Vom Zählstein zum Computer

Herausgegeben von
H.-W. Alten · A. Djafari Naini · H. Wesemüller-Kock
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung
Universität Hildesheim

In der Reihe „Vom Zählstein zum Computer“
sind bisher erschienen:

6000 Jahre Mathematik
Band 1: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton
Wußing
ISBN 978-3-540-77189-0

4000 Jahre Algebra
Alten, Djafari Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, Wußing
ISBN 978-3-540-43554-9

5000 Jahre Geometrie
Scriba, Schreiber
ISBN 978-3-540-22471-6

Überblick und Biographien,
Hans Wußing et al. ISBN 978-3-88120-275-6
Vom Zählstein zum Computer – Altertum (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald ISBN 978-3-88120-236-7
Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald

Hans Wußing

6000 Jahre Mathematik

Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 2. Von Euler bis zur Gegenwart

Mit einem Ausblick von Eberhard Zeidler

Unter Mitwirkung von Heinz-Wilhelm Alten und Heiko Wesemüller-Kock

Mit 435 Abbildungen, davon 269 in Farbe

Springer

Professor Dr. Hans Wußing
Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig
Karl-Tauchnitz-Str. 1
04107 Leipzig

ISBN 978-3-540-77313-9 e-ISBN 978-3-540-77314-6

DOI 10.1007/978-3-540-77314-6

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 01-99, 01A05

Einbandgestaltung: deblik, Berlin
Herstellung: le-tex publishing services oHG, Leipzig
Satz: Sylvia Voß, Hildesheim

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Vorwort des Herausgebers

Mit diesem Band 2 wird die kulturgeschichtliche Zeitreise durch 6000 Jahre Mathematik bis in die Gegenwart fortgesetzt. In spannungsreichem Bogen führt Hans Wußing in diesem Band die Leser durch die Mathematik der drei letzten Jahrhunderte, eingebettet in die politischen und kulturellen Ereignisse der jeweiligen Epoche und die lebendig beschriebenen Biographien und persönlichen Schicksale der Mathematiker als Forscher und Lehrer.

Ist Leonhard Euler mit seiner ungeheuren Schaffenskraft und Produktivität der herausragende Mathematiker im 18. Jahrhundert, Carl Friedrich Gauß der alle überragende Princeps Mathematicorum im 19. Jahrhundert, so ist David Hilbert der weltweit unumstrittene große Mathematiker im ausgehenden 19. und in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Ihnen widmet deshalb Hans Wußing besondere Abschnitte zwischen den Darstellungen der erstaunlichen Fortschritte und Ergebnisse vieler anderer Mathematiker in einzelnen Gebieten und Epochen.

Die durch Leibniz und Newton ausgelöste stürmische Entwicklung der Analysis und die Entstehung ihrer Teildisziplinen, die Anfänge wissenschaftlicher Wahrscheinlichkeitstheorie, enorme Fortschritte in Algebra und Zahlentheorie und die Entdeckung und Erschließung neuer Gebiete der Geometrie – darstellende, projektive, n-dimensionale und nichteuklidische Geometrie – kennzeichnen die Entwicklung im 18. und 19. Jahrhundert, Hilberts Axiomatisierung der Geometrie und Cantors Begründung der Mengenlehre den Aufbruch zu neuen Ufern an der Wende zum 20. Jahrhundert.

Das 20. Jahrhundert selbst wartet mit einer kaum beschreibbaren Fülle neuer Begriffe, Gebiete und Ergebnisse auf. Diskussion der Grundlagen, Axiomatisierung, moderne Algebra, Funktionalanalysis, algebraische Geometrie, mathematische Physik und Stochastik sind Stichworte für die erste Hälfte dieses Jahrhunderts. Strukturmathematik à la Bourbaki und Computer markieren und bestimmen die Entwicklung in der zweiten Hälfte.

All dies hat Hans Wußing auf dem Hintergrund der durch die beiden Weltkriege und die dunkle Zeit des Nationalsozialismus geprägten allgemeinen Entwicklung prägnant und lebendig beschrieben, abgeschlossen durch den Bericht über inzwischen gelöste und weiterhin ungelöste Probleme der Mathematik.

Gedanken zur Zukunft der Mathematik – so hat Prof. Dr. Eberhard Zeidler, ehem. Direktor des Max-Planck-Instituts für Mathematik in den Naturwissenschaften in Leipzig, seinen Ausblick ins 21. Jahrhundert benannt. Er beschreibt darin eindrucksvoll die derzeit behandelten Themen und Probleme und deren richtungweisende Anstöße für die Forschung zur weiteren Entwicklung der Mathematik.

Der zeitliche Schnitt zwischen den beiden Bänden erst an der Wende vom 17. zum 18. Jahrhundert ist ein deutlicher Hinweis auf die enorme Ausbreitung und Zunahme mathematischer Forschung und ihrer Ergebnisse in den letzten drei Jahrhunderten im Vergleich zu den Jahrtausenden davor.

Diese Zunahme – insbesondere der geradezu exponentielle Zuwachs im 20. Jahrhundert – war für Autor und Herausgeber eine große Herausforderung: Die Entstehung neuer mathematischer Disziplinen mit vielen Teildisziplinen und deren Verflechtung erschweren eine inhaltliche Gliederung, die zeitlich unterschiedlichen Entwicklungen desselben Gebietes eine chronologische Darstellung, und die weltweite Ausbreitung, die manchmal gleichzeitige, oft auch zeitlich versetzte mathematische Forschung in verschiedenen Ländern, Kulturkreisen oder Schulen hindern eine strenge Gliederung nach Regionen wie in den frühen Kulturen.

Das Gleiche gilt für die Einbettung der mathematischen in die allgemeine kulturelle (und politische) Entwicklung. Auch hier bietet sich ein Wechsel rein inhaltlicher, chronologischer oder nur an Regionen orientierter Darstellung an. So haben Autor und Herausgeber einen Kompromiss für die Struktur des vorliegenden Bandes gesucht.

