

MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS

Directeurs de la collection :
G. Allaire et M. Benaïm

61

MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS

Comité de Lecture / Editorial Board

GRÉGOIRE ALLAIRE
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau
allaire@cmapx.polytechnique.fr

MICHEL BENAÏM
Mathématiques, Univ. de Neuchâtel
michel.benaïm@unine.ch

THIERRY COLIN
Mathématiques, Univ. de Bordeaux 1
colin@math.u-bordeaux1.fr

MARIE-CHRISTINE COSTA
CEDRIC, CNAM, Paris
costa@cnam.fr

GÉRARD DEGREZ
Inst. Von Karman, Louvain
degrez@vki.ac.be

JEAN DELLA-DORA
LMC, IMAG, Grenoble
jean.della-dora@imag.fr

JACQUES DEMONGEOT
TIMC, IMAG, Grenoble
jacques.demongeot@imag.fr

FRÉDÉRIC DIAS
CMLA, ENS Cachan
dias@cmla.ens-cachan.fr

NICOLE EL KAROUI
CMAP, École Polytechniques Palaiseau
elkaroui@cmapx.polytechnique.fr

MARC HALLIN
Stat. & R.O., Univ. libre de Bruxelles
mhallin@ulb.ac.be

LAURENT MICLO
LATP, Univ. de Provence
laurent : miclo@latp.univ-mrs.fr

HUYEN PHAM
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 7
pham@math.jussieu.fr

VALÉRIE PERRIER
LMC, IMAG, Grenoble
valerie.perrier@imag.fr

DOMINIQUE PICARD
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 7
picard@math.jussieu.fr

ROBERT ROUSSARIE
Topologie, Univ. de Bourgogne, Dijon
roussari@u-bourgogne.fr

CLAUDE SAMSON
INRIA Sophia-Antipolis
claudes.samson@sophia.inria.fr

BERNARD SARAMITO
Mathématiques, Université de Clermont 2
Bernard.Saramito@math.univ-bpclermont.fr

ANNICK SARTENAER
Mathématique, Univ. de Namur
annick.sartenaer@fundp.ac.be

ZHAN SHI
Probabilités, Univ. Paris 6
zhan@proba.jussieu.fr

SYLVAIN SORIN
Equipe Comb. et Opt., Univ. Paris 6
sorin@math.jussieu.fr

JEAN-MARIE THOMAS
Maths Appl., Univ. de Pau
Jean-Marie.Thomas@univ-pau.fr

ALAIN TROUVÉ
CMLA, ENS Cachan
trouve@cmla.ens-cachan.fr

JEAN-PHILIPPE VIAL
HEC, Univ. de Genève
jean-philippe.vial@hec.unige.ch

BERNARD YCART
LMC, IMAG, Grenoble
bernard.ycart@imag.fr

ENRIQUE ZUAZUA
Matemáticas, Univ. Autónoma de Madrid
enrique.zuazua@uam.es

Directeurs de la collection :
G. ALLAIRE et M. BENAÏM

Instructions aux auteurs :

Les textes ou projets peuvent être soumis directement à l'un des membres du comité de lecture avec copie à G. ALLAIRE OU M. BENAÏM. Les manuscrits devront être remis à l'Éditeur sous format $\text{\LaTeX}2\epsilon$.

Huyền Phạm

Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance

Huyên Pham
Université Paris 7
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France
e-mail: pham@math.jussieu.fr

et

Institut Universitaire de France
103, boulevard Saint-Michel
75005 Paris
France

Library Congress Control Number: 2007931193

Mathematics Subject Classification (2000): 93E20, 91B28, 49L20, 49L25, 60H30

ISSN 1154-483X

ISBN-10 3-540-73736-7 Springer Berlin Heidelberg New York

ISBN-13 978-3-540-73736-0 Springer Berlin Heidelberg New York

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.

Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Springer est membre du Springer Science+Business Media

©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

springer.com

WMXDesign GmbH

Imprimé sur papier non acide 3100/SPi - 5 4 3 2 1 0 -

A Châu, Hugo et Antoine.

Préface

Les problèmes d'optimisation stochastique ont de nombreuses applications dans des problèmes de gestion, d'économie et de finance. Ce sont des situations où l'on fait face à des systèmes dynamiques évoluant dans des conditions d'incertitude et où il s'agit de prendre des décisions à chaque date afin d'optimiser un critère économique.

