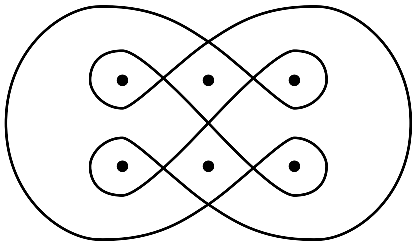
Verblüfft?!



Julian Havil

# Verblüfft?!

## Mathematische Beweise unglaublicher Ideen

Aus dem Englischen von Manfred Stern

Springer

Julian Havil
Winchester College
College St.
Winchester
United Kingdom SO23 9NA
julian.havil@ntlworld.com

Manfred Stern
Kiefernweg 8
06120 Halle
Germany
info@manfred-stern.de

Englische Originalausgabe *Nonplussed! Mathematical Proof of Implausible Ideas*, copyright


ISBN 978-3-540-78235-3 e-ISBN 978-3-540-78236-0

DOI 10.1007/978-3-540-78236-0

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subjects Classification (2000): 00, 01, 97, 90-01



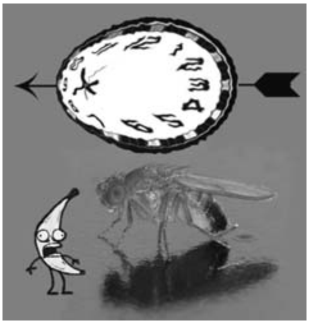
*Einbandgestaltung:* WMX Design GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.com

Für Anne,
für die meine Liebe monoton wächst
und nach oben unbeschränkt ist



*Time flies like an arrow. Fruit flies like a banana.*

Groucho Marx

*Widerspreche ich mir selbst? Nun gut, dann tue ich es eben. Ich bin groß, ich enthalte Vielheiten.*

Walt Whitman

*Mathematik ist kein behutsamer Marsch auf einer freigeräumten Autobahn, sondern eine Reise in eine unbekannte Wildnis, in der sich die Forscher oft verirren. Strenge sollte dem Historiker als Signal dienen, daß das Gelände kartiert ist und die wirklichen Forscher anderswohin gegangen sind.*

W. S. Anglin

# Vorwort

Ein Brief an den Leser

> Ich lege hier in Ihre Hand eine Arbeit, die mir in freien und schweren Stunden eine angenehme Zerstreuung gewährt hat. Wenn sie so glücklich ist, auch Ihnen eine solche für einige Stunden zu gewähren, und wenn das Lesen der Schrift Ihnen nur halb so viel Vergnügen macht, als mir das Schreiben derselben, so dürfte Ihr Geld so wenig wie meine Mühe schlecht angewendet sein. Nehmen Sie dies nicht als eine Empfehlung meines Werkes; weil mir seine Herstellung Freude gemacht hat, so glauben Sie deshalb nicht, daß ich nun, nachdem es fertig ist, ganz davon eingenommen wäre. Wer mit Falken die Lerchen und Sperlinge jagt, hat dasselbe Vergnügen, aber weniger Mühe, als der, welcher die Falken zu edlerer Jagd verwendet, und man kennt den Gegenstand dieser Abhandlung – den VERSTAND – nur wenig, wenn man nicht weiß, daß er nicht bloß das oberste Vermögen der Seele ist, sondern sein Gebrauch auch ein größeres und beständigeres Vergnügen als alles Andere gewährt. Seine Forschungen nach Wahrheit sind eine Art Jagd, wo schon die Verfolgung allein einen großen Theil des Vergnügens ausmacht. Jeder Schritt, den die Seele in ihrer Annäherung zu der Wissenschaft thut, führt zu einer Entdeckung, die, wenigstens zur Zeit, nicht bloß neu, sondern auch die beste ist.

Diese in Dorset Court, London, am 24. Mai 1689 geschriebenen Zeilen sind die Worte des englischen Philosophen und Universalgelehrten John Locke; es handelt sich um den ersten Teil des Vorworts (Epistle to the Reader) zu seinem 1690 erschienenen monumentalen Werk *An Essay Concerning Human Understanding*[1].