Dem Autor Wußing ist es gelungen, die Fülle des Stoffes soweit wie möglich in den aufeinander folgenden Epochen jeweils nach Gebieten gegliedert darzustellen und parallel dazu die Entwicklung der Mathematik in einzelnen Ländern zu beschreiben, im Hinblick auf den Umfang des Bandes allerdings beschränkt auf ausgewählte Regionen. Als besonders problematisch erwies sich die Darstellung der Entwicklung im 20. Jahrhundert angesichts der kaum noch überschaubaren Fülle der Forschungsergebnisse, insbesondere in der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts, da sie bisher nur zum geringsten Teil mathematikhistorisch aufbereitet und bewertet wurden. So musste auch hier der Autor wieder den „Mut zur Lücke“ haben und dabei zwangsläufig eine subjektiv geprägte Auswahl treffen (siehe dazu die Ausführungen zur Historiegraphie des 20. Jahrhunderts in Kap. 11).

Mit entsprechenden Problemen sah sich der Herausgeber bei den Tabellen am Anfang und Ende der Kapitel konfrontiert. Zwar ließen sich die allgemeine politische Geschichte und die wichtigsten Ergebnisse in Technik und Naturwissenschaften chronologisch geordnet tabellarisch darstellen, jedoch nicht mehr die ungeheure Vielfalt der Ergebnisse in der Mathematik im 19. und 20. Jahrhundert in Tabellen am Kapitelende; für die zeitlich versetzten und regional verschiedenen Ausprägungen der vielen Stilrichtungen in Baukunst, Malerei, Musik und Literatur erschien eine textgebundene Darstellung angemessen.

Wie in Band 1 sind den Kapiteln chronologisch angeordnete Tabellen mit den wichtigsten politischen Ereignissen der jeweiligen Epoche vorangestellt, außerdem Tabellen zu Wissenschaft und Technik. Hingegen wird die kulturelle Entwicklung im laufenden Text beschrieben.

Auch hier illustrieren farbige Fotos den kulturellen und historischen Hintergrund, künden Briefmarken aus dem großen Schatz des Autors von der Wertschätzung der Gelehrten und ihrer Werke in aller Welt, zeigen schematische Darstellungen Zusammenhänge und zeitliche Abfolgen von Entwicklungen. Schwarz-weiß gezeichnete Figuren verdeutlichen mathematische Ergebnisse, die Porträts namhafter Mathematiker vermitteln einen Eindruck von ihrer Persönlichkeit.

Auch für dieses Buch ist es uns nicht gelungen, für einige Abbildungen die Rechtsinhaber zu ermitteln bzw. unsere Anfragen blieben unbeantwortet. Betroffene und Personen, die zur Klärung beitragen können, werden gebeten, sich beim Verlag zu melden.

Der Medienwissenschaftler und Mitherausgeber Heiko Wesemüller-Kock hat die Bildseiten mit den Porträts herausragender Mathematiker der jeweiligen Epoche und das Layout des gesamten Bandes gestaltet, Fotos, Dias, Skizzen und Briefmarken aus der Sammlung des Autors mit Unterstützung von Frau Anne Gottwald zu druckfertigen Vorlagen verarbeitet und den Text durch eigene Beiträge bereichert. Dafür sage ich beiden sehr herzlichen Dank.

Den Mitarbeiterinnen im Institut für Mathematik und Angewandte Informatik Bettina David, Martina Rosemeyer und Tanja Seifert danke ich für die Übertragung der umfangreichen Manuskripte auf den Computer, dem wissenschaftlichen Mitarbeiter Mark Kaldewey und den Studentinnen Annelie Jasper, Daniela Baehr und Sylvia Voß für die mühevolle Bearbeitung der Verzeichnisse und vieler Änderungen. Mein besonderer Dank gilt Sylvia Voß und Heiko Wesemüller-Kock für die gründliche Überprüfung und den endgültigen Satz dieses Buches.

Herzlichen Dank sage ich Herrn Prof. Dr. H. Luttermann und Herrn Dr. K.-H. Schlote für ihre Beiträge in Kap. 11, Herrn Prof. Dr. E. Zeidler für die „Gedanken zur Zukunft“ in Kap. 12, den Kollegen Folkerts, Kahle, Purkert, Schlote, Sonar, Stiege und Ullrich für die kritische Durchsicht der Texte und Anregungen zu Modifikationen.

Vor allem danke ich dem Autor Hans Wußing für sein Eingehen auf meine Anregungen und die Akzeptanz meiner Vorschläge und Beiträge zur Ergänzung der Texte und Abbildungen.

Für die finanzielle Unterstützung des Projektes danke ich meinen Kollegen Prof. Dr. K.-J. Förster und Prof. Dr. E. Wagner, für die hervorragende Ausstattung dieses Bandes und das Eingehen auf meine Wünsche dem Springer-Verlag Heidelberg und seinem hierfür verantwortlichen Redakteur, Herrn C. Heine, für die Unterstützung bei der Umsetzung in die TEX-Version Frau Köhler.

Wieder war und ist es für Autor und Herausgeber ein Herzensanliegen, die weit verzweigte Entwicklung der Mathematik in ihrer engen Verflechtung mit anderen Wissenschaften vor dem jeweiligen kulturellen und gesellschaftlichen Hintergrund darzustellen. Möge auch dieser Band viele Leser erreichen, in ihnen Interesse und Begeisterung wecken und ihnen zeigen, dass Mathematik keine trockene Wissenschaft, sondern ein wertvoller Teil unserer Kultur ist und die Welt, in der wir leben, ungemein reicher macht.

Hildesheim, im Oktober 2008

Im Namen der Herausgeber
Heinz-Wilhelm Alten

Vorwort des Autors

Der Autor erinnert an die in der Einleitung des ersten Bandes beschriebene Darstellungsweise, die auf dem Gedanken der „Erkundung“ beruht. Dies ist im zweiten Band geradezu zwingend angesichts der Fülle der Einzeldaten, die aber noch keine zusammenhängende kritische Würdigung erfahren haben. Überdies zeigen mir zahlreiche wohlwollende Äußerungen zum ersten Band, dass mein methodologisches Anliegen verstanden und akzeptiert wird.

