Digitale Signalverarbeitung 1

Hans W. Schüßler

Digitale Signalverarbeitung 1

Analyse diskreter Signale und Systeme

Bearbeitet von
Günter Dehner, Rudolf Rabenstein und Peter Steffen

Fünfte, neu bearbeitete und ergänzte Auflage

Springer

Hans W. Schüßler †
Universität Erlangen-Nürnberg
Erlangen
Deutschland

ISBN 978-3-540-78250-6 e-ISBN 978-3-540-78251-3

DOI 10.1007/978-3-540-78251-3

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

© 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: eStudio Calamar S. L., F. Steinen-Broo, Girona, Spain

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.com

Vorwort

Vorwort zur 5. Auflage

In den Jahren seit dem Erscheinen der vierten Auflage dieses Buchs hat sich die Digitale Signalverarbeitung von einem eigenständigen Forschungsgegenstand zur Basistechnologie für viele Anwendungen entwickelt. Dieser Entwicklung folgend, setzt sich diese fünfte Auflage das Ziel, die klassischen Grundlagen der digitalen Signalverarbeitung mit einer umfangreichen Sammlung von algorithmischen Beispielen zu verbinden. Der Anfang dazu wurde bereits in der vierten Auflage gelegt und ist hier von G. Dehner zu einer vollständigen Programm-Bibliothek erweitert worden.

Dabei soll jedoch nicht etwa die Theorie der Signalverarbeitung hinter einer graphischen Oberfläche verborgen werden. Stattdessen ist jedes einzelne Programm ein Lehrstück für die praktische Implementierung der mathematischen Beschreibung zeitdiskreter Signale und Systeme. Als Mittel zur Umsetzung wurde die zum Industriestandard gewordene Programmierumgebung MATLAB® gewählt. Die im Text verwendeten Funktionen sind im Anhang mit einer Kurzbeschreibung aufgeführt. Weiter werden Beispiele zur Erstellung der angesprochenen Diagramme gezeigt. Die vollständige Beschreibung der ergänzenden Programm-Bibliothek und deren Quelltext stehen im Internet zum Herunterladen bereit.

Für die umfangreiche Arbeit an den Textdateien und den zahlreichen Zeichnungen gebührt Frau Sperk und Frau Koschny Dank. Ebenfalls sei dem Verlag für die gute Zusammenarbeit gedankt.

Leider war es Herrn Prof. Dr. H. W. Schüßler, dem Autor dieses Buchs, nicht mehr vergönnt, dieses Vorhaben bis zum Ende zu begleiten. Daher ist diese Neuauflage auch seinem Andenken als Pionier der digitalen Signalverarbeitung gewidmet.

Erlangen, im Januar 2008

Günter Dehner Rudolf Rabenstein Peter Steffen

Vorwort zur 4. Auflage

Die hier vorgelegte vierte Auflage des ersten Teils der „Digitalen Signalverarbeitung“ ist eine stark erweiterte und völlig neu geschriebene Fassung der Darstellung von 1988. Die sehr schnelle Entwicklung des Gebietes hat eine Neubearbeitung erforderlich gemacht. Neben der vorhersehbaren Erweiterung der Anwendungsmöglichkeiten der Signalverarbeitung haben sich auch in den Grundlagen neue Ergebnisse und geänderte Bewertungen ergeben, die bei einer nötig gewordenen Neuauflage zu berücksichtigen waren.

Die starke Steigerung des Interesses an diesem Gebiet wurde weiterhin durch die Fortschritte der Mikroelektronik sehr gefördert. Die verfügbaren leistungsfähigen Signalprozessoren erleichtern wesentlich die Erschließung neuer Anwendungen. Hinzu kamen die Verbesserung der Entwicklungswerkzeuge, der PCs und Arbeitsplatzrechner, deren Leistungsfähigkeit auf vielen Gebieten sogar unmittelbar den Einsatz von Algorithmen der Signalverarbeitung in Realzeit gestattet. Dabei hat auch die Verwendung geeigneter Software einen großen Einfluß. Es entstanden eine Reihe von allgemein verwendbaren anwenderfreundlichen Interpretersprachen zur Ausführung von arithmetischen Operationen, mit denen auch der Zugang zu den Methoden der Signalverarbeitung wesentlich erleichert wurde. Sie werden inzwischen für sehr umfangreiche Aufgabenstellungen eingesetzt und führen schnell zu Lösungen. Wichtig ist, daß sie im Zusammenhang mit der Lehre verwendet werden. Das gilt selbstverständlich für die Durchführung studentischer Arbeiten, aber auch für Übungen zur Signalverarbeitung.

Zu erwähnen ist weiterhin, daß in den letzten Jahren zu einigen grundlegenden Aussagen und Fragestellungen ein weitergehendes Verständnis und neue Erkenntnisse erreicht worden sind. All dies ist in einer Neuauflage zu berücksichtigen, deren Fertigstellung noch vor Abschluß der Arbeiten am bereits angekündigten zweiten Band zweckmäßig erschien.

Mit dem hier vorgelegten Buch wird eine weitgehende Darstellung der Kenntnisse über die Analyse digitaler Signale und der Systeme zu ihrer Verarbeitung angestrebt. Zugleich soll aber der Zugang zu dem Gebiet durch einfache Beispiele und zahlreiche Bilder erleichtert und damit auch die Verwendung des Buches in der Lehre und vor allem zum Selbststudium möglich werden.

Inhaltlich haben sich gegenüber der letzten Auflage die folgenden Änderungen ergeben: Das Kapitel über die Analyse determinierter Signale wurde ergänzt. Insbesondere wurde der Abschnitt über die Diskrete Fouriertransformation durch die Behandlung der schnellen Algorithmen zu ihrer Durchführung vervollständigt. Stochastische Signale werden jetzt in einem eigenen Kapitel behandelt. Dabei wurde insbesondere eine Darstellung der verschiedenen meßtechnischen Möglichkeiten zur Bestimmung von Schätzwerten für die Kenngrößen der Prozesse aufgenommen.

Im 4. Kapitel über die Theorie allgemeiner, speziell linearer Systeme und ihrer Eigenschaften im Zeit- und Frequenzbereich wurde insbesondere der Ab-

schnitt über kausale und minimalphasige Systeme wesentlich erweitert; ein neuer Abschnitt über Multiratensysteme wurde aufgenommen. Das 5. Kapitel über Systeme, die durch lineare Differenzengleichungen beschrieben werden, wurde insbesondere in den Abschnitten über Stabilität, den Frequenzgang und über minimalphasige Systeme ergänzt. Ein neuer Unterabschnitt über passive Systeme wurde aufgenommen, andere weitgehend überarbeitet.

Den Strukturen ist jetzt ein eigenes Kapitel gewidmet. Erweitert wurden die Abschnitte über Allpässe, Systeme aus gekoppelten Allpässen und Leiterstrukturen; neu ist ein Abschnitt über Blockverarbeitung in rekursiven Systemen.

Neu ist auch, daß an zahlreichen, geeignet erscheinenden Stellen beschrieben wurde, wie die vorher erklärten Beziehungen mit Hilfe von Befehlen der inzwischen viel verwendeten Interpretersprache MATLAB ausgewertet werden können. Dort werden gegebenenfalls auch zusätzliche Programme für weitere Aufgaben in Kurzform angegeben. Damit wird die Behandlung auch von numerisch anspruchsvollen Beispielen wesentlich erleichtert. Lehrerfahrungen haben gezeigt, daß auf diese Weise das Verständnis auch komplizierter Zusammenhänge schneller erreicht werden kann.

Der geplante zweite Band wird sich mit dem Entwurf digitaler Systeme für unterschiedliche Aufgabenstellungen befassen sowie Realisierungsprobleme unter Berücksichtigung der Wortlängeneffekte behandeln. Es ist vorgesehen, auch dort Programme für die verschiedenen Entwurfsverfahren und die Bestimmung der Eigenschaften realisierter Systeme anzugeben.

Das Buch basiert weitgehend auf Vorlesungen über Signalverarbeitung, die seit vielen Jahren an der Universität Erlangen-Nürnberg gehalten werden, auf Ergebnissen von Dissertationen und studentischen Arbeiten über Teilprobleme sowie auf Erfahrungen mit rechnergestützten Übungen zu dem Gebiet.

Bei der Überarbeitung waren mir zu einzelnen Abschnitten der Rat und die Hinweise der Herren Dr. Dittrich, Krauß, Martin, Professor Mecklenbräuker, Dr. Rabenstein und Reng sehr wichtig. Besonders erwähnen möchte ich die Hilfe von Dr. Steffen, der mir für das ganze Buch ein kritischer Gesprächspartner war. Ein Teil der angegebenen zusätzlichen Programme stammt von den Herren Heinle, Krauß, Schulist und Schwarz. Bei der mühevollen Arbeit des Korrekturlesens haben mir insbesondere die Herren Krauß und Dr. Steffen, bei einzelnen Abschnitten die Herren Dr. Dittrich, Heinle, Martin und Dr. Rabenstein geholfen. Die Reinschrift des Textes und die Anfertigung der zahlreichen Zeichnungen haben in bewährter Weise Frau Bärtsch, Frau Koschny und Frau Sperk übernommen. Ihnen allen danke ich sehr. Mein Dank gilt weiterhin dem Springer-Verlag für die gute Zusammenarbeit und das Eingehen auf meine Wünsche.