Lockes Vorwort ist auch das unsrige.

[1] *Versuch über den menschlichen Verstand*, in vier Büchern, Bd. 1., Buch I und II, 5. Aufl., Meiner, Hamburg 2000. Bd. 2., Buch III und IV, 3. Aufl., Meiner, Hamburg 1988.

# Danksagungen

Ich möchte mich bei meinem Rektor Dr. Ralph Townsend für seine Unterstützung bedanken, insbesondere für den Forschungsurlaub. Dank geht auch an den vormaligen Studenten Tom Pocock für seinen Enthusiasmus und seine ehrlichen Stellungnahmen, an die Gutachter für ihre nützlichen Bemerkungen sowie an Design Science für die Erstellung von Mathtype$^{\text{TM}}$ und an Wolfram Research für die Erzeugung von Mathematica$^{\text{TM}}$. Ebenso bedanke ich mich bei Jonathan Wainwright von T&T Productions Ltd für seine sorgfältige und geduldige Arbeit sowie bei meiner Lektorin Vickie Kearn für ihr geduldiges Verständnis und für ihren Enthusiasmus. Und ich schließe mich der langen Liste derjenigen an, die sich bei Martin Gardner für dessen lebenslange Inspiration bedanken.[2]

[2] Der nach der Widmung stehende unübersetzbare Ausspruch „Time flies like an arrow. Fruit flies like a banana“ (Groucho Marx) wurde von Frank Holzwarth (Springer-Verlag) illustriert, dem für seinen ständigen LaTeX-Support und für die Bearbeitung der Abbildungen gedankt sei. Der Übersetzer bedankt sich ferner bei Karin Richter (Martin-Luther-Universität Halle, FB Mathematik) für die Korrekturen und bei Gerd Richter (Angersdorf) für virtuelle, physische und psychische Rundumbetreuung. Dank für das Projektmanagement geht an Ruth Allewelt (Springer-Verlag).

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

*Alice lachte: „Ich brauche es gar nicht zu versuchen“, sagte sie; etwas Unmögliches kann man nicht glauben“. „Du wirst darin eben noch nicht die rechte Übung haben“, sagte die Königin. „In deinem Alter habe ich täglich eine halbe Stunde darauf verwendet. Zuzeiten habe ich vor dem Frühstück bereits bis zu sechs unmögliche Dinge geglaubt.* Lewis Carroll

Mathematikstudenten brauchen nicht lange, um Ergebnisse zu entdecken, die überraschend oder geistreich oder beides sind, und bei denen auch die Erklärungen ähnliche Vorzüge haben. Für den Autor ist es wahrscheinlich, daß die „um eine Münze rollende Münze“ für Lewis Carroll eine willkommene, wenn auch nur zeitweilige Erlösung von den trockenen Aufgaben der elementaren Algebra gewesen ist:

> Zwei identische Münzen mit dem gleichen Radius werden nebeneinander gelegt, wobei eine von ihnen festgehalten wird. Man drehe nun die mit dem Kopf nach oben zeigende bewegliche Münze ohne zu gleiten um die feste Münze, bis sich die erstere auf der anderen Seite der festgehaltenen Münze befindet (vgl. Abb. 1).
>
> Zeigt nun bei der gedrehten Münze der Kopf nach oben oder nach unten?