Auch diesmal sind mir Freunde und Kollegen hilfreich zur Seite gestanden, in erster Linie Herr Professor Alten (Hildesheim), Herr Wesemüller-Kock (Hildesheim) und in bibliothekarischer Sicht Frau B. Römer (Leipzig). Ihnen und vielen anderen sei für uneigennützige Hilfe herzlich gedankt.

Leipzig, im Oktober 2008 *Hans Wußing*

Hinweise für den Leser

Zur besseren Orientierung ist hier auch das Inhaltsverzeichnis von Band 1 aufgeführt.

Runde Klammern enthalten ergänzende Einschübe, Lebensdaten oder Hinweise auf Abbildungen; in Zitaten markieren sie Auslassungen.
Eckige Klammer enthalten

- im laufenden Text Hinweise auf Literatur
- unter Abbildungen Quellenangaben

Abbildungen sind nach Teilkapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Abb. 10.1.4 die vierte Abbildung in Abschnitt 10.1 von Kapitel 10.

Die Namen russischer Gelehrter sind im Text der deutschen Aussprache entsprechend geschrieben. Im Personenverzeichnis ist außerdem die wissenschaftliche Transskription aufgeführt.

Die Originaltitel von Büchern und Zeitschriften sind kursiv wiedergegeben, wörtliche Zitate kursiv mit Anführungszeichen. Auf weiterführende Literatur bzw. auf Erläuterungen eines nur verknappt dargestellten Sachverhaltes wird durch Hinweise wie (vgl. ausführlich in. . .) verwiesen.

Im Literaturverzeichnis wird wortwörtlich oder inhaltlich zitierte sowie weiterführende Literatur aufgeführt.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis zu Band 1

Einleitung

Unsere kulturgeschichtliche Zeitreise begann im ersten Band dieses Werkes mit den Leistungen früher Kulturen und führte bis zur Mathematik von Leibniz und Newton (also bis zur Wende vom 17. zum 18. Jahrhundert). Der vorliegende Band 2 lädt den Leser dazu ein, die kulturgeschichtliche Zeitreise durch 6000 Jahre Mathematik fortzusetzen. Mit Spannung lassen sich die facettenreichen Stationen der Entwicklung der letzten drei Jahrhunderte von Euler bis zur Gegenwart verfolgen. Am Beginn des 21. Jahrhunderts endet diese Reise mit Fragen an die Zukunft dieser Wissenschaft.

Vom Beginn des 18. Jahrhunderts bis in unsere Tage hat mit zunehmender Dynamik eine unglaubliche Fülle von Entwicklungen in fast allen Bereichen menschlichen Lebens auf unserer Erde stattgefunden: in der Politik, im gesellschaftlichen Leben, in der Wirtschaft, in der Medizin, in Kunst, Technik und Industrie, in der Wissenschaft – auch in der Mathematik. Diese bildet zwar nur einen kleinen Ausschnitt in der kaum noch überschaubaren Fülle wissenschaftlicher Erkenntnisse und Ergebnisse und diese wiederum nur einen kleinen Ausschnitt der gesellschaftlichen Entwicklung.

Dennoch: Mathematik durchdringt fast alle Bereiche unseres Lebens, steckt in unseren Häusern, in Geräten und Maschinen, in Autos und Automaten. Sie ist Wegbereiter und unentbehrliches Werkzeug für die Neuerungen im Transportwesen und Verkehr, in der Architektur, in Ökonomie, Industrie und Technologie, im Nachrichtenwesen und vielen anderen Bereichen, auch in Wissenschaft und Forschung selbst. Wer vermutet schon, dass er es beim Einkauf mit den schwarzen Strichen auf den Verpackungen mit Primzahlen zu tun bekommt (mit deren Hilfe die Codierung erfolgte)? Wer denkt beim digitalen Telefonieren daran, dass letztlich alle Mitteilungen nur als im Binärsystem verschlüsselte Zahlen durch die Leitungen oder per Funksignal an die Empfangsstation gesandt werden? Kurzum: Mathematik ist überall gegenwärtig, wenn auch für die meisten unsichtbar. Ohne die Anstrengungen und Ergebnisse vieler Generationen mathematischer Denker wäre unsere heutige Welt undenkbar.

Unter den jeweiligen politischen und ökonomischen Rahmenbedingungen entfaltete sich im 18. Jahrhundert ein reichhaltiges kulturelles Leben in Europa, zunächst dominant geprägt von den Höfen der zumeist absolut regierenden Herrscher. Ungeachtet aller kriegerischen Auseinandersetzungen von den Zeiten des Sonnenkönigs bis zur Französischen Revolution und zur Befreiung Europas von der Herrschaft Napoleons erlebten Kunst und Kultur einen ungeahnten Aufschwung. Neue philosophische Strömungen entstanden mit der Aufklärung, neue Theorien in Politik, Gesellschaft und Ökonomie (Merkantilismus) breiteten sich aus, die Wissenschaften konnten sich entfalten. Auch die Mathematik erfuhr neue Impulse.

Aus der von Newton mit seinen Fluxionen und von Leibniz mit dem Calculus begründeten Infinitesimalrechnung entwickelten sich als neue Gebiete die Theorie der unendlichen Reihen, die Variationsrechnung, die analytische Mechanik und die Theorie der Differentialgleichungen. Das Ringen um das Parallelenproblem und die Wiedergabe räumlicher Objekte durch Perspektive und Mehrtafelverfahren beherrschten die Geometrie, die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde mit der *Ars conjectandi* von Jakob Bernoulli zur mathematischen Disziplin. Der alle überragende Mathematiker des 18. Jahrhunderts war Leonhard Euler, der in fast allen Gebieten der Mathematik Wegweisendes leistete und mit seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* Generationen von Schülern und Studenten begleitete.

Der enorme Aufschwung von Kunst und Kultur im 18. Jahrhundert erlebte seine Fortsetzung im 19. Jahrhundert mit der Ausprägung alter und der Entstehung neuer Stilformen: Vom Klassizismus bis zum Jugendstil in der Baukunst, von der französischen Klassik über Romantik und Realismus zum Impressionismus in der Malerei, von der Wiener Klassik über Kompositionen der Romantik zur Großen Oper, zur Programmmusik und zum Impressionismus in der Musik, von der Weimarer Klassik über die Lyrik und Romane der Romantiker zum Realismus und Naturalismus in der Literatur.