Erlangen, im August 1994 **H.W. Schüßler**

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1
Literaturverzeichnis 11

2 Diskrete determinierte Signale 13
2.1 Einführung 13
2.2 Betrachtung im Zeitbereich 15
2.3 Betrachtung im Frequenzbereich 18
2.3.1 Periodische Folgen 19
2.3.2 Spektren allgemeiner Folgen 24
2.3.3 Das Abtasttheorem 39
2.4 Die Diskrete Fouriertransformation 44
2.4.1 Definition und Beispiele 44
2.4.2 Sätze der Diskreten Fouriertransformation 51
2.4.3 Die DFT in Matrizenschreibweise 61
2.4.4 Die schnelle Fouriertransformation 66
2.5 Die Z-Transformation 85
2.5.1 Definition und Beispiele 85
2.5.2 Sätze der Z-Transformation 89
2.5.3 Zweiseitige Z-Transformation 95
2.5.4 Die Rücktransformation 98
2.5.5 Weitere Beziehungen 104
2.6 Orthogonaltransformationen 116
2.6.1 Einführung 116
2.6.2 Ein Satz orthonormaler, zeitl. unbegrenzter Folgen 118
2.6.3 Diskrete Sinustransformationen 120
Literaturverzeichnis 126

3 Stochastische Folgen 129
3.1 Betrachtung im Zeitbereich 129
3.1.1 Einführung und grundlegende Beziehungen 129
3.1.2 Funktionen einer Zufallsvariablen 139

3.1.3 Erwartungswert, Charakteristische Funktion 145
3.1.4 Zwei Zufallsvariablen 151
3.1.5 Summen und Produkte von Zufallsvariablen 157
3.1.6 Korrelation und Kovarianz 162
3.1.7 Zeitmittelwerte, Ergodische Prozesse 166
3.2 Betrachtung im Frequenzbereich 170
3.3 Messung von Kenngrößen stochastischer Prozesse 173
3.3.1 Mittelungen quer zum Prozeß 173
3.3.2 Mittelungen in Zeitrichtung 180
3.3.3 Näherungsweise Bestimmung der Verteilungsdichte 184
3.3.4 Messung von Kovarianzfolgen 186
3.3.5 Schätzung des Leistungsdichtespektrums 191
3.4 Abtastung stochastischer Funktionen 202
3.5 Quantisierungseffekte 205
3.5.1 Analog-Digital-Umsetzung 205
3.5.2 Realer Multiplizierer 214
Literaturverzeichnis 217

4 Diskrete Systeme 221
4.1 Systemeigenschaften 221
4.2 Beschreibung von linearen Systemen im Zeitbereich 223
4.3 Beschreibung von linearen, zeitinvarianten Systemen im Frequenzbereich 229
4.3.1 Definition der Übertragungsfunktion 229
4.3.2 Reellwertige Systeme 232
4.3.3 Komplexwertige Systeme 235
4.4 Idealisierte lineare, zeitinvariante Systeme 238
4.4.1 Äquivalente Folgen 238
4.4.2 Verzerrungsfreie Übertragung 243
4.4.3 Idealisierter digitaler Tiefpaß 244
4.4.4 Interpolation 246
4.4.5 Systeme linearer Phase 247
4.5 Kausale, lineare, zeitinvariante Systeme 251
4.5.1 Kausalität und Minimalphasigkeit 251
4.5.2 Passive verlustlose Systeme 262
4.6 Reaktion auf ein Zufallssignal 268
4.7 Multiratensysteme 276
4.7.1 Einführung und grundlegende Beschreibung 276
4.7.2 Polyphasendarstellung von Signalen und Systemen 285
Literaturverzeichnis 289

5 Kausale, lineare Systeme, beschrieben durch Differenzengleichungen 291
5.1 Vorbemerkungen 291
5.2 Beschreibung und Basisstrukturen linearer Systeme 294
5.2.1 Einführende Beispiele zu Systemen 2. Ordnung 294
5.2.2 Verallgemeinerung 300
5.2.3 Transformation von Zustandsvektoren 315
5.2.4 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit 317
5.3 Untersuchung im Zeitbereich 322
5.3.1 Allgemeine Lösung der Systemgleichung 322
5.3.2 Zusammenhang mit allgemeinen linearen Systemen 330
5.3.3 Zeitverhalten zweier äquivalenter Systeme zweiten Grades 333
5.3.4 Reaktion des Systems auf ein Zufallssignal 338
5.4 Die Lösung der Systemgleichung im Frequenzbereich 341
5.4.1 Differenzengleichung zweiter Ordnung 341
5.4.2 Behandlung des allgemeinen Falles 344
5.5 Eigenschaften der Übertragungsfunktion 349
5.5.1 Stabilität 349
5.5.2 Kausalität 359
5.5.3 Frequenzgang 360
5.5.4 Beziehungen zwischen den Komponenten einer Übertragungsfunktion 372
5.5.5 Verfahren zur Messung der Eigenschaften von Systemen 380
5.6 Spezielle Systeme 391
5.6.1 Allpässe 391
5.6.2 Minimalphasige Systeme 397
5.6.3 Passive Systeme 410
5.6.4 Bedingt stabile Systeme zur Spektralanalyse 414
5.6.5 „Nichtkausale“ Systeme 417
5.6.6 Nichtrekursive Systeme 420
Literaturverzeichnis 427

6 Strukturen 429
6.1 Allgemeines 429
6.2 Allpässe 435
6.3 Blockverarbeitung in rekursiven Systemen 441
6.4 Nichtrekursive Systeme 449
6.4.1 Realisierung nach der „Radix-2 Filtermethode“ 450
6.4.2 Realisierung mit „Schneller Faltung“ 452
6.5 Wellendigitalfilter 458
6.5.1 Einleitung 458
6.5.2 Bauelemente und ihre Verbindungen 462
6.5.3 Entwicklung der Strukturen 469
6.6 Systeme aus gekoppelten Allpässen 480

6.6.1 Reellwertige Systeme 480
6.6.2 Komplexwertige Systeme 488
6.6.3 Bestimmung der Teilübertragungsfunktionen eines gekoppelten Allpasses 491
6.7 Leiterstrukturen 495
Literaturverzeichnis 508

7 Anhang 511
7.1 Simulation der Systeme mit MATLAB 511
7.1.1 Zur Verwendung von MATLAB 511
7.1.2 DSV-Bibliothek 514
7.1.3 Filterstrukturen in der Übersicht 515
7.1.4 Zusammenstellung der verwendeten MATLAB Funktionen 520
7.1.5 Dokumentation der DSV-Funktionen 549
7.1.6 Implementierung von diskreten Systemen als Datenobjekte 549
7.1.7 Übungsbeispiele 552
7.2 Signalflußgraphen 585
7.3 Einige Matrizenoperationen 589
7.3.1 Aufgabenstellung 589
7.3.2 Eigenschaften der Matrix **A** 590
7.3.3 Bestimmung der Übertragungsmatrix 594
7.4 Spiegelpolynome 596
7.4.1 Reelle Polynome mit Spiegeleigenschaften 596
7.4.2 Komplexwertige Spiegelpolynome 600
Literaturverzeichnis 602

Index 603

1

Einleitung

Die Aufgabe der digitalen Signalverarbeitung wird vordergründig durch das Wort selbst beschrieben: Es geht um die Verarbeitung von Signalen mit digitalen Verfahren. Aber die hier verwendeten Begriffe bedürfen zumindest einer kurzen Erläuterung.

Ein Signal ist im allgemeinen eine physikalische Erscheinung, die zugleich Träger einer Nachricht ist. Nur in dieser Eigenschaft ist es für uns von Interesse. Die Nachricht wiederum ist dadurch gekennzeichnet, daß sie potentiell geeignet ist, dem Empfänger einen Kenntniszuwachs zu bringen. Sie ist also sicher nicht physikalischer Natur. Signale können in unterschiedlichen Formen vorliegen. Ein Bild oder ein gedruckter Text kann Nachrichten tragen, es kann sich um einen Zeitvorgang handeln, z.B. die Schalldruckfunktion bei gesprochenen Worten oder das Ergebnis der Messung bei einem Experiment. Die Verarbeitung des Signals bedeutet dann die Umsetzung in eine andere Form derart, daß die interessierende Nachricht für den Empfänger besser zugänglich wird.

Eine solche Verarbeitung leistet z.B. der Mensch, der aus einem sehr komplexen, von einer Vielzahl von Nebengeräuschen begleiteten Schallereignis eine gesprochene Information zu entnehmen vermag. Derartige sehr beeindruckende Beispiele für eine analoge Signalverarbeitung gibt es überall in der natürlichen Umwelt. Aber auch in der Technik setzt man analoge Mittel ein, für die kennzeichnend ist, daß sie analoge Signalfunktionen, d.h. für alle Werte der unabhängigen Variablen definierte i.allg. kontinuierliche Funktionen zu behandeln vermögen.

Entsprechend setzt die digitale Verarbeitung voraus, daß die Signale in Form von diskreten Werten bzw. Wertefolgen vorliegen, die als Zahlen oder Symbole dargestellt werden. Das ist sicher dann der Fall, wenn die Information primär aus Zahlen besteht. Sollen dagegen Signalfunktionen mit digitalen Mitteln verarbeitet werden, so ist offenbar zunächst die Umsetzung des ursprünglichen analogen Signals $v_0(t)$ in eine in der Regel äquidistante Folge von Zahlenwerten $v(k) = v_0(t = kT)$ erforderlich, denn nur die kann das digitale System dann mit einem für die vorliegende Aufgabe geeigneten Algorithmus

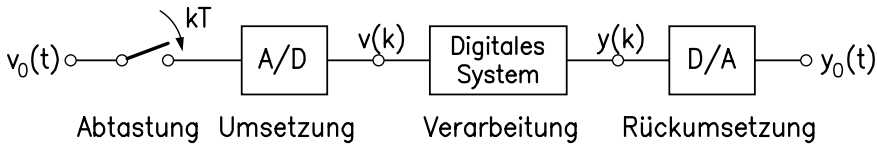

Abb. 1.1. Schema einer digitalen Signalverarbeitung

verarbeiten. Gegebenenfalls ist dann noch eine Umsetzung der Ausgangswerte $y(k)$ in ein wiederum analoges Signal $y_0(t)$ erforderlich (Bild 1.1). Das digitale System wird dabei z.B. mit einem Allzweckrechner zu realisieren sein, der geeignet programmiert ist, oder mit einem auf die Aufgabe zugeschnittenen speziellen Gerät.