Les approches traditionnelles pour résoudre les problèmes d'optimisation stochastique sont basées sur le principe de la programmation dynamique de Bellman et le principe du maximum de Pontryagin. Elles ont conduit à de nombreux développements mathématiques. Le principe de la programmation dynamique appliqué au contrôle de processus de Markov en temps continu se traduit en termes d'équations aux dérivées partielles non linéaires pour la fonction valeur du problème. Ce type d'équations appelé équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman a trouvé un cadre théorique adéquat grâce au concept des solutions de viscosité. Le principe du maximum appliqué au cadre de processus d'Itô a conduit à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades et engendré une littérature considérable sur le sujet. Plus récemment et motivé par les problèmes d'optimisation de portefeuille en finance, une nouvelle approche, dite méthode martingale de dualité convexe, s'est développée. Elle repose sur des théorèmes récents d'analyse stochastique et sur des méthodes plus classiques d'analyse convexe en optimisation. Il existe plusieurs ouvrages traitant soit de l'approche mathématique par programmation dynamique ([FR75], [BL78], [Kry80], [FS03], [YZ00]) soit des équations différentielles stochastiques rétrogrades [MY00]. Ils privilégient souvent l'aspect théorique et sont d'un niveau techniquement avancé et parfois difficiles à lire pour un non spécialiste du sujet. D'autre part, bien qu'il existe de nombreux articles sur la maximisation d'utilité par approche duale, cette méthode est encore peu abordée dans les ouvrages d'enseignement et de recherche.

L'objectif de ce livre est de combler cette lacune et de présenter les différents aspects et méthodes utilisés dans la résolution des problèmes d'optimisation stochastique avec en vue des applications plus spécifiques à la finance. Nous avons inclus certains développements récents sur le sujet sans chercher

à priori la plus grande généralité. Nous avons voulu une exposition graduelle des méthodes mathématiques en présentant d'abord les idées intuitives puis en énonçant précisément les résultats avec des démonstrations complètes et détaillées. Nous avons aussi pris soin d'illustrer chacune des méthodes de résolution sur de nombreux exemples issus de la finance. Nous espérons ainsi que ce livre puisse être utile aussi bien pour des étudiants que pour des chercheurs du monde académique ou professionnel intéressés par l'optimisation et le contrôle stochastique appliqués à la finance.

Le plan du livre est le suivant. Nous commençons par énoncer au chapitre 1 quelques prérequis en calcul stochastique. Nous avons essentiellement collecté les notions et résultats dans la vaste littérature sur l'analyse stochastique qui sont utiles pour l'optimisation stochastique. Le chapitre 2 formule de façon générale la structure d'un problème de contrôle stochastique et présente de nombreux exemples d'applications réelles en finance. Ces exemples seront résolus dans les chapitres suivants selon les différentes approches abordées. Nous discutons aussi très brièvement dans ce chapitre d'autres modèles de contrôle apparaissant en finance que ceux étudiés dans ce livre. Le chapitre 3 expose l'approche du contrôle stochastique de processus de diffusion par la programmation dynamique. Nous avons d'abord suivi une démarche classique basée sur un théorème de vérification associé à l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Le chapitre 4 reprend le principe de la programmation dynamique mais en adoptant une démarche plus moderne basée sur la théorie des solutions de viscosité. Ce concept permet de résoudre des problèmes de contrôle lorsque la fonction valeur n'est pas régulière comme supposée au chapitre précédent. Ce cas est illustré sur le problème de la surréplication en finance pour des modèles à volatilité incertaine. Comme nous l'avons mentionné plus tôt, le principe du maximum de Pontryagine a conduit naturellement au concept d'équations différentielles stochastiques rétrogrades. Le chapitre 5 est une introduction à cette théorie en insistant plus particulièrement sur ses applications au contrôle stochastique. Dans le chapitre 6, nous exposons l'approche martingale par dualité convexe inspirée originellement par le problème de gestion de portefeuille. Nous y avons inclus des développements récents et le problème de couverture quadratique. La caractéristique de cette approche est de combiner des résultats puissants d'analyse stochastique et des méthodes de dualité en analyse convexe.

Ce livre est basé sur mes notes de cours rédigées pour un enseignement en troisième année à l'ENSAE depuis 1998, puis aux DEA (maintenant Master 2) de Statistique et Modèles Aléatoires à l'université Paris 7 et de Probabilités et Finance à l'université Paris 6. Je tiens en particulier à remercier Laure Elie qui m'a donné l'opportunité d'enseigner ce cours à Paris 7. C'est grâce aux cours et exposés de Nicole El Karoui et Pierre-Louis Lions, lorsque j'étais étudiant en DEA et en thèse, que je me suis intéressé au contrôle stochastique et leurs travaux ont un impact évident dans la rédaction de cette monographie.