In Wissenschaft und Technik wurde das 19. Jahrhundert geprägt von den weitreichenden Ergebnissen naturwissenschaftlicher Forschung und den zahlreichen technischen Erfindungen, die in industrieller Produktion ihren Niederschlag fanden und zur Industriellen Revolution führten. All dies konnte nur in ständiger Wechselwirkung mit der Mathematik und auf dem Hintergrund ihrer enormen Entwicklung gedeihen: Fourier begründete die „Mathematische Physik“ als neue Disziplin, die Analysis wurde durch präzise Begriffe und strenge Beweise auf eine solide Grundlage gestellt, darstellende Geometrie bildete die Grundlage für technisches Zeichnen.

Aber auch viele Gebiete rein theoretischer Forschung erlebten enormen Aufschwung, Gebiete, die um ihrer selbst willen aus wissenschaftlicher Neugier betrieben und von Vertretern der angewandten Mathematik als *„l'art pour l'art“* angesehen wurden, jedoch im 20. Jahrhundert ungeahnte Bedeutung erlangten. Dazu gehören die nichteuklidische Geometrie und die Axiomatisierung der Geometrie, die Entwicklung neuer Begriffe und Methoden in der Algebra und der Zahlentheorie und deren Verwendung zur Lösung grundlegender Probleme sowie die Begriffsbildungen der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Theorie der analytischen Funktionen. Die überragende Gestalt unter den Mathematikern des 19. Jahrhunderts ist der *Princeps Mathematicorum* Carl Friedrich Gauß, der mit seinen *Disquisitiones arithmeticae*, seinen Beweisen des Fundamentalsatzes der Algebra, der Methode der kleinsten Quadrate und vielen anderen Ergebnissen epochale Beiträge geleistet hat.

Im 20. Jahrhundert erfuhren Kunst und Kultur eine ungeheure Fülle und Vielfalt der Stilrichtungen und ihrer Ausprägung, die im Rahmen dieses Bandes nur in sehr großen Zügen und selektiv beschrieben werden kann.

Gleiches gilt für die Entwicklung von Wissenschaft und Technik: die atemberaubende Entwicklung vom Propellerflugzeug zur Raumfähre, von den elektromechanischen Rechenmaschinen des Hermann Hollerith zum Supercomputer Roadrunner der IBM, von der Entdeckung der Radioaktivität zum Atomkraftwerk und zur Kernfusion, vom Röntgenapparat zum Magnetresonanztomographen und vom Morseapparat zum weltumspannenden Internet sind Beispiele für die enorme Dynamik dieses Prozesses.

All diese Entwicklungen basieren wie die Quantentheorie Max Plancks und die Relativitätstheorie Einsteins neben den Entdeckungen der Naturwissenschaftler und den Leistungen der Ingenieure letzten Endes auch auf der Mathematik, ihren exponentiell angestiegenen Ergebnissen in der Forschung und ihrer globalen Ausbreitung. Am Beginn des 20. Jahrhunderts stehen die von Hilbert auf dem Pariser Internationalen Mathematikerkongress formulierten 23 Probleme, von denen viele inzwischen gelöst sind. Die von Georg Cantor begründete Mengenlehre und die Diskussion der von Bertrand Russell und anderen gefundenen Antinomien waren beherrschende Themen dieser Periode, ebenso die Axiomatisierung der Geometrie, die unterschiedlichen Denkweisen des Formalismus, Logizismus und Intuitionismus, die Idee der Riemannschen Fläche und die algebraische Theorie der Körper.

In manchen Gebieten wurde die mathematische Forschung im Ersten (und auch im Zweiten) Weltkrieg unterbrochen, in anderen sogar intensiviert. Zwischen den beiden Weltkriegen erfuhr die Mathematik große Fortschritte in vielen Bereichen, publiziert u. a. in den Standardwerken *Methoden der mathematischen Physik* von Courant/Hilbert, *Grundzüge der theoretischen Logik* von Hilbert/Ackermann, *Grundlagen der Mathematik* von Hilbert/Bernays, *Moderne Algebra* von van der Waerden, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik von v. Neumann, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* von Kolmogorow. Als fruchtbare neue Teildisziplinen der Analysis entstanden die Funktionalanalysis und die Topologie.

Nach dem Zweiten Weltkrieg erlebte die Algebra neuen Aufschwung in der algebraischen Geometrie und der Strukturtheorie der Bourbaki-Gruppe, deren *Éléments de mathematiques* jahrzehntelang Lehre und Studium der Mathematik prägten. Durch die Entwicklung der Computer gewann die sog. diskrete Mathematik enorm an Bedeutung. Die bis dahin mit Hilfe analytischer Methoden behandelten (und damit oft nur, schwer oder gar nicht lösbaren) Probleme werden nun durch Diskretisierung approximativ gelöst und zwar mit einer der stark gewachsenen Kapazität und Geschwindigkeit der Computer entsprechenden Genauigkeit. Die dazu entwickelten mathematischen Methoden und Algorithmen werden von Informatikern in die entsprechende Software für die Computer umgesetzt, ebenso die für die Steuerung wissenschaftlicher Prozesse entwickelten Verfahren der Optimierung, die mit Hilfe der Zahlentheorie gewonnenen Sicherungssysteme für Daten der Banken, Finanzämter und Geheimdienste, die Algorithmen für bildgebende Verfahren in der Medizin und vieles andere.

Offene und gelöste Probleme der Mathematik – so der in den 80er Jahren bewiesene Vierfarbensatz, der in den 90er Jahren bewiesene Große Satz von Fermat und die bislang weder bewiesene noch widerlegte Riemannsche Vermutung – stehen am Schluss dieser Betrachtungen.

Die auf dem *„Millennium Meeting“* am 24. Mai 2000 in Paris formulierten sieben Problemgruppen und die Gedanken zur Zukunft der Mathematik von Eberhard Zeidler in Kap. 12 weisen in die Mathematik im 21. Jahrhundert.