Die digitale — oder in diesem Fall besser diskrete — Verarbeitung von Signalen begann, als man anfing, Zusammenhänge zwischen kontinuierlichen Funktionen durch die Untersuchung der Beziehungen zwischen diskreten Werten dieser Funktionen zu bestimmen. In dieser Weise haben z.B. die Astronomen des 17. und 18. Jahrhunderts die Gesetze der Bewegung der Himmelskörper gefunden. Dieses Vorgehen basierte auf der zunächst intuitiven Sicherheit, daß es möglich sein muß, mit einer Folge von diskreten Zahlen eine kontinuierliche Funktion exakt zu erfassen, wenn diese Werte der Funktion nur in hinreichend kleinen Abständen entnommen werden. Diese Annahme ist z.B. auch die Basis für die numerischen Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen. Generell sind die Zusammenhänge zwischen der numerischen Mathematik und der digitalen Signalverarbeitung sehr eng. Verfahren zur numerischen Differentiation, Integration oder Interpolation liefern näherungsweise oder — unter bestimmten Voraussetzungen — exakt die Zahlenwerte der jeweils gewünschten Funktion als Lösung einer Differenzengleichung, bei der Abtastwerte der bekannten Eingangsfunktion verwendet werden. Damit ist zugleich das Verarbeitungsschema gegeben. Darüber hinaus liefert die Signalverarbeitung für diese Probleme auf der Basis variierter Kriterien andere Lösungen, die manchen Anwendungen besser angepaßt sind. Wir kommen weiter unten beim Beispiel der numerischen Differentiation darauf zurück.

Signalfunktionen lassen sich bekanntlich nicht nur in der ursprünglichen gegebenen Form, z.B. in ihrer Abhängigkeit von der Zeit angeben. In vielen Fällen ist es zweckmäßig, eine äquivalente Beschreibung zu verwenden, insbesondere in Gestalt des Spektrums, d.h. der Fouriertransformierten der Funktion. Das gleiche gilt für Folgen, für die man ebenfalls eine äquivalente spektrale Darstellung angeben kann. Wir werden diese Aufgabe ausführlich in Abschnitt 2.3 behandeln. Bild 1.2 zeigt als Beispiel das Spektrum einer Rechteckfolge im Vergleich zu dem eines Rechteckimpulses. Offenbar gibt es Verwandtschaften; wesentlich ist aber, daß man für die Folge $v(k)$ ein periodisches Spektrum erhält im Gegensatz zu dem der Funktion $v_0(t)$. Dieser prinzipielle Unterschied der Spektren läßt es zunächst fraglich erscheinen, ob

die Darstellung einer Funktion durch ihre Abtastwerte überhaupt möglich ist. Die Voraussetzungen, unter denen aus den Abtastwerten die ursprüngliche Funktion rekonstruiert werden kann, sind Gegenstand der Aussage des Abtasttheorems, das wir in Abschn. 2.3.3 behandeln.

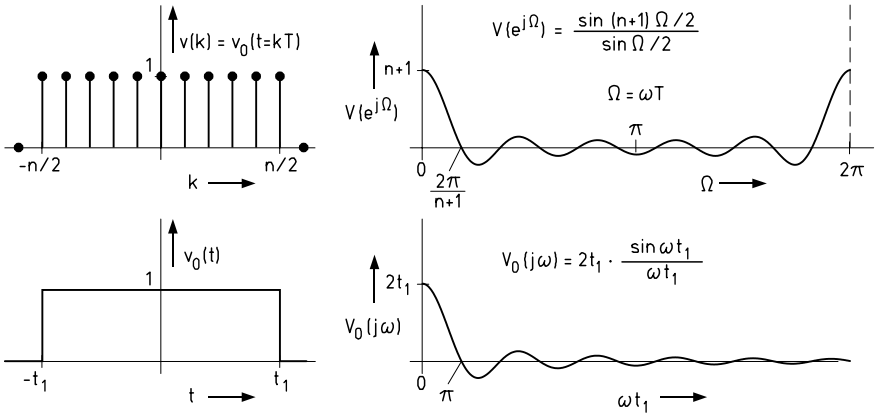

Abb. 1.2. Rechteckfolge und Rechteckimpuls und ihre Spektren

Die periodische Spektralfunktion einer Folge läßt sich ihrerseits diskretisieren. Unter bestimmten Voraussetzungen sind die dabei entstehenden Abtastwerte im Spektralbereich zur angenäherten Berechnung des Spektrums der ursprünglichen kontinuierlichen Funktion geeignet. Das ist deshalb von großer praktischer Bedeutung, weil diese Folge von Spektralwerten mit sehr effizienten Methoden, der sogenannten schnellen Fouriertransformation, aus der Wertefolge im Zeitbereich berechnet werden kann. Damit wird die Bestimmung des Spektrums auch dann möglich, wenn die Fouriertransformation nicht geschlossen durchgeführt werden kann. Wir werden im Abschn. 2.4.4 darauf eingehen.

Die Entwicklung der digitalen Signalverarbeitung wurde natürlich sehr stark von der Elektrotechnik her beeinflußt. Die dort im Zusammenhang mit der Lösung linearer Differentialgleichungen entwickelten Begriffe wie Impuls- und Sprungantwort zur Beschreibung des Zeitverhaltens eines Systems sowie vor allem Übertragungsfunktion und Frequenzgang zur Kennzeichnung im Frequenzbereich ließen sich leicht auf diskrete Systeme übertragen, die durch lineare Differenzengleichungen beschrieben werden. Damit verbunden war die Übernahme vertrauter Aufgabenstellungen wie der Entwurf von Filtern mit gewünschtem Selektionsverhalten, aber auch die Möglichkeit, die Eigenschaften von Verfahren der numerischen Mathematik in ungewohnter Weise, nämlich durch Angabe eines Frequenzgangs zu beschreiben. Bild 1.3a zeigt ein einfaches System zur numerischen Differentiation, das durch

$$y(k) = \frac{1}{T}\,[v(k) - v(k-1)] \tag{1.0.1}$$

beschrieben wird. Das angegebene Blockschaltbild enthält einen Speicher zur Verzögerung eines Zahlenwerts um $T = 1$ sowie ein Element zur Subtraktion von Zahlenwerten. Dargestellt sind zunächst die Reaktionen $h_0(k)$ und $h_{-1}(k)$

auf den Impuls $\gamma_0(k) := \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$ und die Sprungfolge $\gamma_{-1}(k) := \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0. \end{cases}$

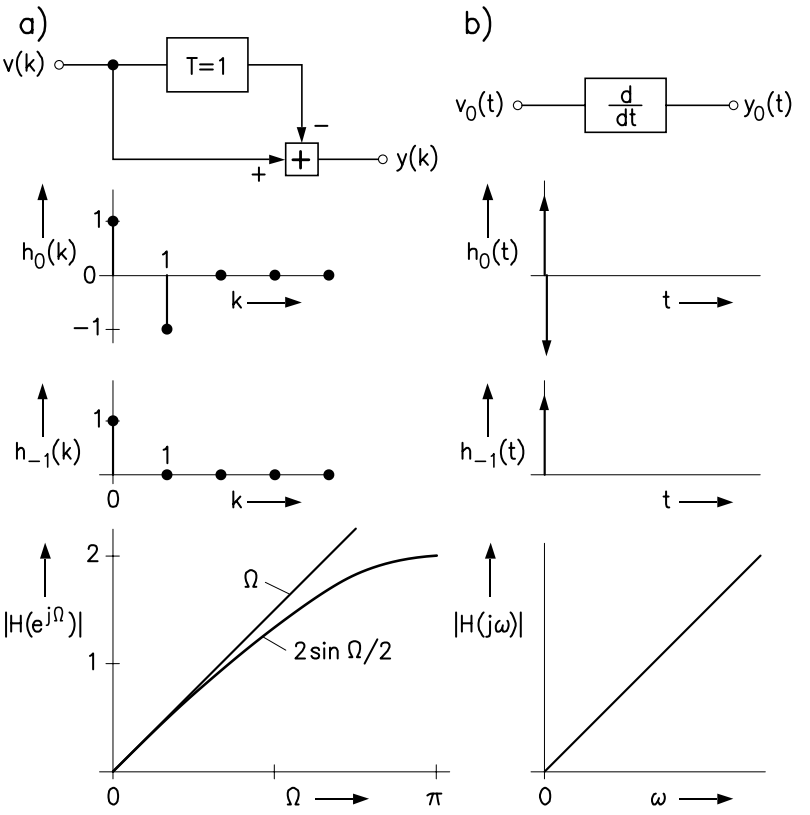

Abb. 1.3. Systeme zur numerischen und exakten Differentiation und ihre Beschreibung im Zeit- und Spektralbereich

Im Bild 1.3b sind zum Vergleich Impuls- und Sprungantwort eines idealisierten kontinuierlichen Differenzierers angegeben. Bemerkenswert ist der Frequenzgang des diskreten Systems. Entsprechend dem Vorgehen bei der komplexen Wechselstromrechnung erhalten wir ihn, wenn wir in (1.0.1)

$v(k) = e^{j\Omega k}, \forall k$ einsetzen (s. Abschn. 4.3). Nach elementarer Umformung folgt

$$y(k) = je^{-j\Omega/2} \cdot 2 \sin \frac{\Omega}{2} \cdot e^{j\Omega k} =: H(e^{j\Omega}) \cdot e^{j\Omega k}. \tag{1.0.2}$$

Das Bild 1.3a zeigt $|H(e^{j\Omega})|$. Die mit wachsender Frequenz größer werdenden Abweichungen von dem Betragsfrequenzgang des idealen Differenzierers ergeben sich, weil die Annäherung eines Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten umso schlechter wird, je stärker sich die zu differenzierende Funktion $v_0(t)$ zwischen den Abtastpunkten zu ändern vermag. Diese sehr pauschale Aussage über eine Eigenschaft von $v_0(t)$ werden wir im Abschn. 2.3.2 genauer formulieren. Andererseits stellt sich hier die Aufgabe, einen Algorithmus zur numerischen Differentiation zu entwickeln, in variierter Form. Sie erscheint als Approximationsproblem im Frequenzbereich, bei dem der Wunschfrequenzgang $j\Omega$ durch den des zu entwerfenden Systems anzunähern ist. Wir werden diese Aufgabe in Bd. II neben anderen aus der numerischen Mathematik behandeln.