Table des matières

Notations	XIII
1 Quelques éléments d'analyse stochastique	1
1.1 Processus stochastiques	1
1.1.1 Filtration et processus	1
1.1.2 Temps d'arrêt	3
1.1.3 Mouvement brownien	5
1.1.4 Martingales, semimartingales	6
1.2 Intégrale stochastique et applications	13
1.2.1 Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale continue	13
1.2.2 Processus d'Itô	18
1.2.3 Formule d'Itô	19
1.2.4 Théorèmes de représentation de martingales	20
1.2.5 Théorème de Girsanov	21
1.3 Equations différentielles stochastiques	24
1.3.1 Solutions fortes d'EDS	24
1.3.2 Estimations sur les moments de solutions d'EDS	27
1.3.3 Formule de Feynman-Kac	28
2 Problèmes d'optimisation stochastique. Exemples en finance	31
2.1 Introduction	31
2.2 Exemples	32
2.2.1 Allocation de portefeuille	32
2.2.2 Modèle de production et consommation	34
2.2.3 Modèles d'investissement irréversible d'une firme	35
2.2.4 Couverture quadratique d'options	35
2.2.5 Coût de surréplication en volatilité incertaine	36
2.3 Autres modèles de contrôles en finance	36
2.3.1 Arrêt optimal	36

2.3.2	Contrôle ergodique	37
2.3.3	Surréplication sous contraintes gamma	38
2.3.4	Optimisation d'utilité robuste et mesures du risque	38
2.4	Commentaires bibliographiques	39
3	Approche EDP classique de la programmation dynamique .	41
3.1	Introduction	41
3.2	Contrôle de processus de diffusion	41
3.3	Principe de la programmation dynamique	45
3.4	Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman	47
3.4.1	Dérivation formelle de HJB	47
3.4.2	Remarques-Extensions	50
3.5	Théorème de vérification	52
3.6	Applications	57
3.6.1	Problème de choix de portefeuille de Merton en horizon fini	57
3.6.2	Un modèle de production et consommation en horizon infini	59
3.7	Exemple de problème de contrôle stochastique singulier	62
3.8	Commentaires bibliographiques	64
4	Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité	65
4.1	Introduction	65
4.2	Définition des solutions de viscosité	66
4.3	Principe de comparaison	68
4.4	De la programmation dynamique aux solutions de viscosité . .	70
4.5	Un modèle d'investissement irréversible	75
4.5.1	Problème	75
4.5.2	Régularité et construction de la fonction valeur	76
4.5.3	Stratégie optimale	82
4.6	Calcul du coût de surréplication en volatilité incertaine	83
4.6.1	Volatilité bornée	84
4.6.2	Volatilité non bornée	86
4.7	Commentaires bibliographiques	92
5	Méthodes d'équations différentielles stochastiques rétrogrades	93
5.1	Introduction	93
5.2	Propriétés générales	93
5.2.1	Résultats d'existence et d'unicité	93
5.2.2	EDSR linéaires	96
5.2.3	Principe de comparaison	97
5.3	EDSR, EDP et formules de type Feynman-Kac	98

5.4	Contrôle et EDSR	102
5.4.1	Optimisation d'une famille d'EDSR	103
5.4.2	Principe du maximum stochastique	105
5.5	Applications	108
5.5.1	Maximisation d'utilité exponentielle avec actif contingent	108
5.5.2	Critère moyenne-variance d'allocation de portefeuille	111
5.6	Commentaires bibliographiques	116
6	Méthodes martingales de dualité convexe	117
6.1	Introduction	117
6.2	Représentation duale du problème de surréplication	119
6.2.1	Formulation du problème de surréplication	119
6.2.2	Probabilités martingales et arbitrage	120
6.2.3	Le théorème de décomposition optionnelle et la représentation duale du coût de surréplication	120
6.2.4	Le cadre de processus d'Itô et de filtration Brownienne	124
6.3	Dualité pour la maximisation d'utilité	128
6.3.1	Formulation du problème d'optimisation de portefeuille	128
6.3.2	Résultat général d'existence	129
6.3.3	Résolution via la formulation duale	131
6.3.4	Le cas des marchés complets	145
6.3.5	Exemples en marché incomplet	146
6.4	Problème de couverture quadratique	149
6.4.1	Formulation du problème	149
6.4.2	Le cas martingale	150
6.4.3	Probabilité martingale variance-optimale et numéraire quadratique	152
6.4.4	Résolution du problème par changement de numéraire	158
6.4.5	Exemple	163
6.5	Commentaires bibliographiques	164
A	Compléments d'intégration	167
A.1	Uniforme intégrabilité	167
A.2	Essentiel supremum d'une famille de variables aléatoires	169
A.3	Quelques théorèmes de compacité en probabilité	169
B	Considérations d'analyse convexe	171
B.1	Fonctions semicontinues, convexes	171
B.2	Transformée de Fenchel-Legendre	173
B.3	Exemple dans \mathbb{R}	174
	Références	177
	Index	185

Notations

I. Notations générales

Pour tous nombres réels x et y :

$$\begin{aligned}x \wedge y &= \min(x, y), & x \vee y &= \max(x, y) \\ x^+ &= \max(x, 0), & x^- &= \max(-x, 0)\end{aligned}$$

Pour toute suite positive $(x_n)_{n \geq 1}$ croissante, sa limite croissante dans $[0, +\infty]$ est notée $\lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow x_n$.

Pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$, $y_n \in \text{conv}(x_k, k \geq n)$ signifie que $y_n = \sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k x_k$ où $\lambda_k \in [0, 1]$, $n \leq k \leq N_n < +\infty$ et $\sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k = 1$.

II. Ensembles

\mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels

\mathbb{R}^d est l'espace réel euclidien de dimension d . $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, \mathbb{R}_+ est l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Pour tous $x = (x^1, \dots, x^d)$, $y = (y^1, \dots, y^d)$ dans \mathbb{R}^d , on note \cdot le produit scalaire et $|\cdot|$ la norme euclidienne :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i \quad \text{et} \quad |x| = \sqrt{x \cdot x}$$

$\mathbb{R}^{n \times d}$ est l'ensemble des matrices réelles $n \times d$ ($\mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$). I_n est la matrice identité $n \times n$. Pour tout $\sigma = (\sigma^{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d} \in \mathbb{R}^{n \times d}$, on note $\sigma' = (\sigma^{ji})_{1 \leq j \leq d, 1 \leq i \leq n}$ la matrice transposée dans $\mathbb{R}^{d \times n}$. On note $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a^{ii}$ la trace d'une matrice carrée $A = (a^{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On choisit comme norme matricielle sur $\mathbb{R}^{n \times d}$:

$$|\sigma| = (\text{tr}(\sigma \sigma'))^{\frac{1}{2}}.$$

\mathcal{S}_n est l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ et \mathcal{S}_n^+ est le sous-ensemble de \mathcal{S}_n des matrices définies non-négatives. On définit l'ordre sur \mathcal{S}_n par :

$$A \leq B \iff B - A \in \mathcal{S}_n^+.$$

L'intérieur, l'adhérence et la frontière d'une partie \mathcal{O} de \mathbb{R}^d sont notées respectivement $\text{int}(\mathcal{O})$, $\bar{\mathcal{O}}$ et $\partial\mathcal{O}$.

III. Fonctions et espaces fonctionnels

Pour tout ensemble A , l'indicatrice de A est noté :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$C^k(\mathcal{O})$ est l'ensemble des fonctions continues f de \mathcal{O} dans \mathbb{R} qui ont des dérivées continues de tout ordre jusqu'à k . Ici \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^n .

$C^0(\mathbb{T} \times \mathcal{O})$ est l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{T} \times \mathcal{O}$ dans \mathbb{R} . Ici $\mathbb{T} = [0, T]$, avec $0 < T < +\infty$, ou $\mathbb{T} = [0, +\infty[$.

$C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O})$ est l'ensemble des fonctions f de $[0, T] \times \mathcal{O}$ dans \mathbb{R} dont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq n$, existent et sont continues sur $[0, T[$ (T pouvant prendre la valeur $+\infty$). Si ces dérivées partielles de $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O})$ se prolongent par continuité sur $[0, T] \times \mathcal{O}$ (dans le cas $T < +\infty$), on note $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O})$. On définit de manière analogue pour $k \geq 3$, l'espace $C^{1,k}([0, T] \times \mathcal{O})$.

Pour une fonction $f \in C^2(\mathcal{O})$, on note Df le vecteur gradient dans \mathbb{R}^n de composantes $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, et D^2f la matrice hessienne dans \mathcal{S}_n de composantes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq n$. Ceux-ci sont notés parfois f_x et f_{xx} . Lorsque \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R} , on écrit aussi simplement f' et f'' . Le vecteur gradient et la matrice hessienne d'une fonction $x \rightarrow f(t, x) \in C^2(\mathcal{O})$ sont notées $D_x f$ et $D_x^2 f$.

IV. Intégration et Probabilité

(Ω, \mathcal{F}, P) : espace de probabilité.

P p.s. est la notation presque sûrement pour la mesure de probabilité P (on omettra souvent la référence à P lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté). μ p.p. est la notation presque partout pour la mesure μ .

$\mathcal{B}(U)$: tribu borélienne engendrée par les ouverts de U espace topologique.

$\sigma(\mathcal{G})$: la plus petite σ -algèbre contenant \mathcal{G} , collection de sous-ensembles de Ω .

$Q \ll P$: la mesure Q est absolument continue par rapport à la mesure P .

$Q \sim P$: la mesure Q est équivalente à P , i.e. $Q \ll P$ et $P \ll Q$.

$\frac{dQ}{dP}$: densité de Radon-Nikodym de $Q \ll P$.

$E^Q(X)$ est l'espérance de la variable aléatoire X par rapport à Q .

$E(X)$ est l'espérance de la variable aléatoire X par rapport à une probabilité P fixée initialement. $E[X|\mathcal{G}]$ est l'espérance conditionnelle de X sachant \mathcal{G} . $\text{Var}(X) = E[(X - E(X))(X - E(X))']$ est la variance de X .

$L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est l'ensemble des variables aléatoires \mathcal{F} -mesurables qui sont positives p.s.