Heinz-Wilhelm Alten

9 Mathematik im Zeitalter des Absolutismus und der Aufklärung

1643–1715	Ludwig XIV. König von Frankreich, Höhepunkt des Absolutismus
1707	Großbritannien entsteht als Vereinigung von England und Schottland
1707–1783	Lebenszeit von Leonhard Euler
1709	E. W. v. Tschirnhaus und J. F. Böttger erfinden in Sachsen das europäische weiße Hartporzellan
1710	Erste europäische Porzellanmanufaktur in Meißen gegründet
1713	Frieden von Utrecht beendet den Spanischen Erbfolgekrieg
1714	Der Kurfürst von Hannover wird als Georg I. König von England
1715	Der „Sonnenkönig“ Ludwig XIV. stirbt in Versailles
1716	Universalgelehrter G.W. Leibniz gestorben
1725	Eröffnung der Petersburger Akademie der Wissenschaften
1725	Peter der Große gestorben
1727	Newton gestorben
1733–1743	Große russische Nordexpedition unter Vitus Bering
1735–1737	Gradmessungsexpeditionen der Pariser Akademie nach Südamerika und Lappland beweisen die Abplattung der Erde
1740–1748	Österreichischer Erbfolgekrieg
1740–1786	Friedrich II., der Große, König von Preußen
1740–1780	Maria Theresia regiert das österreichische Erbe
1741	Neugründung der Berliner Akademie
1756–1763	Siebenjähriger Krieg
1762–1796	Katharina II., die Große, regiert Russland als Zarin
1765–1790	Aufgeklärter Absolutismus in Österreich unter Kaiser Joseph II.
1768–1779	Entdeckungsreisen von James Cook
1769	James Watt erhält das Patent auf seine Dampfmaschine
1770	Australien wird britisch
ca. 1770	Beginn der Industriellen Revolution in England
1770–1785	Periode des „Sturm und Drang“ in der deutschen Literatur
1772	Erste Teilung Polens
1773	„Tea-Party“ in Boston
1774	Ludwig XVI. wird König von Frankreich
1775–1783	Unabhängigkeitskrieg in Nordamerika
1776	Unabhängigkeitserklärung von 13 Kolonien in Philadelphia
1777	Lavoisier leitet eine neue Entwicklungsetappe in der Chemie ein
1778	Carl v. Linné begründet das nach ihm benannte System der Pflanzen
1781	Immanuel Kant veröffentlicht sein Hauptwerk „Kritik der reinen Vernunft“
1783	Aufstieg eines Heißluftballons durch die Gebrüder Montgolfier
1783	Im Frieden von Paris und Versailles erreichen die USA die Unabhängigkeit
1789	George Washington wird erster Präsident der USA
1789	Sturm auf die Bastille, Französische Revolution, Verkündung der Menschenrechte
1794	Gründung der École Polytechnique in Paris

9.0 Einführung

9.0.1 Vom Absolutismus zur Aufklärung

Häufig wird die Zeit zwischen dem Ende des 30jährigen Krieges und der Französischen Revolution als Periode des Absolutismus verstanden, doch ist auch diese Periode nicht scharf eingrenzbar. Eher geht es um Charakteristika dieser politischen Staatsform, die mit einem Wandlungsprozess, mit dem Entstehen und dem Hervortreten von Nationalstaaten verbunden ist. Gemeint ist die absolute, uneingeschränkte Herrschaft einer Einzelperson – sei es Kaiser, Zar, König oder ein anderer Fürst – über eine Region bzw. Nation. Es handelt sich um die Zeit seit dem Ende des 17. Jahrhunderts, insbesondere um das 18. Jahrhundert. Aber noch zu Anfang des 19. Jahrhunderts gab es absolutistisch regierte Staaten.

Als Prototyp und als klassisches Beispiel für Absolutismus wird häufig der französische Staat unter dem „Sonnenkönig“ Ludwig XIV. (1638–1715) herausgehoben. Authentisch ist sein Ausspruch: *„Der Staat bin ich“*. Gemeint ist: In seiner Person repräsentiere sich Staat und Staatsmacht.

Auch Preußen, Österreich, Portugal, Spanien und Russland wurden absolutistisch regiert, ebenso Sachsen, Schweden und kleinere Staaten, innerhalb des Heiligen Römischen Reiches deutscher Nation. Man denke an Friedrich Schillers Konfrontation mit seinem Landesfürsten.

Preußen unter Friedrich II. („dem Großen“, 1712–1786) und Russland unter Peter I. („dem Großen“, 1672–1725) stiegen zu Großmächten im Range Frankreichs, Österreichs und Englands auf. Der Versuch Oliver Cromwells (1599–1658), in England und dem eroberten und unterdrückten Irland dauerhaft eine Republik zu errichten, schlug fehl und mündete schließlich in eine konstitutionelle Monarchie. In den Niederlanden dagegen konnte sich nach einem Befreiungskampf gegen die Spanier eine bürgerliche Republik behaupten. Die englischen Kolonien in Nordamerika konnten ihre Unabhängigkeit erringen; im Jahre 1783 wurden die USA gegründet.

Abb. 9.0.1 Ludwig XIV.; Richelieu (Frankreich 1970)

Andererseits schritt die Kolonialisierung weiter Gebiete Afrikas, Süd- und Mittelamerikas, Asiens und Australiens in großem Maßstab voran, unterstützt durch Missionierung und Handelskompanien verschiedener Kolonialmächte, die sich ihrerseits durch Piraterie und offizielle Kriegsführung zur See bekämpften.

Europa litt unter weiträumigen militärischen Verwicklungen. Spektakuläre Schlachten forderten manchmal an einem Tage bisher noch nicht gekannte Verluste an Toten und Verwundeten. Die Militärtechnik hatte in diesem zynischen Sinne „Fortschritte" gemacht, nicht zuletzt durch Mitwirkung von Mathematik und Naturwissenschaften. Der Festungsbau wurde nach dem Vorbild des französischen Festungsbaumeisters Sébastian le Prestre de Vauban (1633–1707) zu ingenieurtechnischen Meisterleistungen fortgeführt.