Als ein zweites Beispiel betrachten wir ein System, das durch die Differenzengleichung

$$y(k+1) = -c_0 \cdot y(k) + v(k) \tag{1.0.3}$$

beschrieben wird (Bild 1.4a). Hier ergibt sich ein Wert der Ausgangsfolge $y(k)$ aus einer Linearkombination des vorher errechneten Ausgangswertes und eines Wertes der Eingangsfolge $v(k)$. Das Blockschaltbild enthält außer Speicher und Addierer einen Baustein für die Multiplikation mit $-c_0$. Durch schrittweise Rechnung erhält man hier bei Impulserregung die exponentielle Ausgangsfolge $h_0(k) = (-c_0)^{k-1}, k \geq 1$. Das kontinuierliche Pendant ist ein RC-Glied, für das die Differentialgleichung

$$y_0'(t) = \frac{1}{RC} \left[-y_0(t) + v_0(t)\right] \tag{1.0.4}$$

gilt.Das Bild 1.4b zeigt wieder Impuls- und Sprungantworten beider Systeme sowie die Frequenzgänge.

Abgesehen von einer Verschiebung um einen Schritt stimmen die $h_0(k)$ mit den Abtastwerten der Impulsantwort $h_0(\tau)$ des RC-Gliedes überein, wenn man c_0 und T geeignet wählt. Entsprechendes gilt, bis auf eine multiplikative Konstante, für die Sprungantworten. Wesentliche Unterschiede zeigen sich dagegen im Frequenzgang, für den wir beim diskreten System, wie schon vorher bei der numerischen Differentiation, eine periodische Funktion erhalten.

Die Bestimmung der das Verhalten diskreter Systeme beschreibenden Größen werden wir im 4. und 5. Kap. ausführlich behandeln. Die hier vorgestellten Beispiele sollten lediglich die engen Verwandtschaften, aber auch die Unterschiede zwischen diskreten und kontinuierlichen Systemen zeigen. Ausführlicher werden diese Beziehungen z.B. in [1.1] dargestellt. Sie sind die Basis für die Anwendung der Signalverarbeitung bei der Simulation analoger Schaltungen auf dem Digitalrechner, mit der eine Analyse des Verhaltens

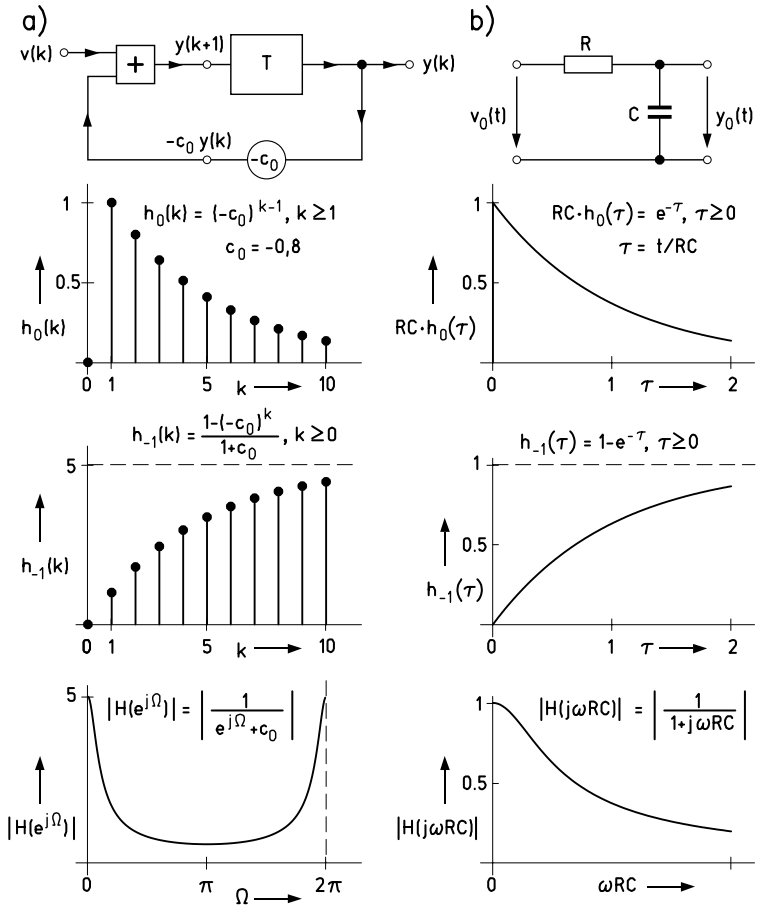

Abb. 1.4. Diskretes und kontinuierliches System erster Ordnung. Das Verhalten der Systeme im Zeit- und Frequenzbereich

erfolgen und eine optimale Dimensionierung vor einer Realisierung als kontinuierliches System gefunden werden kann. Aufgabenstellungen dieser Art bestimmten in den 50er und 60er Jahren zunächst die Entwicklung der digitalen Signalverarbeitung [1.2].

Der technologische Fortschritt hat hier inzwischen zu einer wesentlichen Änderung geführt. Digitale Systeme werden jetzt an Stelle von analogen unmittelbar für die permanente Signalverarbeitung in Realzeit verwendet. Wichtiger ist aber noch, daß auch komplizierte Algorithmen ausgeführt werden können, die einer analogen Realisierung gar nicht oder nur sehr eingeschränkt zugänglich sind. Das gilt z.B. für adaptive Verfahren, wie sie bei der Datenübertragung oder der Sprachkodierung erforderlich sind. Verfahren der digi-

talen Signalverarbeitung wurden damit auch in Bereichen der Konsumelektronik eingesetzt. Sie haben inzwischen z.B. mit der Compact Disc oder beim Mobilfunk weite Verbreitung gefunden.

Die Anwendungsmöglichkeiten gehen aber inzwischen weit über den Bereich der Nachrichtentechnik hinaus. Der Einsatz von Signalverarbeitungsmethoden in der Steuer- und Regelungstechnik oder bei Aufgaben der Energie- und Medizintechnik wächst sehr schnell. Ihre Verwendung bei meßtechnischen Aufgaben in allen naturwissenschaftlichen Gebieten ist heute selbstverständlich, meistens allerdings ohne Bezug auf den Zusammenhang mit den hier zu behandelnden allgemeinen Aussagen.

Wir stellen die Möglichkeiten zur Realisierung digitaler Systeme zusammen, nennen aus heutiger Sicht ihre Vor- und Nachteile und die wichtigsten Anwendungen.

1. *Allzweck-Digitalrechner* sind vor allem als PC's und Arbeitsplatzrechner allgemein verfügbar. Sie bieten volle Flexibilität und gestatten die Behandlung von Aufgaben der Signalverarbeitung nach minimaler Vorbereitungszeit, insbesondere bei Verwendung geeigneter Programmsysteme wie MATLAB. Sie sind ein hervorragendes Werkzeug für die Entwicklung und Erprobung von Algorithmen. Ihr permanenter Einsatz für Realzeitaufgaben ist schon wegen der vergleichweise geringen Geschwindigkeit i.allg. nicht sinnvoll.

2. *Mikroprozessoren* handelsüblicher Art (Reduced Instruction-Set Computer) sind in ihrer Architektur nicht speziell auf Aufgaben der Signalverarbeitung zugeschnitten. Sie bieten aber eine hohe Flexibilität bei niedrigem Preis und lassen sich für eine Vielzahl von Realzeitaufgaben mit entsprechenden Geschwindigkeitsanforderungen permanent verwenden.

3. *Universelle integrierte Signalprozessoren* mit Festkomma- oder Gleitkommaarithmetik haben eine den Algorithmen der Signalverarbeitung angepaßte Struktur. Insbesondere gestatten sie eine interne Parallelverarbeitung durch unabhängige Arithmetik- und Steuereinheiten und entsprechend mehrere Speicherbereiche und Busse. Es ist bemerkenswert, daß z.B. die Zeit für die Ausführung einer schnellen Fouriertransformation in den letzten Jahren durch technologische Verbesserungen um den Faktor 4, durch zweckmäßige Veränderungen der Struktur um den Faktor 10 reduziert werden konnte. Integrierte Signalprozessoren sind auf Mikroebene programmierbar. Sie werden für Signalverarbeitungsaufgaben in Realzeit zumindest bei kleiner und mittlerer Stückzahl der Geräte eingesetzt.