$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des variables aléatoires X , à valeurs dans \mathbb{R}^n , \mathcal{F} -mesurables tel que $E|X|^p < +\infty$, pour $p \in [1, +\infty[$. On omettra parfois certains arguments et on écrira L^p ou $L^p(P)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des variables aléatoires, à valeurs dans \mathbb{R}^n , bornées, \mathcal{F} -mesurables. On écrira parfois L^∞ .

V. Abréviations

EDS : Equations différentielles stochastiques.

EDSR : Equations différentielles stochastiques rétrogrades.

EDP : Equations aux dérivées partielles.

HJB : Hamilton-Jacobi-Bellman

Quelques éléments d'analyse stochastique

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts et résultats d'analyse stochastique utiles pour ce cours. Il y a de nombreux livres détaillant la théorie classique exposée dans ce chapitre, parmi lesquels Dellacherie et Meyer [DM80], Jacod [Jac79], Karatzas et Shreve [KaSh88], Protter [Pro90] ou Revuz et Yor [ReY91], d'où sont tirés la plupart des résultats rappelés ici sans démonstration. Le lecteur est supposé familier avec les bases élémentaires de la théorie de l'intégration et des probabilités (voir par exemple Revuz [Rev94], [Rev97]). Dans la suite de ce chapitre, (Ω, \mathcal{F}, P) désigne un espace de probabilité. Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'ensemble des variables aléatoires ξ (à valeurs dans \mathbb{R}^d) tel que $|\xi|^p$ soit intégrable, i.e. $E|\xi|^p < +\infty$.

1.1 Processus stochastiques

1.1.1 Filtration et processus

Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de variables aléatoires à valeurs dans un espace mesurable \mathcal{X} et indexées par le temps t . Dans ce chapitre et pour les objectifs de ce livre, on prendra $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne. Le paramètre de temps t variant dans \mathbb{T} peut être discret ou continu. Dans ce livre, on considère des processus stochastiques à temps continu et l'intervalle de variation du temps \mathbb{T} est soit fini $\mathbb{T} = [0, T]$, $0 < T < +\infty$, soit infini $\mathbb{T} = [0, +\infty[$. On écrira souvent processus pour processus stochastique. Pour chaque $\omega \in \Omega$, l'application $X(\omega) : t \in \mathbb{T} \rightarrow X_t(\omega)$ est appelé une trajectoire du processus dans le scénario ω . Le processus stochastique X est dit càd-làg (resp. continu) si pour chaque $\omega \in \Omega$, la trajectoire $X(\omega)$ est continue à droite et admet une limite à gauche (resp. continue). Etant donné un processus stochastique $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$, on dit que Y est une modification de X si pour tout $t \in \mathbb{T}$, on a $X_t = Y_t$ p.s., i.e. $P[X_t = Y_t] = 1$. On dit que Y est indistinguable de X si leurs trajectoires coïncident p.s. : $P[X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}] = 1$. Bien entendu, la notion d'indistinguabilité est plus

forte que celle de modification, mais si on sait que les deux processus X et Y sont càd-làg, et si Y est une modification de X , alors X et Y sont indistinguables.

L'interprétation du paramètre t comme index de temps introduit un aspect dynamique : pour modéliser le fait que l'incertitude des événements de Ω devient de moins en moins incertaine lorsque le temps s'écoule, i.e. on possède de plus en plus d'information, on introduit la notion de filtration.

Définition 1.1.1 (*Filtration*)

Une filtration sur (Ω, \mathcal{F}, P) est une famille croissante $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ de sous-tribus de \mathcal{F} : $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t$ dans \mathbb{T} .

\mathcal{F}_t s'interprète comme l'information connue à la date t et elle augmente avec le temps. On pose $\mathcal{F}_{\bar{T}} = \sigma(\cup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t)$ la plus petite σ -algèbre contenant tous les \mathcal{F}_t , $t \in \mathbb{T}$. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, P)$ est appelé espace de probabilité filtré. L'exemple canonique de filtration est le suivant : si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un processus stochastique, la filtration naturelle (ou canonique) de X est

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \quad t \in \mathbb{T},$$

la plus petite σ -algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$. \mathcal{F}_t^X s'interprète comme toute l'information qu'on peut extraire de l'observation des trajectoires de X entre 0 et t .

On dit qu'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ satisfait les *conditions habituelles* si elle est continue à droite, i.e. :

$$\mathcal{F}_{t+} := \cap_{s \geq t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in \mathbb{T},$$

et si elle est complète, i.e. \mathcal{F}_0 contient les ensembles négligeables de $\mathcal{F}_{\bar{T}}$. On dit alors que l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, P)$ satisfait les conditions habituelles. La continuité à droite de \mathcal{F}_t signifie intuitivement qu'ayant observé toute l'information disponible jusqu'en t inclus, on n'apprend rien de plus par une observation infinitésimale dans le futur. La complétion d'une filtration signifie que si un événement est impossible, cette impossibilité est déjà connue à la date 0. Partant d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ quelconque, on construit une filtration satisfaisant les conditions habituelles, en prenant pour tout $t \in \mathbb{T}$ la tribu \mathcal{F}_{t+} à laquelle on rajoute la classe des ensembles négligeables de $\mathcal{F}_{\bar{T}}$. La filtration ainsi construite est appelée *l'augmentation habituelle* de $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

Dans la suite, on se donne une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sur (Ω, \mathcal{F}, P) .