Die Landkarte Europas veränderte sich als Folge der Kriege zwischen Großmächten und ihren Verbündeten, bei wechselnden Koalitionen: Türkenkriege, Raubzüge Ludwigs XIV., Pfälzischer Erbfolgekrieg, Spanischer Erbfolgekrieg, Nordischer Krieg, der Siebenjährige Krieg und schließlich die Napoleonischen Kriege.

In jüngerer Zeit haben Historiker das Adjektiv „absolutistisch" (*ab leges absolutus* = von den Gesetzen gelöst) inhaltlich abgeschwächt und – zu Recht – auf die Zwänge verwiesen, denen auch der absolutistischste Herrscher unterworfen war: außenpolitische, innenpolitische (Stärkung der Zentralmacht gegen partikuläre Adelsinteressen), ökonomische und ideologische Widerstände und Theorien.

Stehende Heere und Kriege, Macht- und Prachtentfaltung und Repräsentationsbedürfnis erforderten Unsummen an Geld. Nach und nach bildete sich die Wirtschaftstheorie des sog. Merkantilismus heraus, die lange Zeit eine vorherrschende Rolle spielte, ehe sie von Physiokratie und kapitalistischer Wirtschaftstheorie abgelöst wurde.

Das Wort „Merkantilismus" scheint erst 1763 vom Marquis de Mirabeau (1749–1791) geprägt worden zu sein und leitet sich ab vom lateinischen „mercari", d. h. Handel treiben. Nach merkantilistischer Auffassung beruhen Reichtum und Stärke eines Staates auf der Menge an Gold und Edelmetallen, über die der Staat verfügt. Der führende Theoretiker des Merkantilismus, der Franzose Jean Baptiste Colbert (1619–1683), Finanzminister von Ludwig XIV., hatte es auf den Punkt gebracht:

> *„Ich glaube, man wird sich ohne weiteres in dem Grundsatz einig sein, daß es einzig und allein der Reichtum an Gold ist, der die Unterschiede an Größe und Macht zwischen den Staaten begründet."*

Der Theorie zufolge muss bei der Förderung von Handel und Gewerbe mehr exportiert (Zufluss von Geld) als importiert (Abfluss von Geld) werden. Bei vorausgesetzter konstanter Geldsumme auf der Erde kommt es notwendigerweise zu Verschiebungen bei der Gewichtung von Staaten und damit zu Kriegen.

Abb. 9.0.2 Sébastian le Prestre de Vauban, der Baumeister der Festungen des Sonnenkönigs (Frankreich 1955); Jean Baptiste Colbert, Finanzminister Ludwigs des XIV. und Mitbegründer des Merkantilismus (Frankreich 1944)

Zur Verbesserung der Produktion und zur Erhöhung des Gewinnes verlagerte sich die Produktion zunehmend vom Handwerk zu den Manufakturen. Der Erfolg des Manufakturwesens beruhte darauf, dass der Produktionsprozess in einzelne Teile zergliedert wurde, die Arbeitsschritte immer wiederholt und zudem von nur angelernten, auf eben diesen Schritt festgelegten Arbeitskräften bewältigt werden konnten. Auch Mathematik und Naturwissenschaften hatten, wie sich zeigen sollte, einen beträchtlichen Anteil an der Produktivität der Manufakturen.

Die Ausweisung der Hugenotten aus Frankreich, wo sie starke Positionen in Wirtschaft und Politik innegehabt hatten, schwächte Frankreichs Ökonomie so erheblich, dass Vauban die Rückkehr der Hugenotten forderte.

Während der Wissenschaftlichen Revolution hatten Mathematik und Naturwissenschaften nach Inhalt und Methode eine durchgreifende Wandlung erfahren und hohe gesellschaftliche Anerkennung errungen. Auch im Institutionellen hatten die Wissenschaften feste Verankerungen finden können, vom Publikationswesen bis hin zur Gründung von Gesellschaften und Akademien [Grau 1988], (vgl. Bd. 1, Kap. 8).

Akademien boten auch und gerade den Wissenschaftlern verlässliche Heimstatt, sofern sie die Interessen der Herrscherhäuser und deren Repräsentationsbedürfnis befriedigen konnten. Es gab Spannungen unterschiedlicher Art. So hing das Gedeihen der Petersburger Akademie nicht unbeträchtlich davon ab, wer Favorit der Zarin Katharina II. (1729–1796) war. Bekannt ist die Zurücksetzung Leonhard Eulers gegenüber dem Franzosen Maupertuis an der Preußischen Akademie: Eulers leicht frömmelnde Art ließ kein gutes Verhältnis zu Friedrich II. aufkommen. Dazu trat das jämmerliche Versagen der Wasserspiele in Sanssouci, an dem Euler jedoch keine Schuld traf. Auch gab es antisemitische Strömungen, wiewohl der König erklärt hatte, es könne jeder seiner Untertanen nach seiner eigenen Façon selig werden. Als nämlich der weithin anerkannte jüdische Aufklärungsphilosoph Moses Mendelssohn (1729–1786) von den Mitgliedern der Preußischen Akademie einstimmig hinzugewählt worden war, verweigerte der König die Zustimmung und verhinderte damit die Aufnahme in die Akademie.

Doch soll bekräftigt werden: Bei allen Misshelligkeiten und der letztlichen Unterordnung der Tätigkeit der Akademien unter die Ziele der Herrscherhäuser erlaubten es die Gegebenheiten an den Akademien den Wissenschaftlern auch, ihre eigenen Fragestellungen und Ziele – „rein“ oder „angewandt“ – zu verfolgen. Die Ergebnisse gaben den Wissenschaftlern Recht, zumal im Zusammenwirken mit der Aufklärung.

Aufklärung war durchaus unterschiedlich im gedanklichen und theoretischen Ansatz; sie bewegte sich, grob gesprochen, zwischen dem Empirismus und der Denkweise von Francis Bacon einerseits und dem Rationalismus von Descartes andererseits. Aufklärung umfasste – was Mathematik und Naturwissenschaften betraf – die Ergebnisse der Wissenschaftlichen Revolution.