4. *Spezielle integrierte Systeme* sind Bausteine, die für eine bestimmte Aufgabe entwickelt werden und diese optimal, d.h. mit minimalem Aufwand lösen können. Sie sind das geeignete Werkzeug für die Ausführung eines festgelegten Algorithmus in einer großen Zahl identischer Geräte. Z.B. wurden sie für Compact-Disc Spieler und den Mobilfunk entwickelt.

Wir betrachten eine bei jedem mit digitalen Bausteinen realisierten Gerät auftretende Erscheinung. Wie stets bei natur- und ingenieurwissenschaftlichen Problemen geht auch die Analyse und Synthese von Systemen der Signalverarbeitung zunächst nicht von der Realität, sondern zur Erleichterung

der Aufgabe von einer modellhaften Beschreibung aus, die zwangsläufig nur approximativen Charakter haben kann. Bei digitalen Systemen bedeutet das insbesondere, daß wir alle auftretenden Werte als Elemente der Menge der reellen bzw. komplexen Zahlen behandeln. In einem realen Rechenwerk können aber immer nur endlich viele verschiedene Zahlen dargestellt und verarbeitet werden, die ein ganzzahliges Vielfaches einer Quantisierungsstufe Q sind. Das hat u.a. zur Folge, daß das Ergebnis einer Multiplikation in der Regel z.B. durch Rundung in eine im Gerät darstellbare Zahl der Form λQ überführt wird, wobei λ eine ganze Zahl innerhalb eines eingeschränkten Bereichs ist. Damit wird das ursprünglich zur Lösung einer linearen Differenzengleichung realisierte System zwangsläufig nichtlinear. Wir erläutern die entstehende Abweichung vom Verhalten des linearen Modells am Beispiel des durch (1.0.3) beschriebenen Systems erster Ordnung. Die Anordnung von Bild 1.4a ist durch einen Block zu ergänzen, der die Rundung des Multiplikationsergebnisses vornimmt (s. Bild 1.5). Alle auftretenden Folgen sind jetzt quantisiert. Wir nehmen nun an, daß $c_0 = -(1 - 2^{-6})$ ist und eine Erregung mit

$$v(k) = \begin{cases} 2^{-6} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

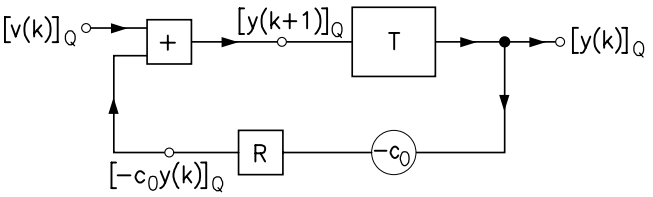

Abb. 1.5. Diskretes System erster Ordnung mit quantisierten Variablen

erfolgt. Bild 1.6 zeigt den Verlauf der Folge $y(k)$ des linearen Modellsystems, wobei zur Vereinfachung der Darstellung eine stetige Kurve gezeichnet wurde, die für ganzzahlige Werte des Arguments k die Werte $y(k)$ annimmt. Für unterschiedliche Quantisierungsstufen Q wurden darüber hinaus die sich unter dem Einfluß der Rundung ergebenden Folgen $[y(k)]_Q$ dargestellt, wieder in Form entsprechender stetiger Funktionen, die jetzt als Polygonzug erscheinen. Die sich ergebende starke Abweichung von $y(k)$ kann aber offenbar durch Verkleinerung von Q so klein gemacht werden, daß sie tolerierbar ist.

Die hier an einem einfachen Beispiel demonstrierte Beziehung zwischen dem Verhalten des linearen Systems und dem seiner digitalen Realisierung läßt sich verallgemeinern. Man kann mit dem linearen Modell sowohl bei der Analyse wie bei dem Entwurf eines Systems mit vorgeschriebenen Eigenschaften arbeiten, wenn man Verfahren zur Abschätzung des durch die Quantisierung

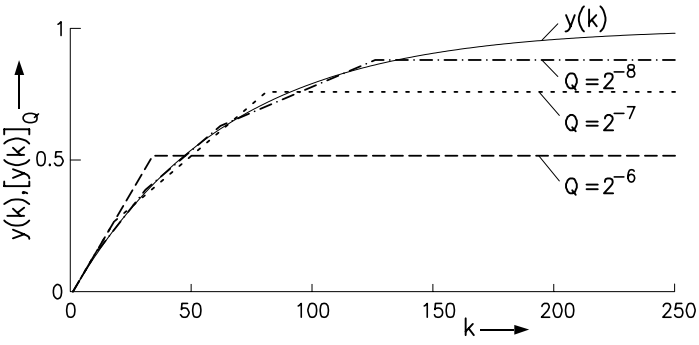

Abb. 1.6. Sprungantworten eines realen Systems erster Ordnung mit $c_0 = -(1 - 2^{-6})$ bei verschiedenen Quantisierungstufen

entstehenden Fehlers hat. Solche Methoden lassen sich entwickeln, wobei erneut eine modellhafte Beschreibung, in diesem Fall einer einzigen Fehlerquelle erforderlich ist. Sie wird im Abschn. 3.5 behandelt, während die Untersuchung der sich insgesamt ergebenden Effekte und Maßnahmen zu ihrer Minimierung Gegenstand von Band II ist.

Abschließend behandeln wir die Vor- und Nachteile von digitalen Systemen im Vergleich zu analogen. Wir beziehen uns dabei im digitalen Fall auf die Verarbeitung von Signalen, die primär bereits in diskreter Form vorliegen, lassen also zunächst die bei der Behandlung kontinuierlicher Signale zusätzlich nötige Umsetzung außer acht.

Die oben im Beispiel gezeigte prinzipielle Beschränkung auf eine endliche Anzahl von Signalwerten führt zwar zu dem demonstrierten systemimmanenten Quantisierungsfehler, ist aber auch der Grund für wesentliche Vorteile der Digitaltechnik:

1. *Fehlerakkumulation*: Wegen der Darstellung der quantisierten Werte durch binäre Elemente bleiben Fehler bis zur halben Impulshöhe ohne Einfluß. Auf diese Weise wird die bei analogen Systemen unvermeidliche Akkumulation von Störeffekten bei sequentiellen Verarbeitungsschritten vermieden. Dagegen können im digitalen Fall praktisch beliebig viele derartige Operationen nacheinander ausgeführt werden.

2. *Genauigkeit und Dynamik*: Durch Wahl einer hinreichend kleinen Quantisierungsstufe bzw. einer entsprechend großen Wortlänge für Variable und Koeffizienten läßt sich die erreichte Genauigkeit allen Anforderungen anpassen. Die Wortlänge der Variablen bestimmt dann zugleich die Dynamik, die nötigenfalls noch mit einem Übergang von Festkomma- zur Gleitkommaarithmetik im notwendigen Umfang gesteigert werden kann. Der erforderliche Aufwand wächst in etwa proportional zur Wortlänge.

Im kontinuierlichen Fall ist die Genauigkeit der Variablen durch das Rauschen begrenzt. Ebenso ist die Komponentengenauigkeit prinzipiell eingeschränkt, wobei der erreichbare relative Fehler bei etwa 10^{-4} liegt. Der dafür

erforderliche Aufwand steigt stark überproportional mit der geforderten Genauigkeit. Auch die Aussteuerung und damit die Dynamik ist in analogen Systemen prinzipiell begrenzt.

3. *Fertigungstoleranz.* Bei der Serienproduktion kontinuierlicher Systeme spielt die Frage der Bauelementetoleranzen eine große Rolle. Der Bau identischer Systeme ist nur sehr bedingt und nur innerhalb der begrenzten Abgleichgenauigkeit möglich.

Im digitalen Fall erfordert der Aufbau identischer Systeme lediglich die Verwendung übereinstimmender Programme und Koeffizientensätze.

4. *Temperaturgang, zeitliche Konstanz.* Die Temperaturabhängigkeit und die durch Alterung bedingte zeitliche Inkonstanz der Bauelemente führen bei kontinuierlichen Systemen zu wesentlich höheren Schwierigkeiten als bei digitalen.

5. *Multiplextechnik.* Die Mehrfachausnutzung eines kontinuierlichen Systems in einem Zeitmultiplex ist nicht möglich. Falls die Schaltkreistechnik eine im Vergleich zur Taktzeit hinreichend kurze Operationszeit zuläßt, kann man dagegen ein digitales System im Zeitmultiplex einsetzen.

6. *Kodierung*: Nur im digitalen Fall gibt es die Möglichkeit zur Kodierung, mit der die Redundanz des Signals vermindert, der Einfluß von Störungen reduziert, aber auch eine Verschlüsselung der Information erreicht werden kann.

7. *Spezielle Systemeigenschaften*: Eine Reihe von speziellen Anforderungen lassen sich mit digitalen Systemen exakt bzw. ohne prinzipielle Probleme realisieren. Hierzu gehören streng linearphasige Frequenzgänge, Verarbeitung komplexer sowie mehrdimensionaler Signale und die Ausführung auch komplizierter Algorithmen. Wichtig ist aber vor allem die einfache Variablilität digitaler Systeme und die Möglichkeit der Adaption an sich ändernde Signale und Anforderungen. Mit analogen Systemen lassen sich derartige Eigenschaften höchstens näherungsweise bzw. nur im eingeschränkten Maße realisieren.

Die beschriebenen Vorteile führten dazu, daß die technologische Entwicklung sich auf die Schaffung immer effizienterer digitaler Bausteine konzentriert hat, wobei Verarbeitungsgeschwindigkeit und Speicherfähigkeit ständig zunehmen, während zugleich die erforderlichen Abmessungen und der Preis reduziert werden konnten. Ein Ende der Entwicklung ist nicht abzusehen.