Définition 1.1.2 (*Processus adapté*)

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est dit adapté (par rapport à \mathbb{F}) si pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Lorsqu'on veut préciser par rapport à quelle filtration le processus est adapté, on écrira \mathbb{F} -adapté. Un processus adapté est donc un processus dont la valeur

à toute date t est révélée par l'information \mathcal{F}_t . On dit parfois que le processus est non anticipatif. Il est clair que tout processus X est adapté par rapport à sa filtration naturelle $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in \mathbb{T}}$.

Jusqu'à présent, le processus stochastique X est vu soit comme une fonction du temps t à ω fixé (lorsqu'on parle de trajectoire) ou comme une fonction de ω à t fixé (lorsqu'on considère la variable aléatoire comme dans la définition 1.1.2). On peut considérer les deux aspects en regardant le processus comme une fonction définie sur $\mathbb{T} \times \Omega$. Ceci conduit aux définitions suivantes :

Définition 1.1.3 (*Processus progressif, optionnel, prévisible*)

1) Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est dit *progressif* (par rapport à \mathbb{F}) si pour tout $t \in \mathbb{T}$, l'application $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

2) Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est dit *optionnel* (par rapport à \mathbb{F}) si l'application $(t, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ est mesurable sur $\mathbb{T} \times \Omega$ muni de la tribu engendrée par les processus \mathbb{F} -adaptés et càd-làg.

3) Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est dit *prévisible* (par rapport à \mathbb{F}) si l'application $(t, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$ est mesurable sur $\mathbb{T} \times \Omega$ muni de la tribu engendrée par les processus \mathbb{F} -adaptés et continus.

Lorsqu'on veut préciser la filtration, on écrira \mathbb{F} -progressif (optionnel ou prévisible). Evidemment, tout processus progressif est adapté et mesurable sur $\mathbb{T} \times \Omega$ muni de la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F}$. Il est aussi clair avec la définition que tout processus càd-làg adapté est optionnel (la réciproque n'étant pas vraie). De même, tout processus X continu et adapté est prévisible (la réciproque n'étant pas vraie) : puisque dans ce cas $X_t = \lim_{s \nearrow t} X_s$, ceci signifie que la valeur de X_t est annoncée par ses valeurs précédentes. Puisqu'un processus continu est càd-làg, il est évident que tout processus prévisible est optionnel. Le résultat suivant donne le lien entre processus optionnel et progressif :

Proposition 1.1.1 *Si le processus X est optionnel, il est progressif. En particulier, s'il est adapté et càd-làg alors il est progressif.*

Par abus de langage, on écrit souvent dans la littérature processus adapté pour processus progressif.

1.1.2 Temps d'arrêt

Ayant à l'esprit l'interprétation de \mathcal{F}_t comme l'information connue jusqu'à la date t , on s'intéresse à savoir si un événement donné, caractérisé par sa première date $\tau(\omega)$ d'apparition, a eu lieu ou non avant la date t sachant l'observation de l'information \mathcal{F}_t . Ceci conduit à la notion de temps d'arrêt.

Définition 1.1.4 (*Temps d'arrêt*)

1) Une variable aléatoire $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$, i.e. un temps aléatoire, est appelé temps d'arrêt (par rapport à la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$) si pour tout $t \in \mathbb{T}$:

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

2) Un temps d'arrêt τ est dit prévisible s'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n \geq 1}$ telle que l'on ait p.s. :

$$(i) \lim_n \tau_n = \tau$$

$$(ii) \tau_n < \tau \text{ pour tout } n \text{ sur } \{\tau > 0\}.$$

On dit alors que $(\tau_n)_{n \geq 1}$ annonce τ .

On vérifie aisément avec la définition que tout temps aléatoire égal à une constante positive t est un temps d'arrêt. On note aussi que si τ et σ sont deux temps d'arrêt alors $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$ et $\tau + \sigma$ sont des temps d'arrêt.

Etant donné un temps d'arrêt τ , on mesure l'information accumulée jusqu'en τ par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{T}}} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{T}\},$$

qui est une tribu de \mathcal{F} . Il est clair que τ est \mathcal{F}_τ -mesurable. On a aussi immédiatement que si $\tau = t$ alors $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$. On énonce quelques autres propriétés élémentaires et utiles pour la suite sur les temps d'arrêt (voir par exemple les preuves dans le ch. I, sec. 1.2 de Karatzas et Shreve [KaSh88]).

