

MATHÉMATIQUES  
&  
APPLICATIONS

Directeurs de la collection :  
G. Allaire et M. Benaïm

61

# MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS

## Comité de Lecture / Editorial Board

GRÉGOIRE ALLAIRE  
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau  
allaire@cmapx.polytechnique.fr

MICHEL BENAÏM  
Mathématiques, Univ. de Neuchâtel  
michel.benaim@unine.ch

THIERRY COLIN  
Mathématiques, Univ. de Bordeaux 1  
colin@math.u-bordeaux1.fr

MARIE-CHRISTINE COSTA  
CEDRIC, CNAM, Paris  
costa@cnam.fr

GÉRARD DEGREZ  
Inst. Von Karman, Louvain  
degrez@vki.ac.be

JEAN DELLA-DORA  
LMC, IMAG, Grenoble  
jean.della-dora@imag.fr

JACQUES DEMONGEOT  
TIMC, IMAG, Grenoble  
jacques.demongeot@imag.fr

FRÉDÉRIC DIAS  
CMLA, ENS Cachan  
dias@cmla.ens-cachan.fr

NICOLE EL KAROUI  
CMAP, École Polytechnique Palaiseau  
elkaroui@cmapx.polytechnique.fr

MARC HALLIN  
Stat. & R.O., Univ. libre de Bruxelles  
mhallin@ulb.ac.be

LAURENT MICLO  
LATP, Univ. de Provence  
laurent : miclo@latp.univ-mrs.fr

HUYEN PHAM  
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 7  
pham@math.jussieu.fr

VALÉRIE PERRIER  
LMC, IMAG, Grenoble  
valerie.perrier@imag.fr

DOMINIQUE PICARD  
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 7  
picard@math.jussieu.fr

ROBERT ROUSSARIE  
Topologie, Univ. de Bourgogne, Dijon  
roussari@u-bourgogne.fr

CLAUDE SAMSON  
INRIA Sophia-Antipolis  
claude.samson@sophia.inria.fr

BERNARD SARAMITO  
Mathématiques, Université de Clermont 2  
Bernard.Saramito@math.univ-bpclermont.fr

ANNICK SARTENAER  
Mathématique, Univ. de Namur  
annick.sartenaer@fundp.ac.be

ZHAN SHI  
Probabilités, Univ. Paris 6  
zhan@proba.jussieu.fr

SYLVAIN SORIN  
Equipe Comb. et Opt., Univ. Paris 6  
sorin@math.jussieu.fr

JEAN-MARIE THOMAS  
Maths Appl., Univ. de Pau  
Jean-Marie.Thomas@univ-pau.fr

ALAIN TROUVÉ  
CMLA, ENS Cachan  
trouve@cmla.ens-cachan.fr

JEAN-PHILIPPE VIAL  
HEC, Univ. de Genève  
jean-philippe.vial@hec.unige.ch

BERNARD YCART  
LMC, IMAG, Grenoble  
bernard.ycart@imag.fr

ENRIQUE ZUAZUA  
Matemáticas, Univ. Autónoma de Madrid  
enrique.zuazua@uam.es

Directeurs de la collection :  
**G. ALLAIRE et M. BENAÏM**

Instructions aux auteurs :

Les textes ou projets peuvent être soumis directement à l'un des membres du comité de lecture avec copie à G. ALLAIRE OU M. BENAÏM. Les manuscrits devront être remis à l'Éditeur sous format L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2e.

Huyêñ Pham

# Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance

Huyêñ Pham  
Université Paris 7  
2, Place Jussieu  
75251 Paris Cedex 05  
France  
e-mail: pham@math.jussieu.fr

et

Institut Universitaire de France  
103, boulevard Saint-Michel  
75005 Paris  
France

Library Congress Control Number: 2007931193

---

Mathematics Subject Classification (2000): 93E20, 91B28, 49L20, 49L25, 60H30

---

ISSN 1154-483X  
ISBN-10 3-540-73736-7 Springer Berlin Heidelberg New York  
ISBN-13 978-3-540-73736-0 Springer Berlin Heidelberg New York

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.  
La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.  
Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement  
de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants  
du Code pénal.

Springer est membre du Springer Science+Business Media  
©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007  
springer.com  
WMXDesign GmbH

Imprimé sur papier non acide 3100/SPi - 5 4 3 2 1 0 -

A Châu, Hugo et Antoine.

---

## Préface

Les problèmes d'optimisation stochastique ont de nombreuses applications dans des problèmes de gestion, d'économie et de finance. Ce sont des situations où l'on fait face à des systèmes dynamiques évoluant dans des conditions d'incertitude et où il s'agit de prendre des décisions à chaque date afin d'optimiser un critère économique.