Bezüglich des *Signalfrequenzbereiches* gibt es Unterschiede, die sich partiell zugunsten analoger Systeme auswirken. Die Bandbreite von Signalen, die sich analog verarbeiten lassen, liegt zur Zeit noch erheblich über der für digitale Systeme, die bei hinreichend hohem Aufwand für die Verarbeitung von Signalen mit einer Bandbreite von einigen zig MHz eingesetzt werden können. Andererseits lassen sich mit digitalen Mitteln Signale im extrem tiefen Frequenzbereich verarbeiten. Analoge Schaltungen sind dort nur bedingt einsetzbar.

Der Vergleich ist insbesondere bezüglich der Genauigkeit zu modifizieren, wenn ein kontinuierliches Signal $v_0(t)$ zu verarbeiten ist, das zunächst mit einer A/D-Umsetzung in die zeit- und wertdiskrete Version

$$[v(k)]_Q = [v_0(t = kT)]_Q$$

überführt werden muß. Das bedeutet neben dem erhöhten Aufwand einen zusätzlichen Quantisierungsfehler, der aber im Gegensatz zu dem im Inneren des Geräts nicht beliebig klein gemacht werden kann, weil die in einem Analog-Digital Umsetzer erforderlichen analogen Bauelemente sich stets nur mit beschränkter Genauigkeit herstellen lassen. Hier gibt es eine prinzipielle Grenze, der man sich auch nur mit stark überproportional steigendem Aufwand nähern kann (s. die obigen Anmerkungen zum Genauigkeitsvergleich). Die im Umsetzer erreichbare Wortlänge fehlerfreier Werte hängt dabei noch wesentlich von der Abtastfrequenz $f_a = 1/T$ ab. Die Modellierung des Quantisierungsfehlers, die für eine Vorausberechnung seines Einflusses nötig ist, wird in Abschn. 3.5 behandelt. Es erweist sich, daß die mit den Umsetzern technisch erreichbare Genauigkeit für praktische Anwendungen in der Regel ausreicht. Im übrigen ist auch hier die Entwicklung sehr im Fluß.

Wir haben bereits mehrfach festgestellt, daß die Eigenschaften diskreter Signale und ihrer Beziehungen zu entsprechenden Funktionen einer kontinuierlichen Variablen einer eingehenden Untersuchung bedürfen. Dieser Aufgabe ist das nächste Kapitel gewidmet.

Literaturverzeichnis

1. Schüßler, H.W.: Netzwerke, Signale und Systeme, Bd. II. Berlin: Springer 3. Auflage, 1991
2. Kuo, F.F.; Kaiser, J.F. (Hrsg.): System analysis by digital computers. New York: Wiley, 1966

2

Diskrete determinierte Signale

2.1 Einführung

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit Wertefolgen, für die wir ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit die für die Eingangsfolge eingeführte Bezeichnung $v(k)$ verwenden. Hier ist k eine in der Regel normierte, diskrete und ganzzahlige Variable. Sie wird meist als Zeitvariable interpretiert, doch kann die Folge $v(k)$ beispielsweise auch durch zeilenweise Abtastung eines Bildes entstanden sein, sich also als Abbildung eines ursprünglich zweidimensionalen Wertevorrats ergeben haben. Für $v(k)$ lassen wir beliebige komplexe Werte zu. Es ist daher

$$v(k) = \{..., v(-1), v(0), v(1), ...\}\,, \quad v(k) \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1.1}$$

Wir können annehmen, daß die Werte $v(k)$ durch Abtastung einer fast überall stetigen Funktion $v_0(t)$ in den Punkten $t = kT$ entstanden sind, derart, daß $v(k) = v_0(t = kT)$ ist. Falls $v_0(t)$ im Abtastpunkt unstetig ist, verwenden wir in der Regel den Grenzwert von rechts für $v(k)$. Dieser Abtastvorgang wird durch Bild 2.1 veranschaulicht, in dem auch $v(k)$ als eine Folge von Impulsen dargestellt ist. Ein derartiger Bezug zu Funktionen einer kontinuierlichen Variablen ist aber nicht zwingend erforderlich.

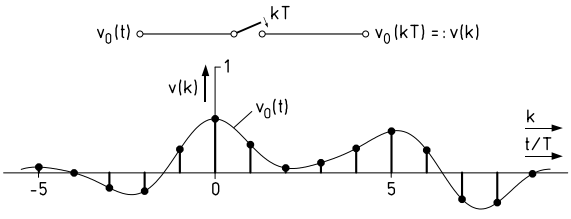

Abb. 2.1. Folge $v(k)$ als Ergebnis der Abtastung einer Funktion $v_0(t)$ bei $t = kT$

Es ist zweckmäßig, Normen für die betrachteten Folgen einzuführen und sie auf dieser Basis in Klassen einzuteilen. Man nennt

$$||v(k)||_p = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} |v(k)|^p \right]^{1/p} \tag{2.1.2}$$

die l_p-Norm der Folge $v(k)$. Dann bezeichnen wir mit l_p die Menge aller Folgen, für die die l_p-Norm beschränkt ist. Hier interessieren insbesondere die Fälle $p = 1$ und $p = 2$. Ist eine Folge absolut summierbar, gilt also

$$||v(k)||_1 = \sum_k |v(k)| \leq M_1 < \infty, \tag{2.1.3a}$$

so ist $v(k) \in l_1$. Entsprechend ist l_2 die Menge aller Folgen, für die das Betragsquadrat der $v(k)$ summierbar ist. Für $v(k) \in l_2$ ist damit

$$||v(k)||_2^2 = \sum_k |v(k)|^2 \leq M_2 < \infty. \tag{2.1.3b}$$

Hier sprechen wir unter Übertragung entsprechender Begriffe bei Funktionen von *Signalen beschränkter Energie*. Ist $v(k) \in l_1$, so gilt auch $v(k) \in l_2$.[1] Das folgt für eine aus wenigstens zwei nicht verschwindenden Gliedern bestehende Folge unmittelbar aus

$$||v(k)||_2^2 = \sum_k |v(k)|^2 < \left[\sum_k |v(k)| \right]^2 = ||v(k)||_1^2. \tag{2.1.3c}$$

Die Aussage ist aber nicht umkehrbar, aus $v(k) \in l_2$ folgt also nicht $v(k) \in l_1$, wie das Beispiel $v(k) = 1/k,\ k \in \mathbb{N}$ zeigt.

Notwendig für die Summierbarkeit von $|v(k)|$ und $|v(k)|^2$ ist sicher, daß $|v(k)|$ beschränkt ist. Diese Bedingung ist auch hinreichend, wenn $v(k)$ nur für endlich viele Werte der Variablen k von Null verschieden sein kann. Interessanter ist der Fall einer zeitlich nicht begrenzten Folge $v(k)$. Ist die Folge nicht absolut summierbar, ist also $v(k) \notin l_1$, so existiert gegebenenfalls der Mittelwert der Beträge

$$\overline{|v(k)|} := \lim_{K \to \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{-K}^{+K} |v(k)|. \tag{2.1.4}$$

Entsprechendes gilt für die *mittlere Leistung*

$$\overline{|v(k)|^2} := \lim_{K \to \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{-K}^{+K} |v(k)|^2, \tag{2.1.5}$$

[1] Hier liegt ein Unterschied zur Klassifizierung von Funktionen vor. Ist $|v_0(t)|$ integrabel, so folgt nicht die Integrabilität von $|v_0(t)|^2$.

deren Bezeichnung wieder von dem gleichen Begriff bei Funktionen übernommen wurde.

In diesem Kapitel werden wir uns mit determinierten Folgen $v(k)$ befassen, die in ihrer Abhängigkeit von k entweder durch einen funktionalen Zusammenhang oder als Folge von Zahlenwerten bekannt sind. Im nächsten Abschnitt behandeln wir zunächst ihre Beschreibung im Zeitbereich.

2.2 Betrachtung im Zeitbereich

Wir führen drei häufig benötigte Testfolgen ein, die in Bild 2.2 veranschaulicht sind:

Impuls (Bild 2.2a)

$$v(k) = \gamma_0(k) := \begin{cases} 1, \, k = 0 \\ \\ 0, \, k \neq 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Sprungfolge (Bild 2.2b)

$$v(k) = \gamma_{-1}(k) := \begin{cases} 1, \, k \geq 0 \\ \\ 0, \, k < 0. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Exponentialfolge (Bild 2.2c)

$$v(k) = V z^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}; \quad V, z \in \mathbb{C}, \tag{2.2.3}$$

mit $V = \hat{v} e^{j\varphi}$ als komplexer Amplitude und $z = e^{sT}$, wobei $sT = \sigma_n + j\Omega$ die normierte komplexe Frequenz ist.

Offenbar gilt für die Beziehungen zwischen Impuls- und Sprungfolge

$$\gamma_0(k) = \gamma_{-1}(k) - \gamma_{-1}(k-1), \tag{2.2.4a}$$

$$\gamma_{-1}(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{k} \gamma_0(\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \gamma_0(k-\kappa). \tag{2.2.4b}$$

Es lassen sich aber auch beliebige Folgen mit Hilfe geeigneter Linearkombinationen von gegeneinander verschobenen Impulsen oder Sprungfolgen darstellen. Man erhält

$$v(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} v(\kappa) \cdot \gamma_0(k-\kappa) \tag{2.2.5a}$$

und mit

$$\Delta v(k) = v(k) - v(k-1)$$

$$v(k) = \sum_{\kappa=-\infty}^{k} \Delta v(\kappa) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \Delta v(\kappa) \cdot \gamma_{-1}(k-\kappa). \tag{2.2.5b}$$

In (2.2.3) sind als Spezialfälle die reelle Exponentialfolge

$$v(k) = v(0) \cdot \rho^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \varrho = e^{\sigma_n} \tag{2.2.6}$$

(s. Bild 2.2d) sowie für $z = e^{j\Omega}$ die sinusförmige Folge enthalten, die z.B. als

$$v(k) = \mathrm{Re}\left\{V e^{j\Omega k}\right\} = \hat{v}\cos(\Omega k + \varphi), \quad |\Omega| < \pi \tag{2.2.7a}$$

geschrieben werden kann. Bemerkenswert ist, daß die Folge (2.2.7a) nur dann periodisch mit der Periode k_0 ist, wenn mit $k_1 \in \mathbb{N}$

$$\Omega = \frac{k_1}{k_0}\, 2\pi, \quad 0 < k_1 < k_0$$

ist (s. Bild 2.2e). Dabei stimmen nur im Fall $k_1 = 1$ die Perioden der Folge und der entsprechenden kontinuierlichen Sinusfunktion überein.