Proposition 1.1.2 Soient σ et τ des temps d'arrêt et ξ une variable aléatoire.

(1) Pour tout $B \in \mathcal{F}_\sigma$, on a $B \cap \{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$. En particulier, si $\sigma \leq \tau$ alors $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

(2) Les événements suivants

$$\{\sigma < \tau\}, \{\sigma \leq \tau\}, \{\sigma = \tau\}$$

appartiennent à $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

(3) ξ est \mathcal{F}_τ -mesurable si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\xi 1_{\tau \leq t}$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

Etant donné un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et un temps d'arrêt τ , on définit la variable aléatoire X_τ sur $\{\tau \in \mathbb{T}\}$ par :

$$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

On vérifie que si X est mesurable alors X_τ est une variable aléatoire sur $\{\tau \in \mathbb{T}\}$. On introduit alors le processus arrêté (en τ) X^τ défini par :

$$X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Proposition 1.1.3 Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ un processus progressif et τ un temps d'arrêt. Alors $X_\tau 1_{\tau \in \mathbb{T}}$ est \mathcal{F}_τ -mesurable et le processus arrêté X^τ est progressif.

On termine ce paragraphe par un résultat donnant une classe importante de temps d'arrêt.

Proposition 1.1.4 *Soit X une processus càd-làg adapté et Γ un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$.*

(1) *Si la filtration \mathbb{F} satisfait les conditions habituelles, alors le temps d'atteinte de Γ défini par*

$$\sigma_\Gamma = \inf \{t \geq 0 : X_t \in \Gamma\}$$

(avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$) *est un temps d'arrêt.*

(2) *Si X est continu, alors le temps de sortie de Γ défini par*

$$\tau_\Gamma = \inf \{t \geq 0 : X_t \notin \Gamma\}$$

est un temps d'arrêt prévisible.

1.1.3 Mouvement brownien

L'exemple basique de processus est le mouvement brownien, nom donné par le botaniste Robert Brown en 1827 pour décrire le mouvement irrégulier de particules de pollen dans un fluide. Le cadre d'application du mouvement brownien a largement dépassé l'étude des particules microscopiques pour être utilisé en finance dans la modélisation des prix d'actions, historiquement depuis Bachelier en 1900.

Définition 1.1.5 *(Mouvement brownien standard)*

Un mouvement brownien standard vectoriel (d -dimensionnel) sur $\mathbb{T} = [0, T]$ ou \mathbb{R}_+ est un processus continu à valeurs dans \mathbb{R}^d , $(W_t)_{t \in \mathbb{T}} = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \in \mathbb{T}}$ tel que

(i) $W_0 = 0$

(ii) *Pour tous $0 \leq s < t$ dans \mathbb{T} , l'accroissement $W_t - W_s$ est indépendant de $\sigma(W_u, u \leq s)$ et suit une loi gaussienne centrée de matrice de variance-covariance $(t - s)I_d$ où I_d est la matrice identité $d \times d$.*

Une conséquence immédiate de la définition est que les coordonnées $(W_t^i)_{t \in \mathbb{T}}$, $i = 1, \dots, d$, d'un mouvement brownien vectoriel sont des mouvements browniens réels et indépendants. Réciproquement des mouvements browniens réels indépendants engendrent un mouvement brownien vectoriel. Dans la définition d'un mouvement brownien standard, l'indépendance des accroissements est par rapport à la filtration naturelle $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_u, u \leq s)$ de W . La filtration naturelle de W est parfois appelée filtration brownienne. Il est souvent intéressant de travailler avec une filtration plus grande que la filtration naturelle. Ceci conduit à la définition plus générale.

Définition 1.1.6 (*Mouvement brownien par rapport à une filtration*)

Un mouvement brownien vectoriel (d -dimensionnel) sur $\mathbb{T} = [0, T]$ ou \mathbb{R}_+ par rapport à une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un processus continu \mathbb{F} -adapté, à valeurs dans \mathbb{R}^d , $(W_t)_{t \in \mathbb{T}} = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \in \mathbb{T}}$ tel que

- (i) $W_0 = 0$
- (ii) Pour tous $0 \leq s < t$ dans \mathbb{T} , l'accroissement $W_t - W_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s et suit une loi gaussienne centrée de matrice de variance-covariance $(t - s)I_d$ où I_d est la matrice identité $d \times d$.

Bien entendu, un mouvement brownien standard est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle.

Un problème majeur est celui de l'existence et de la construction et simulation d'un mouvement brownien. Nous ne discutons pas ici de ce problème et renvoyons le lecteur aux nombreux livres traitant du sujet (par exemple Hida [Hi80], Karatzas et Shreve [KaSh88], Le Gall [LeG89] ou Revuz et Yor [ReY91]). Nous énonçons seulement une propriété classique du mouvement brownien.

Proposition 1.1.5 Soit $(W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est un mouvement brownien par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$.