Les approches traditionnelles pour résoudre les problèmes d'optimisation stochastique sont basées sur le principe de la programmation dynamique de Bellman et le principe du maximum de Pontryagin. Elles ont conduit à de nombreux développements mathématiques. Le principe de la programmation dynamique appliqué au contrôle de processus de Markov en temps continu se traduit en termes d'équations aux dérivées partielles non linéaires pour la fonction valeur du problème. Ce type d'équations appelé équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman a trouvé un cadre théorique adéquat grâce au concept des solutions de viscosité. Le principe du maximum appliqué au cadre de processus d'Itô a conduit à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades et engendré une littérature considérable sur le sujet. Plus récemment et motivé par les problèmes d'optimisation de portefeuille en finance, une nouvelle approche, dite méthode martingale de dualité convexe, s'est développée. Elle repose sur des théorèmes récents d'analyse stochastique et sur des méthodes plus classiques d'analyse convexe en optimisation. Il existe plusieurs ouvrages traitant soit de l'approche mathématique par programmation dynamique ([FR75], [BL78], [Kry80], [FS93], [YZ00]) soit des équations différentielles stochastiques rétrogrades [MY00]. Ils privilégient souvent l'aspect théorique et sont d'un niveau techniquement avancé et parfois difficiles à lire pour un non spécialiste du sujet. D'autre part, bien qu'il existe de nombreux articles sur la maximisation d'utilité par approche duale, cette méthode est encore peu abordée dans les ouvrages d'enseignement et de recherche.

L'objectif de ce livre est de combler cette lacune et de présenter les différents aspects et méthodes utilisés dans la résolution des problèmes d'optimisation stochastique avec en vue des applications plus spécifiques à la finance. Nous avons inclus certains développements récents sur le sujet sans chercher

## VIII Préface

à priori la plus grande généralité. Nous avons voulu une exposition graduelle des méthodes mathématiques en présentant d'abord les idées intuitives puis en énonçant précisément les résultats avec des démonstrations complètes et détaillées. Nous avons aussi pris soin d'illustrer chacune des méthodes de résolution sur de nombreux exemples issus de la finance. Nous espérons ainsi que ce livre puisse être utile aussi bien pour des étudiants que pour des chercheurs du monde académique ou professionnel intéressés par l'optimisation et le contrôle stochastique appliqués à la finance.

Le plan du livre est le suivant. Nous commençons par énoncer au chapitre 1 quelques prérequis en calcul stochastique. Nous avons essentiellement collecté les notions et résultats dans la vaste littérature sur l'analyse stochastique qui sont utiles pour l'optimisation stochastique. Le chapitre 2 formule de façon générale la structure d'un problème de contrôle stochastique et présente de nombreux exemples d'applications réelles en finance. Ces exemples seront résolus dans les chapitres suivants selon les différentes approches abordées. Nous discutons aussi très brièvement dans ce chapitre d'autres modèles de contrôle apparaissant en finance que ceux étudiés dans ce livre. Le chapitre 3 expose l'approche du contrôle stochastique de processus de diffusion par la programmation dynamique. Nous avons d'abord suivi une démarche classique basée sur un théorème de vérification associé à l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi-Bellman. Le chapitre 4 reprend le principe de la programmation dynamique mais en adoptant une démarche plus moderne basée sur la théorie des solutions de viscosité. Ce concept permet de résoudre des problèmes de contrôle lorsque la fonction valeur n'est pas régulière comme supposée au chapitre précédent. Ce cas est illustré sur le problème de la surréplication en finance pour des modèles à volatilité incertaine. Comme nous l'avons mentionné plus tôt, le principe du maximum de Pontryagin a conduit naturellement au concept d'équations différentielles stochastiques rétrogrades. Le chapitre 5 est une introduction à cette théorie en insistant plus particulièrement sur ses applications au contrôle stochastique. Dans le chapitre 6, nous exposons l'approche martingale par dualité convexe inspirée originellement par le problème de gestion de portefeuille. Nous y avons inclus des développements récents et le problème de couverture quadratique. La caractéristique de cette approche est de combiner des résultats puissants d'analyse stochastique et des méthodes de dualité en analyse convexe.

Ce livre est basé sur mes notes de cours rédigées pour un enseignement en troisième année à l'ENSAE depuis 1998, puis aux DEA (maintenant Master 2) de Statistique et Modèles Aléatoires à l'université Paris 7 et de Probabilités et Finance à l'université Paris 6. Je tiens en particulier à remercier Laure Elie qui m'a donné l'opportunité d'enseigner ce cours à Paris 7. C'est grâce aux cours et exposés de Nicole El Karoui et Pierre-Louis Lions, lorsque j'étais étudiant en DEA et en thèse, que je me suis intéressé au contrôle stochastique et leurs travaux ont un impact évident dans la rédaction de cette monographie.

Paris, Septembre 2005

*Huyêñ PHAM*

---

## Table des matières

<b>Notations .....</b>	XIII
<b>1    Quelques éléments d'analyse stochastique .....</b>	1
1.1    Processus stochastiques .....	1
1.1.1    Filtration et processus .....	1
1.1.2    Temps d'arrêt .....	3
1.1.3    Mouvement brownien .....	5
1.1.4    Martingales, semimartingales .....	6
1.2    Intégrale stochastique et applications .....	13
1.2.1    Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale continue .....	13
1.2.2    Processus d'Itô .....	18
1.2.3    Formule d'Itô .....	19
1.2.4    Théorèmes de représentation de martingales .....	20
1.2.5    Théorème de Girsanov .....	21
1.3    Equations différentielles stochastiques .....	24
1.3.1    Solutions fortes d'EDS .....	24
1.3.2    Estimations sur les moments de solutions d'EDS .....	27
1.3.3    Formule de Feynman-Kac .....	28
<b>2    Problèmes d'optimisation stochastique. Exemples en finance .....</b>	31
2.1    Introduction .....	31
2.2    Exemples .....	32
2.2.1    Allocation de portefeuille .....	32
2.2.2    Modèle de production et consommation .....	34
2.2.3    Modèles d'investissement irréversible d'une firme .....	35
2.2.4    Couverture quadratique d'options .....	35
2.2.5    Coût de surréplication en volatilité incertaine .....	36
2.3    Autres modèles de contrôles en finance .....	36
2.3.1    Arrêt optimal .....	36