Innerhalb einer zufällig ausgewählten Personengruppe werden wahrscheinlich beide Antworten als „offensichtlich richtig“ angeboten. Dennoch ist eine der Antworten falsch und ein kleines Experiment mit beiden Münzen zeigt schon bald, welches die falsche Antwort ist. Wir müssen jedoch einen Beweis führen und zuviel Wissen kann sich hier als gefährlich erweisen: Betrachten wir einen gegebenen Punkt auf dem Umfang des beweglichen Kreises, dann müssen wir eine Epizykloide (genauer gesagt, eine Kardioide) untersuchen – und wir könnten es dabei mit harter Mathematik zu tun bekommen. Als Alternative konzentrieren wir uns auf den Weg des Mittelpunktes der beweglichen Münze und nehmen an, daß $r$ die gemeinsame Radiuslänge der Münzen sei. Während der Bewegung beschreibt der von diesem Mittelpunkt zurückgelegte Weg einen Halbkreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der festgehaltenen Münze ist und dessen Radius $2r$ beträgt; die Bewegung führt dazu, daß der Mittelpunkt eine Entfernung von $\pi(2r) = 2\pi r$ zurücklegt.

Wir vereinfachen nun die Angelegenheit und setzen voraus, daß sich die bewegliche Münze ohne zu gleiten auf einer geraden Linie der Länge $2\pi r$

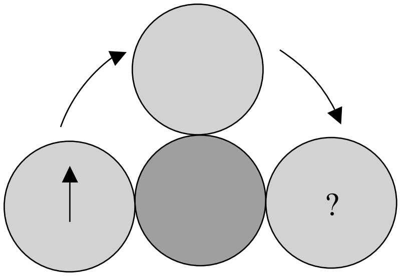



**Abb. 1.** Eine Münze, die um eine festgehaltene Münze rollt

dreht; die vom Münzenmittelpunkt zurückgelegte Entfernung ist in Abb 2 dargestellt. Es ist vollkommen klar, daß sich die Münze um 360° gedreht hat, und somit zeigt der Kopf wieder nach oben.

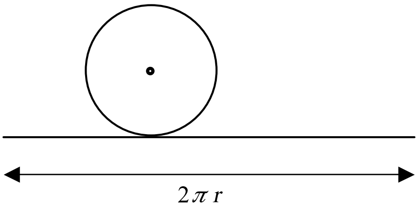



**Abb. 2.** Vereinfachte Darstellung der Situation

Auf den ersten Blick ist das Ergebnis tatsächlich überraschend – und die Lösung ist geistreich.

Es handelt sich um ein für dieses Buch charakteristisches Beispiel, denn wir beschreiben hier – zumindest nach Einschätzung des Autors – eine „Mixtur“ von überraschenden Dingen mit geistreichen Lösungen. Die Wahl dessen, was aufgenommen werden sollte bzw. die schmerzlichere Aussortierung dessen, was wegzulassen war, erwies sich zu Recht als schwierig. Wir haben ein Gleichgewicht angestrebt, bei dem die Vielfalt der Überraschungseffekte ebenso zur Geltung kommt wie die prominente Rolle der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bei der Herausarbeitung der Überraschungen: es sind diese Bereiche der Mathematik und das Unendliche, in denen es einen Überfluß an kontraintuitiven Beispielen gibt; andere Teilgebiete der Mathematik „liebäugeln“ mit solchen Beispielen. Um all das widerzuspiegeln, sind die vierzehn Kapitel des Buches gleichmäßig und abwechselnd aufgeteilt zwischen Ergebnissen, die im eigentlichen Sinne von der Wahrscheinlichkeit und Statistik abhängen, und Ergebnissen, die in anderen, sehr unterschiedlichen Teilgebieten der Mathematik angesiedelt sind. Ein solches Gebiet ist das Unendliche. Der aufgezeigte Spannungsbogen spiegelt sich auch darin wider, daß das vorliegende Buch das erste von zwei Büchern ist, wobei das zweite diejenigen Stellen behandelt, die vom Leser hier möglicherweise als unglückliche Auslassungen empfunden werden. Wo immer es möglich war, haben ich den Ursprung der betreffenden Ergebnisse diskutiert und dabei großen Wert auf historische Zusammenhänge gelegt.