Wir untersuchen, zu welchen der im letzten Abschnitt definierten Klassen die Testfolgen gehören. Offenbar ist $\gamma_0(k) \in l_1, l_2$ aber $\gamma_{-1}(k) \notin l_1,\ l_2$. Dagegen ist $\overline{\gamma_{-1}(k)} = \overline{\gamma^2_{-1}(k)} = 1/2$. Die Exponentialfolge (2.2.3) gehört für $|z| = \varrho \neq 1$ zu keiner der oben eingeführten Klassen. Ist $\varrho = 1$, so ist die mittlere Leistung

$$\overline{|v(k)|^2} = |v(0)|^2 = \hat{v}^2. \tag{2.2.8}$$

Wir berechnen ihren Wert auch für die sinusförmige Folge (2.2.7a). Es ist

$$\hat{v}^2\overline{\cos^2(\Omega k + \varphi)} = \frac{\hat{v}^2}{2}\left[1 + \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{-K}^{+K} \cos 2(k\Omega + \varphi)\right].$$

Unabhängig davon, ob die Folge periodisch ist oder nicht, also für beliebige Ω mit $|\Omega| < \pi$, ergibt sich aus

$$\sum_{-K}^{+K} \cos 2(k\Omega + \varphi) = \frac{\sin(2K+1)\Omega}{\sin\Omega} \cos 2\varphi \tag{2.2.9a}$$

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\sin(2K+1)\Omega}{(2K+1)\Omega}\ \frac{\Omega}{\sin\Omega} \cos 2\varphi = \begin{cases} 0, & \Omega \neq 0 \\ \cos 2\varphi, & \Omega = 0 \end{cases}$$

und damit

$$\hat{v}^2\overline{\cos^2(\Omega k + \varphi)} = \begin{cases} \dfrac{\hat{v}^2}{2}, & \Omega \neq 0 \\ \hat{v}^2\cos^2\varphi, & \Omega = 0. \end{cases} \tag{2.2.9b}$$

Mit **MATLAB** lassen sich zeitlich auf das Intervall $k = k_1(1)k_2$ begrenzte funktional beschriebene Folgen in einfacher Weise erzeugen und bildlich darstellen. Z.B. erhält man das Bild 2.2c für $v(k) = Vz^k$ mit

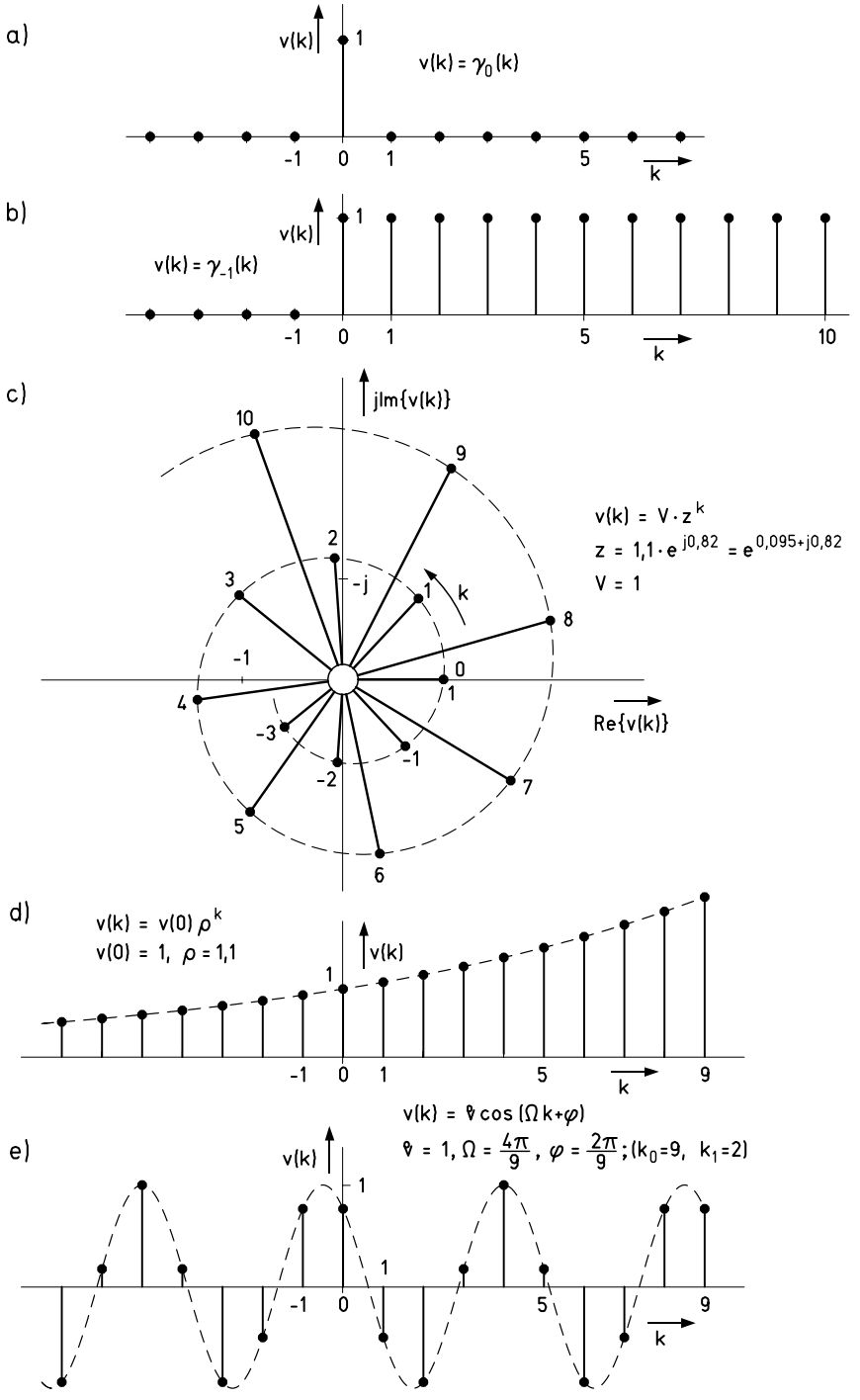

Abb. 2.2. Testfolgen

```
k=-3:10; z=1.1*exp(j*0.82); V=1;
v=V*z.^k;
axis('square'); plot(v,'--o'); grid on;
```

Hier beschreibt .^k die Potenzierung von z mit den Elementen des Vektors k.

Das Programm wird in einem Übungsbeispiel im Anhang, Abschn. 7.1.7 näher erläutert. •

Methoden zur Erzeugung potentiell zeitlich unbegrenzter determinierter Folgen werden wir insbesondere am Beispiel der Sinusfolge im Band II behandeln. Hier beschränken wir uns auf die Zusammenhänge bei der Gewinnung einer sinusförmigen Folge (2.2.7a) durch Abtastung einer sinusförmigen Funktion. Offenbar ist

$$\hat{v}\cos(\Omega k+\varphi)=\hat{v}\cos[(\Omega+\ell\cdot 2\pi)k+\varphi], \tag{2.2.10a}$$

wobei $\ell\in\mathbb{Z}$. Das bedeutet, daß alle Funktionen

$$v_0(t)=\hat{v}\cos(\omega t+\varphi) \tag{2.2.10b}$$

mit den Frequenzen

$$\omega=\omega_\ell:=(\Omega+\ell\cdot 2\pi)/T=(\omega_0+\ell\cdot\omega_a),\ \ell\in\mathbb{Z} \tag{2.2.10c}$$

dieselbe Wertefolge $\hat{v}\cos(\Omega k+\varphi)$ liefern. Hier ist

$$\omega_a=2\pi/T \tag{2.2.10d}$$

die *Abtastkreisfrequenz* und $\omega_0=\Omega/T$.

Bild 2.3 veranschaulicht den Zusammenhang für $\Omega=4\pi/9$, $\varphi=2\pi/9$ und $\ell=0,-1,+1$ (vergl. Bild 2.2e). Nur für

$$|\omega|<\frac{\omega_a}{2}=\frac{\pi}{T} \tag{2.2.10e}$$

ist $\omega_\ell=\omega_0$ (s. Bilder 2.8 und 2.9 in Abschn. 2.3.2). Die hier beobachtete Mehrdeutigkeit in der Beziehung zwischen einer Wertefolge und Funktionen, aus deren Abtastung sie entstanden sein kann, werden wir noch mehrfach behandeln.

2.3 Betrachtung im Frequenzbereich

Im letzten Abschnitt haben wir eine beliebige Wertefolge durch eine Überlagerung von gegeneinander verschobenen gewichteten Impulsen oder Sprungfolgen angegeben. Eine andere Darstellung, bei der wir die Folge als eine Summe geeignet gewählter Exponentialfolgen ausdrücken, ist von besonderem Interesse. Wie bei der entsprechenden Betrachtung kontinuierlicher Funktionen werden wir dabei bekanntlich auf eine Transformation der ursprünglich im Zeitbereich gegebenen Folge in den Frequenzbereich geführt. Wir beginnen die Betrachtung mit einer Untersuchung periodischer Folgen.