X Table des matières

2.3.2	Contrôle ergodique .....	37
2.3.3	Surréplication sous contraintes gamma .....	38
2.3.4	Optimisation d'utilité robuste et mesures du risque .....	38
2.4	Commentaires bibliographiques.....	39
<b>3</b>	<b>Approche EDP classique de la programmation dynamique .</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction .....	41
3.2	Contrôle de processus de diffusion .....	41
3.3	Principe de la programmation dynamique .....	45
3.4	Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman .....	47
3.4.1	Dérivation formelle de HJB .....	47
3.4.2	Remarques-Extensions .....	50
3.5	Théorème de vérification .....	52
3.6	Applications .....	57
3.6.1	Problème de choix de portefeuille de Merton en horizon fini .....	57
3.6.2	Un modèle de production et consommation en horizon infini .....	59
3.7	Exemple de problème de contrôle stochastique singulier .....	62
3.8	Commentaires bibliographiques.....	64
<b>4</b>	<b>Approche des équations de Bellman par les solutions de viscosité .....</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction .....	65
4.2	Définition des solutions de viscosité .....	66
4.3	Principe de comparaison .....	68
4.4	De la programmation dynamique aux solutions de viscosité ...	70
4.5	Un modèle d'investissement irréversible .....	75
4.5.1	Problème .....	75
4.5.2	Régularité et construction de la fonction valeur .....	76
4.5.3	Stratégie optimale .....	82
4.6	Calcul du coût de surréplication en volatilité incertaine.....	83
4.6.1	Volatilité bornée .....	84
4.6.2	Volatilité non bornée.....	86
4.7	Commentaires bibliographiques.....	92
<b>5</b>	<b>Méthodes d'équations différentielles stochastiques rétrogrades .....</b>	<b>93</b>
5.1	Introduction .....	93
5.2	Propriétés générales .....	93
5.2.1	Résultats d'existence et d'unicité .....	93
5.2.2	EDSR linéaires.....	96
5.2.3	Principe de comparaison .....	97
5.3	EDSR, EDP et formules de type Feynman-Kac .....	98

5.4	Contrôle et EDSR .....	102
5.4.1	Optimisation d'une famille d'EDSR .....	103
5.4.2	Principe du maximum stochastique .....	105
5.5	Applications .....	108
5.5.1	Maximisation d'utilité exponentielle avec actif contingent .....	108
5.5.2	Critère moyenne-variance d'allocation de portefeuille .....	111
5.6	Commentaires bibliographiques .....	116
<b>6</b>	<b>Méthodes martingales de dualité convexe .....</b>	<b>117</b>
6.1	Introduction .....	117
6.2	Représentation duale du problème de surréplication .....	119
6.2.1	Formulation du problème de surréplication .....	119
6.2.2	Probabilités martingales et arbitrage .....	120
6.2.3	Le théorème de décomposition optionnelle et la représentation duale du coût de surréplication .....	120
6.2.4	Le cadre de processus d'Itô et de filtration Brownienne .....	124
6.3	Dualité pour la maximisation d'utilité .....	128
6.3.1	Formulation du problème d'optimisation de portefeuille .....	128
6.3.2	Résultat général d'existence .....	129
6.3.3	Résolution via la formulation duale .....	131
6.3.4	Le cas des marchés complets .....	145
6.3.5	Exemples en marché incomplet .....	146
6.4	Problème de couverture quadratique .....	149
6.4.1	Formulation du problème .....	149
6.4.2	Le cas martingale .....	150
6.4.3	Probabilité martingale variance-optimale et numéraire quadratique .....	152
6.4.4	Résolution du problème par changement de numéraire .....	158
6.4.5	Exemple .....	163
6.5	Commentaires bibliographiques .....	164
<b>A</b>	<b>Compléments d'intégration .....</b>	<b>167</b>
A.1	Uniforme intégrabilité .....	167
A.2	Essentiel supremum d'une famille de variables aléatoires .....	169
A.3	Quelques théorèmes de compacité en probabilité .....	169
<b>B</b>	<b>Considérations d'analyse convexe .....</b>	<b>171</b>
B.1	Fonctions semicontinues, convexes .....	171
B.2	Transformée de Fenchel-Legendre .....	173
B.3	Exemple dans $\mathbb{R}$ .....	174
<b>Références .....</b>	<b>177</b>	
<b>Index .....</b>	<b>185</b>	

---

## Notations

### I. Notations générales

Pour tous nombres réels  $x$  et  $y$  :

$$\begin{aligned} x \wedge y &= \min(x, y), & x \vee y &= \max(x, y) \\ x^+ &= \max(x, 0), & x^- &= \max(-x, 0) \end{aligned}$$

Pour toute suite positive  $(x_n)_{n \geq 1}$  croissante, sa limite croissante dans  $[0, +\infty]$  est notée  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow x_n$ .

Pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $y_n \in \text{conv}(x_k, k \geq n)$  signifie que  $y_n = \sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k x_k$  où  $\lambda_k \in [0, 1]$ ,  $n \leq k \leq N_n < +\infty$  et  $\sum_{k=n}^{N_n} \lambda_k = 1$ .

