) + \overline{F_1(S_1)}.F_2(S_2) = F_2(S_2) \qquad (4)$$

$$F_1(S_1) + F_1(S_1).F_2(S_2) = F_1(S_1) \qquad (5)$$

$$F_1(S_1) + \overline{F_1(S_1)}.F_2(S_2) = F_1(S_1) + F_2(S_2) \qquad (6)$$

Considérons, à titre de premier exemple, la fonction :

$$F \equiv \bar{x}\bar{z}t + \bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}\bar{z}\bar{t}$$

En mettant $\bar{x}\bar{z}$ en facteur commun dans le premier et le troisième termes, il vient :

$$F \equiv \bar{x}\bar{z}(t + \bar{t}) + \bar{x}yz\bar{t}$$
$$= \bar{x}\bar{z}.1 + \bar{x}yz\bar{t}$$
$$= \bar{x}\bar{z} + \bar{x}yz\bar{t}$$
$$= \bar{x}(\bar{z} + x.y\bar{t})$$

Si l'on pose $F_1(S_1) = \bar{z}$ et $F_2(S_2) = y\bar{t}$, la formule (6) permet d'écrire :

$$\bar{z} + z.y\bar{t} = F_1(S_1) + \overline{F_1(S_1)}.F_2(S_2)$$
$$= F_1(S_1) + F_2(S_2)$$
$$= \bar{z} + y\bar{t}$$

d'où :

$$F = \bar{x}(\bar{z} + y\bar{t})$$
$$= \bar{x}\bar{z} + \bar{x}y\bar{t}$$

L'exemple suivant met encore mieux en évidence les simplifications autorisées par les formules généralisées. Montrons d'abord comment s'appliquent les formules (1) à (3) dans le cas de la fonction :

$$F \equiv (x + \bar{y}z) + \overline{(x + \bar{y}z)}(xt + z)$$

Le second terme de la somme s'écrira :

$$\overline{(x + \bar{y}z)}(xt + z) = \bar{x}.\overline{\bar{y}z}.(xt + z)$$
$$= \bar{x}(y + \bar{z})(xt + z)$$
$$= (\bar{x}y + \bar{x}\bar{z})(xt + z)$$
$$= \bar{x}.xyt + \bar{x}x\bar{z}t + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{z}z$$
$$= 0 + 0 + \bar{x}yz + 0$$
$$= \bar{x}yz$$

Par suite :

$$F = (x + \bar{y}z) + \bar{x}yz$$
$$= z(\bar{y} + y\bar{x}) + x$$
$$= z\bar{y} + (z\bar{x} + x)$$
$$= z\bar{y} + (x + z)$$
$$= (z + z\bar{y}) + x$$
$$= z + x$$

La formule générale (6) aurait donné directement :

$$F = (x + \bar{y}z) + (xt + z)$$

d'où, en s'aidant de la formule (2) :

$$F = (x + xt) + (z + z\bar{y})$$
$$= x + z$$

2.3.1.2- Simplification de la forme élémentaire par addition de termes existants suivis d'une ou plusieurs mises en facteurs communs.

On a vu précédemment qu'on ne modifiait pas la valeur d'une fonction en y ajoutant un terme qui y figure déjà, et cela quel que soit le nombre de fois où le terme existant est ajouté. Cette propriété permet, dans certains cas, d'obtenir des simplifications intéressantes. Le résultat dépend alors de la façon dont a été conduite la mise en facteurs communs.

Soit, par exemple, la fonction :

$$F = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} .$$

On peut écrire, en groupant par paires le quatrième et le cinquième termes, le second et le troisième, le quatrième et le sixième, enfin le premier et le troisième :

$$\begin{aligned} F &= (x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z) + (\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz) + (x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}) + (\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}yz) \\ &= x\bar{y}(z + \bar{z}) + \bar{x}y(z + \bar{z}) + x\bar{z}(y + \bar{y}) + \bar{x}z(y + \bar{y}) \\ &= x\bar{y}.1 + \bar{x}y.1 + x\bar{z}.1 + \bar{x}z.1 \\ &= x\bar{y} + \bar{x}y + x\bar{z} + \bar{x}z . \end{aligned}$$