Abgesehen von Kapitel 13 (und an welcher anderen Stelle könnte dieses Material sonst dargelegt werden?) nimmt das mathematische Niveau im Buch fortlaufend zu, aber keines der Themen liegt außerhalb der Reichweite eines engagierten Schülers der oberen Klassen eines Gymnasiums: sieht eine Aufgabe schwierig aus, dann bedeutet das überhaupt nicht, daß sie es auch ist. Wir hoffen, daß der Leser – ganz gleich, ob jung oder nicht mehr ganz so jung – auf den folgenden Seiten etwas findet, daß ihn darüber informiert bzw. daran erinnert, wie fragil die Intuition ist, von der wir uns routinemäßig im Alltag leiten lassen. Diese Intuition, die so leicht Schiffbruch erleidet, muß durch eine kompromißlose mathematische Argumentation ersetzt werden.

# 1

# Drei Tennis-Paradoxa

*Tennis ist ein an sich nutzloses Spiel, aber es eignet sich höchst gut dazu, das Auge zu schärfen und den Körper allen Haltungen auszusetzen. So ist es auch in der Mathematik: der zusätzlich und zwischendurch entstehende Nutzen ist nicht weniger wert als das, was hauptsächlich und beabsichtigt ist.* Roger Bacon

In diesem ersten Kapitel sehen wir uns drei Beispiele für kontraintuitive Phänomene an, die mit Sport zu tun haben: die ersten beiden sind in der Sprache des Tennis formuliert, während das dritte Beispiel wirklich damit zusammenhängt.

## Wie man ein Turnier gewinnt

Leo Moser (1921–1970) stellte das erste Problem im Lauf seiner langen Tätigkeit an der University of Alberta in Kanada. Angenommen drei Mitglieder eines Klubs beschließen, ein privates Turnier zu veranstalten: ein neues Mitglied M, dessen Freund F (der ein besserer Spieler ist) und der Spitzenspieler T des Klubs.[1]

M wird durch F und durch einen Preis ermutigt, falls M mindestens zwei Spiele nacheinander gewinnt, die alternierend gegen ihn selbst und gegen T gespielt werden.

Für M scheint es eine vernünftige Lösung zu sein, mehr gegen seinen Freund F als gegen den Spitzenspieler T anzutreten. Werfen wir jedoch einen Blick auf die Wahrscheinlichkeiten, die mit den beiden alternativen Spielfolgen FTF und TFT zusammenhängen, dann sehen die Dinge ganz anders aus. Wir betrachten $f$ als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß M gegen F gewinnt und $t$ als die Wahrscheinlichkeit dafür, daß M gegen T gewinnt (wobei wir die Unabhängigkeit voraussetzen).

Beschließt M, zweimal gegen F zu spielen, dann erhalten wir Tabelle 1.1, in der die Gewinnchancen aufgelistet sind.[2]

[1] M steht für *member*, F für *friend* und T für *top player*.

[2] In den nachfolgenden beiden Tabellen steht W (*win*) für den Spielgewinn durch M und L (*loss*) für sein Unterliegen im Spiel.

**Tabelle 1.1.** Das neue Mitglied spielt zweimal gegen seinen Freund

| F | T | F | Wahrscheinlichkeit |
|---|---|---|---|
| W | W | W | $ftf$ |
| W | W | L | $ft(1-f)$ |
| L | W | W | $(1-f)tf$ |

**Tabelle 1.2.** Das neue Mitglied spielt zweimal gegen den Spitzenspieler des Klubs

| T | F | T | Wahrscheinlichkeit |
|---|---|---|---|
| W | W | W | $tft$ |
| W | W | L | $tf(1-t)$ |
| L | W | W | $(1-t)ft$ |

Das liefert für den Preisgewinn eine Gesamtwahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{F}} &= ftf + ft(1-f) + (1-f)tf \\ &= ft(2-f). \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, daß M die scheinbar schlechtere Alternative wählt, zweimal gegen T zu spielen. Dann liefert Tabelle 1.2 die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und die Gesamtwahrscheinlichkeit für den Preisgewinn wird

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{T}} &= tft + tf(1-t) + (1-t)ft \\ &= ft(2-t). \end{aligned}$$

Der Spitzenspieler T ist ein besserer Spieler als der Freund F, also ist $t < f$ und somit $2-t > 2-f$, woraus sich $ft(2-t) > ft(2-f)$ und $P_{\mathrm{T}} > P_{\mathrm{F}}$ ergibt. Deswegen ist es tatsächlich die bessere Option, zweimal gegen die Spitzenspieler zu spielen.