### II. Ensembles

$\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{R}^d$  est l'espace réel euclidien de dimension  $d$ .  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}_+$  est l'ensemble des réels positifs,  $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  et  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Pour tous  $x = (x^1, \dots, x^d)$ ,  $y = (y^1, \dots, y^d)$  dans  $\mathbb{R}^d$ , on note  $\cdot$  le produit scalaire et  $|\cdot|$  la norme euclidienne :

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^d x_i y_i \text{ et } |x| = \sqrt{x \cdot x}$$

$\mathbb{R}^{n \times d}$  est l'ensemble des matrices réelles  $n \times d$  ( $\mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$ ).  $I_n$  est la matrice identité  $n \times n$ . Pour tout  $\sigma = (\sigma^{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq d} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ , on note  $\sigma' = (\sigma^{ji})_{1 \leq j \leq d, 1 \leq i \leq n}$  la matrice transposée dans  $\mathbb{R}^{d \times n}$ . On note  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a^{ii}$  la trace d'une matrice carrée  $A = (a^{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . On choisit comme norme matricielle sur  $\mathbb{R}^{n \times d}$  :

$$|\sigma| = (\text{tr}(\sigma \sigma'))^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathcal{S}_n$  est l'ensemble des matrices symétriques  $n \times n$  et  $\mathcal{S}_n^+$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{S}_n$  des matrices définies non-négatives. On définit l'ordre sur  $\mathcal{S}_n$  par :

$$A \leq B \iff B - A \in \mathcal{S}_n^+.$$

L'intérieur, l'adhérence et la frontière d'une partie  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^d$  sont notées respectivement  $\text{int}(\mathcal{O})$ ,  $\bar{\mathcal{O}}$  et  $\partial\mathcal{O}$ .

### III. Fonctions et espaces fonctionnels

Pour tout ensemble  $A$ , l'indicatrice de  $A$  est noté :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$C^k(\mathcal{O})$  est l'ensemble des fonctions continues  $f$  de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathbb{R}$  qui ont des dérivées continues de tout ordre jusqu'à  $k$ . Ici  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

$C^0(\mathbb{T} \times \mathcal{O})$  est l'ensemble des fonctions continues  $f$  de  $\mathbb{T} \times \mathcal{O}$  dans  $\mathbb{R}$ . Ici  $\mathbb{T} = [0, T]$ , avec  $0 < T < +\infty$ , ou  $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ .

$C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O})$  est l'ensemble des fonctions  $f$  de  $[0, T] \times \mathcal{O}$  dans  $\mathbb{R}$  dont les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , existent et sont continues sur  $[0, T]$  ( $T$  pouvant prendre la valeur  $+\infty$ ). Si ces dérivées partielles de  $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O})$  se prolongent par continuité sur  $[0, T] \times \mathcal{O}$  (dans le cas  $T < +\infty$ ), on note  $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{O})$ . On définit de manière analogue pour  $k \geq 3$ , l'espace  $C^{1,k}([0, T] \times \mathcal{O})$ .

Pour une fonction  $f \in C^2(\mathcal{O})$ , on note  $Df$  le vecteur gradient dans  $\mathbb{R}^n$  de composantes  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et  $D^2f$  la matrice hessienne dans  $\mathcal{S}_n$  de composantes  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Ceux-ci sont notés parfois  $f_x$  et  $f_{xx}$ . Lorsque  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , on écrit aussi simplement  $f'$  et  $f''$ . Le vecteur gradient et la matrice hessienne d'une fonction  $x \rightarrow f(t, x) \in C^2(\mathcal{O})$  sont notées  $D_x f$  et  $D_x^2 f$ .

### IV. Intégration et Probabilité

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  : espace de probabilité.

$P$  p.s. est la notation presque sûrement pour la mesure de probabilité  $P$  (on omettra souvent la référence à  $P$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité).  $\mu$  p.p. est la notation presque partout pour la mesure  $\mu$ .

$\mathcal{B}(U)$  : tribu borélienne engendrée par les ouverts de  $U$  espace topologique.

$\sigma(\mathcal{G})$  : la plus petite  $\sigma$ -algèbre contenant  $\mathcal{G}$ , collection de sous-ensembles de  $\Omega$ .

$Q \ll P$  : la mesure  $Q$  est absolument continue par rapport à la mesure  $P$ .

$Q \sim P$  : la mesure  $Q$  est équivalente à  $P$ , i.e.  $Q \ll P$  et  $P \ll Q$ .

$\frac{dQ}{dP}$  : densité de Radon-Nikodym de  $Q \ll P$ .

$E^Q(X)$  est l'espérance de la variable aléatoire  $X$  par rapport à  $Q$ .

$E(X)$  est l'espérance de la variable aléatoire  $X$  par rapport à une probabilité  $P$  fixée initialement.  $E[X|\mathcal{G}]$  est l'espérance conditionnelle de  $X$  sachant  $\mathcal{G}$ .  $\text{Var}(X) = E[(X - E(X))(X - E(X))']$  est la variance de  $X$ .

$L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est l'ensemble des variables aléatoires  $\mathcal{F}$ -mesurables qui sont positives p.s.