On aurait pu obtenir une autre expression ne comportant plus que trois termes en groupant, dans l'expression de la fonction donnée, les second et troisième termes, les premier et cinquième termes, enfin les quatrième et sixième termes :

$$\begin{aligned} F &= (\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz) + (\bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z) + (x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}) \\ &= \bar{x}y(z + \bar{z}) + \bar{y}z(x + \bar{x}) + \bar{z}x(y + \bar{y}) \\ &= \bar{x}y.1 + \bar{y}z.1 + \bar{z}x.1 \\ &= \bar{x}y + \bar{y}z + \bar{z}x . \end{aligned}$$

Par un groupement différent des termes de la fonction d'origine, on aurait pu obtenir une expression encore différente, à trois termes toujours :

$$F = x\bar{y} + y\bar{z} + x\bar{z}$$

L'équivalence entre plusieurs formes simplifiées n'est pas toujours évidente. Pourtant, il est parfois utile, lorsqu'aucune simplification n'est plus possible, de trouver de telles équivalences, certaines étant plus avantageuses que d'autres en ce qui concerne par exemple le nombre des éléments nécessaires pour engendrer un terme qui figure dans un cas et pas dans l'autre.

Pour la recherche de ces équivalences, il est commode de multiplier chacun des termes de la fonction donnée par des expressions de la forme $(A + \bar{A})$, ce qui permet de mettre en évidence les termes de la forme élémentaire que l'on regroupera ensuite deux par deux suivant toutes les combinaisons possibles.

Soit, par exemple, la fonction :

$$F \equiv x\bar{y} + \bar{x}yz + xz\bar{t}$$

Pour mettre en évidence les termes à quatre variables de la forme élémentaire, on écrira :

$$\begin{aligned} F &= x\bar{y}(z + \bar{z})(t + \bar{t}) + \bar{x}yz(t + \bar{t}) + xzt(y + \bar{y}) \\ &= (x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}zt) + (\bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}yzt + x\bar{y}zt + xyzt) \end{aligned}$$

D'où la forme élémentaire :

$$F = \bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}yzt + x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}zt + xyzt$$

En groupant par deux de toutes les façons possibles les termes à quatre variables de la forme élémentaire, on obtient les termes à trois variables de la suite :

$$\begin{aligned} \bar{x}yz &= \bar{x}yz\bar{t} + \bar{x}yzt \\ x\bar{y}\bar{z} &= x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}\bar{z}t \\ x\bar{y}\bar{t} &= x\bar{y}\bar{z}\bar{t} + x\bar{y}z\bar{t} \\ x\bar{y}z &= x\bar{y}z\bar{t} + x\bar{y}zt \\ x\bar{y}t &= x\bar{y}\bar{z}t + x\bar{y}zt \\ xzt &= x\bar{y}zt + xyzt \\ yzt &= \bar{x}yzt + xyzt \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$F = \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{t} + x\bar{y}z + x\bar{y}t + xzt + yzt$$

$$F = (x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z) + (x\bar{y}\bar{t} + x\bar{y}t) + (\bar{x}yz + xzt + yzt)$$

$$F = x\bar{y} + x\bar{y} + (\bar{x}yz + xzt + yzt)$$

$$F = x\bar{y} + \bar{x}yz + xzt + yzt$$

On voit que l'expression obtenue comprend les trois termes de base de la fonction origine, mais qu'un quatrième terme est apparu qui n'existait pas précédemment.

On peut grouper comme il suit, dans un même tableau, d'une part la forme élémentaire de la fonction F, d'autre part les quatre termes de base, en mettant en évidence par des croix ceux des termes à quatre variables de la forme élémentaire qui sont contenus dans chacun des termes de base à trois variables de l'expression équivalente :

	$\bar{x}yz\bar{t}$	$\bar{x}yzt$	$x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$	$x\bar{y}\bar{z}t$	$x\bar{y}z\bar{t}$	$x\bar{y}zt$	$xyzt$
$x\bar{y}$			x	x	x	x	
$\bar{x}yz$	x	x					
xzt						x	x
yzt		x					x

Le tableau montre que les six premiers des sept termes de la forme élémentaire peuvent être représentés par la somme $x\bar{y} + \bar{x}yz$, le dernier, $xyzt$, pouvant être représenté, soit le troisième terme de base xzt de la forme d'origine, soit par le nouveau terme de base yzt.

Ainsi, bien qu'aucune simplification n'ait été apportée à la fonction, la méthode suivie a permis de trouver une expression équivalente à la fonction d'origine. A cette nouvelle expression correspondra un circuit topologiquement différent qui sera préféré au premier si la variable y du terme de base yzt est élaborée plus aisément que la variable x du terme de base xzt.