- (1) *Symétrie* : $(-W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est aussi un mouvement brownien.
- (2) *Echelle* : Pour tout $\lambda > 0$, le processus $((1/\lambda)W_{\lambda^2 t})_{t \in \mathbb{T}}$ est aussi un mouvement brownien.
- (3) *Invariance par translation* : Pour tout $s > 0$, le processus $(W_{t+s} - W_s)_{t \in \mathbb{T}}$ est un mouvement brownien standard indépendant de \mathcal{F}_s .

Nous rappelons aussi que l'augmentation habituelle de la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^W)_t$ d'un mouvement brownien W est $(\sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}))_t$ où \mathcal{N} est l'ensemble des événements négligeables de $(\Omega, \mathcal{F}_{\bar{\mathbb{T}}}, P)$. De plus, W reste un mouvement brownien par rapport à sa filtration augmentée. Par abus de langage, l'augmentation de la filtration naturelle de W est encore appelée filtration naturelle de W ou filtration brownienne.

1.1.4 Martingales, semimartingales

Dans cette section, on considère des processus à valeurs réelles. Les preuves des résultats énoncés dans ce paragraphe sont établies par exemple dans Dellacherie et Meyer [DM80].

Définition 1.1.7 (*Martingale*)

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ adapté est appelé surmartingale si $E[X_t^-] < +\infty$ pour tout $t \in \mathbb{T}$ et

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s, \quad \text{p.s.} \quad \text{pour tous } 0 \leq s \leq t, \quad s, t \in \mathbb{T}. \quad (1.1)$$

X est une sous-martingale si $-X$ est une surmartingale. On dit que X est une martingale si elle est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

La définition d'une sur(sous)martingale dépend crucialement de la probabilité P et de la filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ spécifiées sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) . Dans ce cours, la filtration sera fixée et lorsque ce n'est pas précisé, la propriété de sur(sous)martingale sera toujours relative à la filtration. On sera amené, par contre, à considérer différentes probabilités Q sur (Ω, \mathcal{F}) et pour souligner ce fait, on précisera alors Q -sur(sous)martingale.

Un exemple important de martingale est le mouvement brownien décrit dans le paragraphe précédent. D'autre part, une construction typique de martingales est la suivante : on se donne une variable aléatoire ξ sur (Ω, \mathcal{F}) intégrable, i.e. $E|\xi| < +\infty$. Alors, le processus défini par

$$X_t = E[\xi | \mathcal{F}_t], \quad t \in \mathbb{T},$$

est clairement une martingale. On dit que X est fermée à droite par ξ . Réciproquement, lorsque $\mathbb{T} = [0, T]$, $T < +\infty$, toute martingale $(X_t)_{t \in [0, T]}$ est fermée à droite par $\xi = X_T$. Lorsque $\mathbb{T} = [0, +\infty[$, la fermeture à droite d'une martingale est donnée par le résultat de convergence suivant :

Théorème 1.1.1 (*Convergence des martingales*)

- 1) Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une surmartingale càd-làg bornée dans L^1 (en particulier si elle est positive). Alors X_t converge p.s. quand $t \rightarrow +\infty$.
- 2) Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une martingale càd-làg. Alors $(X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable si et seulement si X_t converge p.s. et dans L^1 quand $t \rightarrow +\infty$ vers une variable aléatoire $X_{+\infty}$. Dans ce cas, $X_{+\infty}$ ferme X à droite, i.e. $X_t = E[X_{+\infty} | \mathcal{F}_t]$ pour tout $t \geq 0$.

Dans la suite, on notera $\bar{\mathbb{T}}$ l'intervalle égal à $[0, T]$ si $\mathbb{T} = [0, T]$ et égal à $[0, +\infty]$ si $\mathbb{T} = [0, +\infty[$. On note aussi \bar{T} le bord à droite de \mathbb{T} . Avec cette convention, si $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est une martingale càd-làg uniformément intégrable alors $X_{\bar{T}}$ est la limite p.s. et dans L^1 de X_t quand t tend vers \bar{T} . De plus, $X_{\bar{T}}$ ferme à droite X : $X_t = E[X_{\bar{T}} | \mathcal{F}_t]$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Le résultat suivant est une propriété très importante des martingales : il étend la propriété (1.1) pour des dates t et s remplacées par des temps d'arrêt.

Théorème 1.1.2 (*Théorème d'arrêt des martingales*)

Soit $M = (M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ une martingale càd-làg et σ, τ deux temps d'arrêt bornés à valeurs dans \mathbb{T} tel que $\sigma \leq \tau$. Alors

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma, \quad \text{p.s.}$$

Une application utile de ce théorème d'arrêt est donnée dans le corollaire suivant :

Corollaire 1.1.1 Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ un processus càd-làg adapté.

- (1) X est une martingale si et seulement si pour tout temps d'arrêt τ borné à valeurs dans \mathbb{T} , on a $X_\tau \in L^1$ et