$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des variables aléatoires  $X$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurables tel que  $E|X|^p < +\infty$ , pour  $p \in [1, +\infty[$ . On omettra parfois certains arguments et on écrira  $L^p$  ou  $L^p(P)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des variables aléatoires, à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , bornées,  $\mathcal{F}$ -mesurables. On écrira parfois  $L^\infty$ .

## V. Abréviations

EDS : Equations différentielles stochastiques.

EDSR : Equations différentielles stochastiques rétrogrades.

EDP : Equations aux dérivées partielles.

HJB : Hamilton-Jacobi-Bellman

# 1

---

## Quelques éléments d'analyse stochastique

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts et résultats d'analyse stochastique utiles pour ce cours. Il y a de nombreux livres détaillant la théorie classique exposée dans ce chapitre, parmi lesquels Dellacherie et Meyer [DM80], Jacod [Jac79], Karatzas et Shreve [KaSh88], Protter [Pro90] ou Revuz et Yor [ReY91], d'où sont tirés la plupart des résultats rappelés ici sans démonstration. Le lecteur est supposé familier avec les bases élémentaires de la théorie de l'intégration et des probabilités (voir par exemple Revuz [Rev94], [Rev97]). Dans la suite de ce chapitre,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  désigne un espace de probabilité. Pour  $p \in [1, +\infty[$ , on note  $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$  l'ensemble des variables aléatoires  $\xi$  (à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ) tel que  $|\xi|^p$  soit intégrable, i.e.  $E|\xi|^p < +\infty$ .

### 1.1 Processus stochastiques

#### 1.1.1 Filtration et processus

Un processus stochastique est une famille  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  de variables aléatoires à valeurs dans un espace mesurable  $\mathcal{X}$  et indéxées par le temps  $t$ . Dans ce chapitre et pour les objectifs de ce livre, on prendra  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$  muni de sa tribu borélienne. Le paramètre de temps  $t$  variant dans  $\mathbb{T}$  peut être discret ou continu. Dans ce livre, on considère des processus stochastiques à temps continu et l'intervalle de variation du temps  $\mathbb{T}$  est soit fini  $\mathbb{T} = [0, T]$ ,  $0 < T < +\infty$ , soit infini  $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ . On écrira souvent processus pour processus stochastique. Pour chaque  $\omega \in \Omega$ , l'application  $X(\omega) : t \in \mathbb{T} \rightarrow X_t(\omega)$  est appelé une trajectoire du processus dans le scénario  $\omega$ . Le processus stochastique  $X$  est dit càd-làg (resp. continu) si pour chaque  $\omega \in \Omega$ , la trajectoire  $X(\omega)$  est continue à droite et admet une limite à gauche (resp. continue). Etant donné un processus stochastique  $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , on dit que  $Y$  est une modification de  $X$  si pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , on a  $X_t = Y_t$  p.s., i.e.  $P[X_t = Y_t] = 1$ . On dit que  $Y$  est indistinguable de  $X$  si leurs trajectoires coincident p.s. :  $P[X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{T}] = 1$ . Bien entendu, la notion d'indistinguabilité est plus

forte que celle de modification, mais si on sait que les deux processus  $X$  et  $Y$  sont càd-làg, et si  $Y$  est une modification de  $X$ , alors  $X$  et  $Y$  sont indistinctables.

L'interprétation du paramètre  $t$  comme index de temps introduit un aspect dynamique : pour modéliser le fait que l'incertitude des évènements de  $\Omega$  devient de moins en moins incertaine lorsque le temps s'écoule, i.e. on possède de plus en plus d'information, on introduit la notion de filtration.

**Définition 1.1.1 (Filtration)**

*Une filtration sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est une famille croissante  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  :  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  pour tous  $0 \leq s \leq t$  dans  $\mathbb{T}$ .*

$\mathcal{F}_t$  s'interprète comme l'information connue à la date  $t$  et elle augmente avec le temps. On pose  $\mathcal{F}_{\bar{T}} = \sigma(\cup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t)$  la plus petite  $\sigma$ -algèbre contenant tous les  $\mathcal{F}_t$ ,  $t \in \mathbb{T}$ . Le quadruplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, P)$  est appelé espace de probabilité filtré. L'exemple canonique de filtration est le suivant : si  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est un processus stochastique, la filtration naturelle (ou canonique) de  $X$  est

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \quad t \in \mathbb{T},$$

la plus petite  $\sigma$ -algèbre par rapport à laquelle  $X_s$  est mesurable pour tous  $0 \leq s \leq t$ .  $\mathcal{F}_t^X$  s'interprète comme toute l'information qu'on peut extraire de l'observation des trajectoires de  $X$  entre 0 et  $t$ .

On dit qu'une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  satisfait les *conditions habituelles* si elle est continue à droite, i.e. :

$$\mathcal{F}_{t+} := \cap_{s \geq t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in \mathbb{T},$$

et si elle est complète, i.e.  $\mathcal{F}_0$  contient les ensembles négligeables de  $\mathcal{F}_{\bar{T}}$ . On dit alors que l'espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, P)$  satisfait les conditions habituelles. La continuité à droite de  $\mathcal{F}_t$  signifie intuitivement qu'ayant observé toute l'information disponible jusqu'en  $t$  inclus, on n'apprend rien de plus par une observation infinitésimale dans le futur. La complétion d'une filtration signifie que si un événement est impossible, cette impossibilité est déjà connue à la date 0. Partant d'une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  quelconque, on construit une filtration satisfaisant les conditions habituelles, en prenant pour tout  $t \in \mathbb{T}$  la tribu  $\mathcal{F}_{t+}$  à laquelle on rajoute la classe des ensembles négligeables de  $\mathcal{F}_{\bar{T}}$ . La filtration ainsi construite est appelée *l'augmentation habituelle* de  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ .

Dans la suite, on se donne une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Définition 1.1.2 (Processus adapté)**

*Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dit adapté (par rapport à  $\mathbb{F}$ ) si pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.*

Lorsqu'on veut préciser par rapport à quelle filtration le processus est adapté, on écrira  $\mathbb{F}$ -adapté. Un processus adapté est donc un processus dont la valeur

à toute date  $t$  est révélée par l'information  $\mathcal{F}_t$ . On dit parfois que le processus est non anticipatif. Il est clair que tout processus  $X$  est adapté par rapport à sa filtration naturelle  $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in \mathbb{T}}$ .

Jusqu'à présent, le processus stochastique  $X$  est vu soit comme une fonction du temps  $t$  à  $\omega$  fixé (lorsqu'on parle de trajectoire) ou comme une fonction de  $\omega$  à  $t$  fixé (lorsqu'on considère la variable aléatoire comme dans la définition 1.1.2). On peut considérer les deux aspects en regardant le processus comme une fonction définie sur  $\mathbb{T} \times \Omega$ . Ceci conduit aux définitions suivantes :

**Définition 1.1.3** (*Processus progressif, optionnel, prévisible*)

- 1) Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dit *progressif* (par rapport à  $\mathbb{F}$ ) si pour tout  $t \in \mathbb{T}$ , l'application  $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$  est mesurable sur  $[0, t] \times \Omega$  muni de la tribu produit  $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ .
- 2) Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dit *optionnel* (par rapport à  $\mathbb{F}$ ) si l'application  $(t, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$  est mesurable sur  $\mathbb{T} \times \Omega$  muni de la tribu engendrée par les processus  $\mathbb{F}$ -adaptés et càd-làg.
- 3) Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est dit *prévisible* (par rapport à  $\mathbb{F}$ ) si l'application  $(t, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$  est mesurable sur  $\mathbb{T} \times \Omega$  muni de la tribu engendrée par les processus  $\mathbb{F}$ -adaptés et continu.

Lorsqu'on veut préciser la filtration, on écrira  $\mathbb{F}$ -progressif (optionnel ou prévisible). Evidemment, tout processus progressif est adapté et mesurable sur  $\mathbb{T} \times \Omega$  muni de la tribu produit  $\mathcal{B}(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{F}$ . Il est aussi clair avec la définition que tout processus càd-làg adapté est optionnel (la réciproque n'étant pas vraie). De même, tout processus  $X$  continu et adapté est prévisible (la réciproque n'étant pas vraie) : puisque dans ce cas  $X_t = \lim_{s \nearrow t} X_s$ , ceci signifie que la valeur de  $X_t$  est annoncée par ses valeurs précédentes. Puisqu'un processus continu est càd-làg, il est évident que tout processus prévisible est optionnel. Le résultat suivant donne le lien entre processus optionnel et progressif :

**Proposition 1.1.1** *Si le processus  $X$  est optionnel, il est progressif. En particulier, s'il est adapté et càd-làg alors il est progressif.*

Par abus de language, on écrit souvent dans la littérature processus adapté pour processus progressif.

### 1.1.2 Temps d'arrêt

Ayant à l'esprit l'interprétation de  $\mathcal{F}_t$  comme l'information connue jusqu'à la date  $t$ , on s'intéresse à savoir si un évènement donné, caractérisé par sa première date  $\tau(\omega)$  d'apparition, a eu lieu ou non avant la date  $t$  sachant l'observation de l'information  $\mathcal{F}_t$ . Ceci conduit à la notion de temps d'arrêt.

**Définition 1.1.4** (*Temps d'arrêt*)

1) Une variable aléatoire  $\tau : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ , i.e. un temps aléatoire, est appelé temps d'arrêt (par rapport à la filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ) si pour tout  $t \in \mathbb{T}$  :

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

2) Un temps d'arrêt  $\tau$  est dit prévisible s'il existe une suite de temps d'arrêt  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  telle que l'on ait p.s. :

- (i)  $\lim_n \tau_n = \tau$
- (ii)  $\tau_n < \tau$  pour tout  $n$  sur  $\{\tau > 0\}$ .

On dit alors que  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  annonce  $\tau$ .

On vérifie aisément avec la définition que tout temps aléatoire égal à une constante positive  $t$  est un temps d'arrêt. On note aussi que si  $\tau$  et  $\sigma$  sont deux temps d'arrêt alors  $\tau \wedge \sigma$ ,  $\tau \vee \sigma$  et  $\tau + \sigma$  sont des temps d'arrêt.

Etant donné un temps d'arrêt  $\tau$ , on mesure l'information accumulée jusqu'en  $\tau$  par :

$$\mathcal{F}_\tau = \{B \in \mathcal{F}_{\bar{\tau}} : B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \in \mathbb{T}\},$$

qui est une tribu de  $\mathcal{F}$ . Il est clair que  $\tau$  est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable. On a aussi immédiatement que si  $\tau = t$  alors  $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$ . On énonce quelques autres propriétés élémentaires et utiles pour la suite sur les temps d'arrêt (voir par exemple les preuves dans le ch. I, sec. 1.2 de Karatzas et Shreve [KaSh88]).