Aufklärung und Wissenschaft waren natürliche Verbündete und stützten sich gegenseitig, auch bei anderen Zielstellungen. Auch die der Aufklärung weniger Nahestehenden profitierten von der allgemeinen Grundstimmung. Und schließlich trug die Aufklärung nicht unerheblich zur Überwindung von Feudalismus und Absolutismus bei.

Die Ziele der Aufklärung erfassten im 17. und 18. Jahrhundert ganz Europa und Nordamerika. Aufklärung markiert eine äußerst bedeutsame Periode der europäischen Geistesgeschichte. Es ging darum, sich von Vorurteilen zu lösen, die Berechtigung weltlicher und geistlicher Obrigkeiten kritisch zu hinterfragen, Platz für neu zugänglich gewordene mathematische und naturwissenschaftliche Einsichten zu eröffnen und den menschlichen Verstand als oberste Instanz für Rechtfertigung oder Abänderung gesellschaftlicher Zustände einzusetzen. Vernunft werde die Wahrheit ans Licht bringen. Auch herrschte die Vorstellung, Vernunft und Freiheit des Denkens würden Armut und Unterdrückung schließlich besiegen können.

Die Aufklärung hatte ihre Wurzeln in England und Frankreich, griff nach Deutschland und den Niederlanden über und erfasste Russland.

Auch erkannte man, dank außerordentlich verbesserter Reisemöglichkeiten, den hohen Stand fremder Kulturen, wie z. B. von Persien und China, herausgehoben etwa vom Baron von Montesquieu bzw. von Leibniz.

Die Liste der Aufklärer ist lang; sie umfasst unter anderem die folgenden Pioniere menschlichen Denkens, von denen jeder auf seinem Gebiet Bedeutendes geleistet hat:

John Locke und David Hume in England; Baruch Benedictus de Spinoza in den Niederlanden; Marquis de Pombal in Portugal; Denis Diderot, Jean d'Alembert, Voltaire, Charles de Montesquieu, Marquis de Condorcet, Claude Adrien Helvétius, Jean-Jacques Rousseau in Frankreich; Leibniz, Gotthold Ephraim Lessing, Christian Wolff, König Friedrich II., Johann Gottfried Her-

Abb. 9.0.3 Voltaire in verschiedenen Lebensaltern (Monaco 1994); I. Kant

der, Immanuel Kant in Deutschland; Kaiser Joseph II. in Österreich; Stanislaus II. (Stanislaw August Poniatowski) in Polen; Zar Peter I. in Russland. Kant hat 1784 die Frage beantwortet, was Aufklärung sei:

> *„Aufklärung ist der Ausgang des Menschen aus seiner selbstverschuldeten Unmündigkeit. Unmündigkeit ist das Unvermögen, sich seines Verstandes ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Selbstverschuldet ist diese Unmündigkeit, wenn die Ursache derselben nicht am Mangel des Verstandes, sondern der Entschließung und des Mutes liegt, sich seiner ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Sapere aude! Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen! ist also der Wahlspruch der Aufklärung.“* [Kant 1999, S. 20]

9.0.2 Baukunst, Malerei, Musik und Literatur im 18. Jahrhundert
(H.-W. Alten)

Kunst und Kultur erlebten im 18. Jahrhundert in Europa ungeachtet aller Kriege einen ungeahnten Aufschwung, angeregt durch philosophische Strömungen, neue Theorien in Politik, Gesellschaft und Wirtschaft, zugleich fußend auf dem reichen Erbe vorangegangener Zeiten, belebt durch mehrfachen Wandel der Auffassungen und Ideen.

Baukunst

So bescherte die Baukunst zunächst reife Früchte im Stile des späten Barock, wandelte sich von dessen prunkvoller Schwere zu den ovalen (präzise: elliptischen) Zentralbauten mit den ins Leichte, Zierliche und Zarte aufgelösten Formen des Rokoko, das in den prachtvollen Schlössern und Kirchen Süddeutschlands (z. B. Würzburger Residenz, Amalienburg, Wieskirche, Kirchen in Steinhausen, Schussenried und Zwiefalten) als „bayerisches Rokoko“ bzw. „schwäbisches Barock“, in Preußen als „friderizianisches Rokoko“ (Sanssouci), in Russland in den Prunkbauten Rastrellis (Winterpalais, Peterhof), im Louis-Quince-Stil des französischen Rokoko und andernorts seine eindrucksvollen Zeugen hervorbrachte. Als herausragende Beispiele und Baumeister des späten Barock seien hier genannt: Schloss und Grand Trianon in Versailles von Jules Hardouin Mansart (1646–1708), die geometrisch strengen Parkanlagen von Adrien Le Nôtre (1612–1700), die St.-Pauls-Kathedrale von Sir Christopher Wren (1632–1723) in London, die bizarren Fassaden in dem nach José Churriguera (1650–1723) benannten Stil in Salamanca und Madrid, die Kirchen und Schlösser der vier Brüder Dientzenhofer mit den von ihnen eingeführten Gewölbeformen in Böhmen und Franken, die zahlreichen Kirchenbauten von Kilian Ignaz Dientzenhofer (1689–1751) mit der Durchdringung von Lang- und Zentralbau im „böhmischen Spätbarock“, Zeughaus und Stadtschloss von Andreas Schlüter (ca. 1662–1732) in Berlin, Schloss Charlottenburg in Berlin und Sanssouci in Potsdam von Georg Wenzeslaus von Knobelsdorf (1699–1753), der Zwinger von Daniel Pöppelmann (1660–1714) und die Frauenkirche von Georg Bähr (1666–1738) in Dresden, die Kirchen und Schlösser der Baumeister Johann Bernhard Fischer von Erlach (1656–

Abb. 9.0.4 Bibliothek der Klosteranlage Schussenried. Der Bibliothekssaal im „schwäbischen Barock“ ist der berühmteste Teil der von Dominikus Zimmermann geplanten spätbarocken Anlage. Das Deckenfresko wurde 1757 von Franz Georg Hermann vollendet [Foto Alten]

Abb. 9.0.5 Katharinenpalais in Puschkin bei St. Petersburg, eine der Prunkbauten Rastrellis unter den russischen Zaren. Schon Peter d. Gr. hatten die barocken Schlösser und Herrensitze in Frankreich als Vorbild gedient. Westtor zum Zwinger in Dresden, dem berühmten spätbarocken Bau von Daniel Pöppelmann [Foto Alten]

1723), Lukas von Hildebrandt (1668–1745), Jakob Prandtauer (1660–1726), Balthasar Neumann (1687–1757) und der Brüder Asam in Österreich und Bayern, die vielfach dem auch als Spätbarock bezeichneten Rokoko zugerechnet werden.