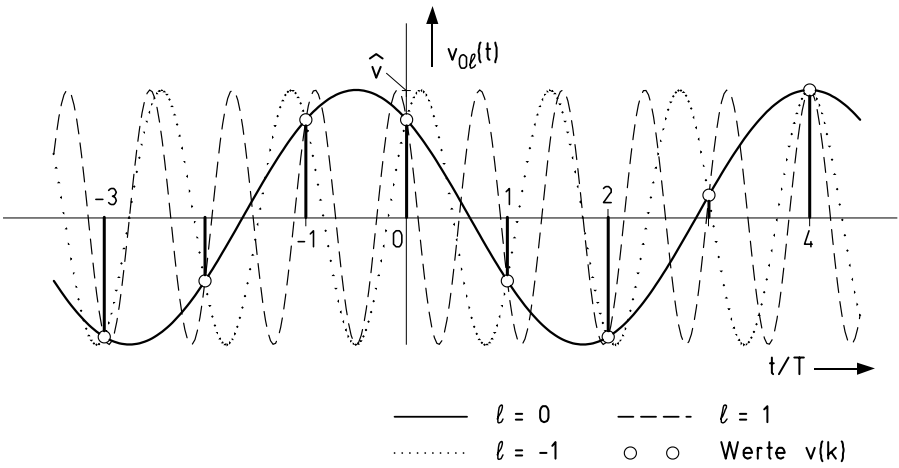

Abb. 2.3. Sinusförmige Folge $v(k) = \hat{v}\cos(\Omega k + \varphi)$ als Ergebnis der Abtastung sinusförmiger Funktionen $v_{0\ell}(t) = \hat{v}\cos(\omega_\ell t + \varphi)$ mit $\omega_\ell = \text{sign}\,\{\ell\}\,(\omega_0 + \ell \cdot \omega_a)$, $\omega_0 = \Omega/T, \omega_a = 2\pi/T$

2.3.1 Periodische Folgen

Gegeben sei eine in k periodische Folge $\tilde{v}(k)$ mit der Periode M. Es ist also $\tilde{v}(k) = \tilde{v}(k + M)$. Die Werte $\tilde{v}(k)$ seien beschränkt. $\tilde{v}(k)$ soll durch die Folge

$$\tilde{f}_m(k) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu w_M^{-\nu k} \tag{2.3.1a}$$

mit

$$w_M := e^{-j2\pi/M} \tag{2.3.1b}$$

angenähert werden. Da mit $r \in \mathbb{Z}$ auch $w_M^{-(\nu+rM)k} = w_M^{-\nu k}$ ist, gilt sicher $m \leq M - 1$.

Die Approximation soll im Sinne des minimalen mittleren Fehlerquadrats erfolgen. Dazu wählen wir die Koeffizienten c_ν so, daß

$$\epsilon_m = \sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{v}(k) - \tilde{f}_m(k)|^2 = \sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{\Delta}(k)|^2 = M \cdot \overline{|\tilde{\Delta}(k)|^2} \tag{2.3.2a}$$

minimal wird. Es ist

$$\begin{aligned}\epsilon_m &= \sum_{k=0}^{M-1} [\tilde{v}(k) - \tilde{f}_m(k)] \cdot [\tilde{v}^*(k) - \tilde{f}_m^*(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} [|\tilde{v}(k)|^2 - \tilde{v}(k)\tilde{f}_m^*(k) - \tilde{v}^*(k)\tilde{f}_m(k) + |\tilde{f}_m(k)|^2].\end{aligned}$$

Wir bestimmen zunächst

$$\sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{f}_m(k)|^2 = M\overline{|\tilde{f}_m(k)|^2} = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu w_M^{-\nu k} \sum_{\lambda=0}^{m} c_\lambda^* w_M^{\lambda k}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\lambda=0}^{m} c_\nu c_\lambda^* \sum_{k=0}^{M-1} w_M^{(\lambda-\nu)k}.$$

Hier ist

$$\sum_{k=0}^{M-1} w_M^{(\lambda-\nu)k} = \frac{w_M^{M(\lambda-\nu)}-1}{w_M^{(\lambda-\nu)}-1} = \begin{cases} M, \ \lambda-\nu = rM \\ 0, \quad \lambda-\nu \neq rM \end{cases} \qquad r \in \mathbb{Z}, \tag{2.3.3}$$

eine Beziehung, die als *Summenorthogonalität* der Folgen $w_M^{\lambda k} = e^{-j\lambda k 2\pi/M}$ bezeichnet wird. Es folgt

$$\sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{f}_m(k)|^2 = M\sum_{\nu=0}^{m} |c_\nu|^2.$$

Mit

$$\sum_{k=0}^{M-1} \tilde{v}(k)\tilde{f}_m^*(k) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu^* \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{v}(k) w_M^{\nu k} =: \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu^* \tilde{d}_\nu$$

läßt sich jetzt das Fehlermaß als

$$\epsilon_m = \sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{v}(k)|^2 - \frac{1}{M}\sum_{\nu=0}^{m} |\tilde{d}_\nu|^2 + M\sum_{\nu=0}^{m}\left[c_\nu - \frac{1}{M}\tilde{d}_\nu\right]\left[c_\nu^* - \frac{1}{M}\tilde{d}_\nu^*\right]$$

schreiben. Die ersten beiden Terme sind durch die Wahl von c_ν nicht beeinflußbar. Da der letzte Term nicht negativ werden kann, wird ϵ_m minimal für

$$c_\nu = \frac{1}{M}\tilde{d}_\nu = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} \tilde{v}(k) w_M^{\nu k}, \quad \nu = 0(1)m. \tag{2.3.4a}$$

Offenbar sind die $c_\nu =: \tilde{c}_\nu$ eine in ν periodische Folge mit der Periode M. Entsprechend der Bemerkung zu (2.3.1) kann die approximierende Folge aber nur maximal M Glieder enthalten. Für den Fehler erhält man mit (2.3.4a)

$$\epsilon_m = \sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{v}(k)|^2 - M\sum_{\nu=0}^{m} |\tilde{c}_\nu|^2 \geq 0, \tag{2.3.5a}$$

die *Besselsche Ungleichung* für periodische Folgen, die auch in der Form

$$\epsilon_m = M\left[\overline{|\tilde{v}(k)|^2} - \overline{|\tilde{f}_m(k)|^2}\right] \tag{2.3.5b}$$

geschrieben werden kann.

Wir berechnen $\sum_{\nu=0}^{m} |\tilde{c}_\nu|^2$ für $m = M-1$. Mit (2.3.4a) folgt

$$\sum_{\nu=0}^{M-1} |\tilde{c}_\nu|^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{\nu=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{\kappa=0}^{M-1} \tilde{v}(k) \cdot \tilde{v}^*(\kappa) w_M^{\nu(k-\kappa)}$$

und nach Vertauschung der Summationsreihenfolge mit (2.3.3)

$$\sum_{\nu=0}^{M-1} |\tilde{c}_\nu|^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{\kappa=0}^{M-1} \tilde{v}(k) \cdot \tilde{v}^*(\kappa) \frac{w_M^{M(k-\kappa)} - 1}{w_M^{(k-\kappa)} - 1}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{v}(k)|^2 = \overline{|\tilde{v}(k)|^2}.$$

Aus der Besselschen Ungleichung (2.3.5a) folgt $\epsilon_{M-1} = 0$ und damit die *Parselvalsche Gleichung* für periodische Folgen. In der Form

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |\tilde{v}(k)|^2 = \sum_{\nu=0}^{M-1} |\tilde{c}_\nu|^2 \tag{2.3.5c}$$

bzw.

$$\overline{|\tilde{v}(k)|^2} = M \cdot \overline{|\tilde{c}_\nu|^2} \tag{2.3.5d}$$

bringt sie zum Ausdruck, daß die mittlere Leistung von $\tilde{v}(k)$ sich als Summe der mittleren Leistungen der einzelnen Exponentialfolgen $\tilde{c}_\nu w_M^{-\nu k} = \tilde{c}_\nu e^{j\nu k 2\pi/M}$ schreiben läßt (s. (2.2.9b)). Zusammenfassend erhalten wir mit $m = M-1$

$$\tilde{c}_\nu = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{v}(k) w_M^{\nu k} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{v}(k) e^{-j\nu k 2\pi/M}, \tag{2.3.4a}$$

$$\tilde{f}_{M-1}(k) = \tilde{v}(k) = \sum_{\nu=0}^{M-1} \tilde{c}_\nu w_M^{-\nu k} = \sum_{\nu=0}^{M-1} \tilde{c}_\nu e^{j\nu k 2\pi/M}. \tag{2.3.4b}$$

Gleichung (2.3.4a) beschreibt die Transformation der im Zeitbereich gegebenen periodischen Folge $\tilde{v}(k)$ in den Frequenzbereich, (2.3.4b) die zugehörige inverse Operation. Nach (2.3.5d) stimmen die mittleren Leistungen der Folgen im Zeit- und Frequenzbereich abgesehen vom Faktor M überein.

Zur Untersuchung des Zusammenhanges mit einer periodischen Funktion $v_0(t)$ der Periode τ nehmen wir an, daß die periodische Folge $\tilde{v}(k)$ durch Abtastung einer Periode von $v_0(t)$ in den Punkten $t = kT = k\tau/M, k \in \mathbb{Z}$ entstanden ist. Es sei nun