**Proposition 1.1.2** Soient  $\sigma$  et  $\tau$  des temps d'arrêt et  $\xi$  une variable aléatoire.

(1) Pour tout  $B \in \mathcal{F}_\sigma$ , on a  $B \cap \{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$ . En particulier, si  $\sigma \leq \tau$  alors  $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ .

(2) Les évènements suivants

$$\{\sigma < \tau\}, \{\sigma \leq \tau\}, \{\sigma = \tau\}$$

appartiennent à  $\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ .

(3)  $\xi$  est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{T}$ ,  $\xi 1_{\tau \leq t}$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Etant donné un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  et un temps d'arrêt  $\tau$ , on définit la variable aléatoire  $X_\tau$  sur  $\{\tau \in \mathbb{T}\}$  par :

$$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

On vérifie que si  $X$  est mesurable alors  $X_\tau$  est une variable aléatoire sur  $\{\tau \in \mathbb{T}\}$ . On introduit alors le processus arrêté (en  $\tau$ )  $X^\tau$  défini par :

$$X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

**Proposition 1.1.3** Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  un processus progressif et  $\tau$  un temps d'arrêt. Alors  $X_\tau 1_{\tau \in \mathbb{T}}$  est  $\mathcal{F}_\tau$ -mesurable et le processus arrêté  $X^\tau$  est progressif.

On termine ce paragraphe par un résultat donnant une classe importante de temps d'arrêt.

**Proposition 1.1.4** *Soit  $X$  une processus càd-làg adapté et  $\Gamma$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ .*

*(1) Si la filtration  $\mathbb{F}$  satisfait les conditions habituelles, alors le temps d'atteinte de  $\Gamma$  défini par*

$$\sigma_\Gamma = \inf \{t \geq 0 : X_t \in \Gamma\}$$

*(avec la convention  $\inf \emptyset = +\infty$ ) est un temps d'arrêt.*

*(2) Si  $X$  est continu, alors le temps de sortie de  $\Gamma$  défini par*

$$\tau_\Gamma = \inf \{t \geq 0 : X_t \notin \Gamma\}$$

*est un temps d'arrêt prévisible.*

### 1.1.3 Mouvement brownien

L'exemple basique de processus est le mouvement brownien, nom donné par le botaniste Robert Brown en 1827 pour décrire le mouvement irrégulier de particules de pollen dans un fluide. Le cadre d'application du mouvement brownien a largement dépassé l'étude des particules microscopiques pour être utilisé en finance dans la modélisation des prix d'actions, historiquement depuis Bachelier en 1900.

**Définition 1.1.5** *(Mouvement brownien standard)*

*Un mouvement brownien standard vectoriel ( $d$ -dimensionnel) sur  $\mathbb{T} = [0, T]$  ou  $\mathbb{R}_+$  est un processus continu à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $(W_t)_{t \in \mathbb{T}} = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \in \mathbb{T}}$  tel que*

*(i)  $W_0 = 0$*

*(ii) Pour tous  $0 \leq s < t$  dans  $\mathbb{T}$ , l'accroissement  $W_t - W_s$  est indépendant de  $\sigma(W_u, u \leq s)$  et suit une loi gaussienne centrée de matrice de variance-covariance  $(t-s)I_d$  où  $I_d$  est la matrice identité  $d \times d$ .*

Une conséquence immédiate de la définition est que les coordonnées  $(W_t^i)_{t \in \mathbb{T}}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , d'un mouvement brownien vectoriel sont des mouvements browniens réels et indépendants. Réciproquement des mouvements browniens réels indépendants engendrent un mouvement brownien vectoriel. Dans la définition d'un mouvement brownien standard, l'indépendance des accroissements est par rapport à la filtration naturelle  $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_u, u \leq s)$  de  $W$ . La filtration naturelle de  $W$  est parfois appelée filtration brownienne. Il est souvent intéressant de travailler avec une filtration plus grande que la filtration naturelle. Ceci conduit à la définition plus générale.

**Définition 1.1.6** (*Mouvement brownien par rapport à une filtration*)

Un mouvement brownien vectoriel ( $d$ -dimensionnel) sur  $\mathbb{T} = [0, T]$  ou  $\mathbb{R}_+$  par rapport à une filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est un processus continu  $\mathbb{F}$ -adapté, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $(W_t)_{t \in \mathbb{T}} = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \in \mathbb{T}}$  tel que

(i)  $W_0 = 0$

(ii) Pour tous  $0 \leq s < t$  dans  $\mathbb{T}$ , l'accroissement  $W_t - W_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s$  et suit une loi gaussienne centrée de matrice de variance-covariance  $(t - s)I_d$  où  $I_d$  est la matrice identité  $d \times d$ .

Bien entendu, un mouvement brownien standard est un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle.

Un problème majeur est celui de l'existence et de la construction et simulation d'un mouvement brownien. Nous ne discutons pas ici de ce problème et renvoyons le lecteur aux nombreux livres traitant du sujet (par exemple Hida [Hi80], Karatzas et Shreve [KaSh88], Le Gall [LeG89] ou Revuz et Yor [ReY91]). Nous énonçons seulement une propriété classique du mouvement brownien.

**Proposition 1.1.5** Soit  $(W_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est un mouvement brownien par rapport à  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ .

(1) Symétrie :  $(-W_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est aussi un mouvement brownien.

(2) Echelle : Pour tout  $\lambda > 0$ , le processus  $((1/\lambda)W_{\lambda^2 t})_{t \in \mathbb{T}}$  est aussi un mouvement brownien.

(3) Invariance par translation : Pour tout  $s > 0$ , le processus  $(W_{t+s} - W_s)_{t \in \mathbb{T}}$  est un mouvement brownien standard indépendant de  $\mathcal{F}_s$ .

Nous rappelons aussi que l'augmentation habituelle de la filtration naturelle  $(\mathcal{F}_t^W)_t$  d'un mouvement brownien  $W$  est  $(\sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}))_t$  où  $\mathcal{N}$  est l'ensemble des événements négligeables de  $(\Omega, \mathcal{F}_{\bar{T}}, P)$ . De plus,  $W$  reste un mouvement brownien par rapport à sa filtration augmentée. Par abus de langage, l'augmentation de la filtration naturelle de  $W$  est encore appelée filtration naturelle de  $W$  ou filtration brownienne.

#### 1.1.4 Martingales, semimartingales

Dans cette section, on considère des processus à valeurs réelles. Les preuves des résultats énoncés dans ce paragraphe sont établies par exemple dans Dellacherie et Meyer [DM80].

**Définition 1.1.7** (*Martingale*)

Un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  adapté est appelé surmartingale si  $E[X_t^-] < +\infty$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$  et

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s, \quad p.s. \quad \text{pour tous } 0 \leq s \leq t, s, t \in \mathbb{T}. \quad (1.1)$$

$X$  est une sous-martingale si  $-X$  est une surmartingale. On dit que  $X$  est une martingale si elle est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

La définition d'une sur(sous)martingale dépend crucialement de la probabilité  $P$  et de la filtration  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  spécifiées sur l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Dans ce cours, la filtration sera fixée et lorsque ce n'est pas précisé, la propriété de sur(sous)martingale sera toujours relative à la filtration. On sera amené, par contre, à considérer différentes probabilités  $Q$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  et pour souligner ce fait, on précisera alors  $Q$ -sur(sous)martingale.

Un exemple important de martingale est le mouvement brownien décrit dans le paragraphe précédent. D'autre part, une construction typique de martingales est la suivante : on se donne une variable aléatoire  $\xi$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  intégrable, i.e.  $E|\xi| < +\infty$ . Alors, le processus défini par

$$X_t = E[\xi | \mathcal{F}_t], \quad t \in \mathbb{T},$$

est clairement une martingale. On dit que  $X$  est fermée à droite par  $\xi$ . Réciproquement, lorsque  $\mathbb{T} = [0, T]$ ,  $T < +\infty$ , toute martingale  $(X_t)_{t \in [0, T]}$  est fermée à droite par  $\xi = X_T$ . Lorsque  $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ , la fermeture à droite d'une martingale est donnée par le résultat de convergence suivant :

**Théorème 1.1.1** (*Convergence des martingales*)

- 1) Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une surmartingale càd-làg bornée dans  $L^1$  (en particulier si elle est positive). Alors  $X_t$  converge p.s. quand  $t \rightarrow +\infty$ .
- 2) Soit  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  une martingale càd-làg. Alors  $(X_t)_{t \geq 0}$  est uniformément intégrable si et seulement si  $X_t$  converge p.s. et dans  $L^1$  quand  $t \rightarrow +\infty$  vers une variable aléatoire  $X_{+\infty}$ . Dans ce cas,  $X_{+\infty}$  ferme  $X$  à droite, i.e.  $X_t = E[X_{+\infty} | \mathcal{F}_t]$  pour tout  $t \geq 0$ .

Dans la suite, on notera  $\bar{\mathbb{T}}$  l'intervalle égal à  $[0, T]$  si  $\mathbb{T} = [0, T]$  et égal à  $[0, +\infty]$  si  $\mathbb{T} = [0, +\infty[$ . On note aussi  $\bar{T}$  le bord à droite de  $\mathbb{T}$ . Avec cette convention, si  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  est une martingale càd-làg uniformément intégrable alors  $X_{\bar{T}}$  est la limite p.s. et dans  $L^1$  de  $X_t$  quand  $t$  tend vers  $\bar{T}$ . De plus,  $X_{\bar{T}}$  ferme à droite  $X$  :  $X_t = E[X_{\bar{T}} | \mathcal{F}_t]$  pour tout  $t \in \mathbb{T}$ .

Le résultat suivant est une propriété très importante des martingales : il étend la propriété (1.1) pour des dates  $t$  et  $s$  remplacées par des temps d'arrêt.

**Théorème 1.1.2** (*Théorème d'arrêt des martingales*)

Soit  $M = (M_t)_{t \in \mathbb{T}}$  une martingale càd-làg et  $\sigma, \tau$  deux temps d'arrêt bornés à valeurs dans  $\mathbb{T}$  tel que  $\sigma \leq \tau$ . Alors

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma, \quad p.s.$$

Une application utile de ce théorème d'arrêt est donnée dans le corollaire suivant :

**Corollaire 1.1.1** Soit  $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  un processus càd-làg adapté.

- (1)  $X$  est une martingale si et seulement si pour tout temps d'arrêt  $\tau$  borné à valeurs dans  $\mathbb{T}$ , on a  $X_\tau \in L^1$  et