Für die Bauten im Stil des „bayerischen“ und des “friderizianischen“ Rokoko sind Johann Michael Fischer (ca. 1692–1766), Dominikus Zimmermann (1685–1766), François Cuvilliés (1695–1768) und Georg Wenzeslaus von Knobelsdorff die bedeutendsten Vertreter, für den Stil Louis-Quinze Germain Boffrand (1667–1754).

Die Rückbesinnung auf die klaren Formen der klassischen Antike machte Johann Joachim Winckelmann (1717–1768) mit seinen Gedanken über die Nachahmung griechischer Werke (1755) zum Wegbereiter des Klassizismus. Die architektonisch strengen Bauten in diesem Stil – das Brandenburger Tor von Carl Gotthard Langhans (1732–1808) in Berlin, die Akademie der Wissenschaften, das Eremitage-Theater und die Dreifaltigkeitskathedrale in Petersburg, das Panthéon und Sainte-Geneviève in Paris, das Petit-Trianon in Versailles und die Bauten der Brüder Adam in England und Schottland seien

Abb. 9.0.6 Invalidendom und Pantheon in Paris. Deutlich zeigt sich in diesen Kuppelbauten der Wandel vom Spätbarock zum Klassizismus [Foto Alten]

als Beispiele genannt – lösten die beschwingten Formen des Rokoko in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts ab und bestimmten die Architektur bis weit ins 19. Jahrhundert.

Entsprechende Perioden prägten auch die Bildhauer im 18. Jahrhundert, fanden Ausdruck in den berühmten Reiterdenkmälern des Großen Kurfürsten von Andreas Schlüter in Berlin und Peters d. Gr. von Etienne-Maurice Falconet (1716–1791) in St. Petersburg, in den Skulpturen des Dresdner Zwingers von Balthasar Permoser (1651–1732) sowie in Prunksarkophagen, Marmorstandbildern und Gartenskulpturen (z. B. Veitshöchheim), aber auch in den Porzellanfiguren der Manufakturen in Sèvres, Meißen, Nymphenburg und andernorts.

Malerei

Die berühmtesten Werke der Malerei in der Zeit des Barock entstanden bereits im 17. Jahrhundert. Sie wurden geschaffen von den großen flämischen Meistern Peter Paul Rubens (1577–1640), Jakob Jordaens (1593–1678) und Anthonis van Dyck (1599–1641), von den berühmten holländischen Malern

Rembrandt van Rijn (1606–1669), Franz Hals (1580/84–1660), Jacob van Ruisdal (1628/29–1682) und Johannes Vermeer van Delft (1632–1675) sowie von den spanischen Malern Diego de Silva Velásquez (1599–1660), Francisco de Zurbaràn (1598–1664) und Bartolome Esteban Murillo (1618–1682).

Im 18. Jahrhundert erlebte die Malerei eine unerhörte Blüte in den Gewölbe-Fresken des späten Barock und des Rokoko in Kirchen und Schlössern – die Wieskirche, die Wallfahrtskirchen in Steinhausen und Zwiefalten und die Würzburger Residenz seien als herausragende Beispiele genannt – aber auch in den Altarbildern, in den anakreontischen Bildern galanter Feste und den Ansichten berühmter Städte, schließlich in den Deckengemälden, Porträts und Landschaftsbildern des Klassizismus der Goethezeit und der frühen Romantik.

Musik

Wahre Triumphe feierte die Musik im 18. Jahrhundert: die Barockmusik erreichte ihre Höhepunkte in den Concerti grossi und Oratorien von Arcangelo Corelli (1653–1713), Alessandro Scarlatti (1660–1725), Antonio Vivaldi (um 1680–1743), Georg Philipp Telemann (1681–1767) und Georg Friedrich Händel (1685–1759), in dem gigantischen Werk des alle überragenden Johann Sebastian Bach (1685–1750) – seine Passionen, die Brandenburgischen Konzerte, das Wohltemperierte Klavier und die Kunst der Fuge seien hier aufgeführt – aber auch in den Klavierkompositionen von Domenico Scarlatti (1685–1757) und den Violinkonzerten und -sonaten von Giuseppe Tartini (1692–1770). Die nach den Regeln des Kontrapunktes komponierten Werke des Barock – insbesondere die Fugen – haben aufgrund ihrer formalen Struktur das Interesse der Mathematiker geweckt und sind deshalb wiederholt von Algebraikern (und ihren Studenten) mit gruppentheoretischen und verwandten Methoden analysiert worden.

Die tänzerisch-beschwingte Musik des Rokoko fand ihren Ausdruck in den Suiten von François Couperin (1668–1733), während Jean Philippe Rameau (1712–1778) mit seinen Opern und Balladen als Begründer der modernen Harmonielehre gilt und auch Jean-Jacques Rousseau mit einem Singspiel und den *Lettres sur la musique française* einen Beitrag zur Entwicklung der Musik in Frankreich lieferte.

Die Form der Oper wurde von Domenico Pergolesi (1710–1736) aus dem Singspiel als Urform der komischen Oper, von Christoph Willibald Gluck (1714–1791) als dramatische und als komische Oper geschaffen und von Domenico Cimarosa (1749–1801) und Luigi Cherubini (1760–1842) weiter entwickelt.

In Deutschland vollzog die sog. Mannheimer Schule den Übergang vom polyphonen zum harmonischen Stil, der dann in der „Wiener Klassik“ seinen einsamen Gipfel erreichte, geprägt in der Zeit von 1781–1827 vom Dreigestirn der großen Meister: Joseph Haydn (1732–1809), Wolfgang Amadeus Mozart