Die logische Gemütsruhe wird wiederhergestellt, wenn wir uns die erwartete Anzahl der Gewinne ansehen. Bei FTF haben wir

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{F}} &= 0 \times (1-f)(1-t)(1-f) \\ &\quad + 1 \times \{f(1-t)(1-f) + (1-f)t(1-f) + (1-f)(1-t)f\} \\ &\quad + 2 \times \{ft(1-f) + f(1-t)f + (1-f)tf\} + 3 \times ftf \\ &= 2f + t \end{aligned}$$

und eine ähnliche Rechnung für TFT ergibt $E_{\mathrm{T}} = 2t + f$.

Wegen $f > t$ gilt $2f - f > 2t - t$ und somit $2f + t > 2t + f$. Das wiederum bedeutet, daß $E_{\mathrm{F}} > E_{\mathrm{T}}$ – und das ist es, was wir erwarten *würden*!

## Zusammenstellen einer Mannschaft

Wir wollen uns jetzt eine versteckte Falle ansehen, in die man bei der Auswahl der Mannschaft geraten kann.

Es werden 10 Tennisspieler in einer Rangliste ausgewählt, die von der Rangnummer 1 (schlechtester Spieler, W) bis zur Rangnummer 10 geht (bester Spieler, B) geht[3]. Wir nehmen weiter an, daß B von W zu einem Wettkampf jeder gegen jeden herausgefordert wird, wobei sich W jeweils die zwei besten verbleibenden Spieler aussuchen kann und B aus Fairneßgründen jeweils die zwei schlechtesten verbleibenden Spieler wählen muß.

Nach Annahme der Herausforderung ist $T_W = \{1, 8, 9\}$ das Team von W und $T_B = \{10, 2, 3\}$ das Team von B. Tabelle 1.3 zeigt das (vermutete) unvermeidliche Ergebnis des Turniers; in dieser Phase interessiert uns nur die linke obere Ecke. Wir erkennen, daß sich die ungünstige Lage von W nicht gebessert hat, denn $T_B$ schlägt $T_W$ mit dem Ergebnis 5 zu 4.

**Tabelle 1.3.** Wettkampfergebnis eines jeder-gegen-jeden Turniers zwischen den verschiedenen Teams

| | | $T_B$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 10 | 2 | 3 | 7 | 5 |
| | 1 | B | B | B | B | B |
| | 8 | B | W | W | W | W |
| $T_W$ | 9 | B | W | W | W | W |
| | 6 | B | W | W | B | W |
| | 4 | B | W | W | B | B |

Die verbleibenden Spieler sind $\{4, 5, 6, 7\}$, und W erneuert seine Herausforderung an B dadurch, daß B einen dieser Spieler in sein Team aufnehmen kann; danach würde W einen Spieler aus dem Rest auswählen. Natürlich wählen sowohl B als auch W jeweils die besten verbleibenden Spieler aus, das heißt, die Spieler mit den Rangnummern 7 beziehungsweise 6. Als Mannschaften haben wir jetzt $T_W = \{1, 8, 9, 6\}$ und $T_B = \{10, 2, 3, 7\}$ und die erweiterte Tabelle 1.3 zeigt, daß – trotz der Hinzunahme des besseren Spielers in das Team von B – das Ergebnis mit einem 8 zu 8 Unentschieden für B schlechter ist.

Eine weitere Erneuerung der Herausforderung unter denselben Bedingungen führt zu den Mannschaften $T_W = \{1, 8, 9, 6, 4\}$ und $T_B = \{10, 2, 3, 7, 5\}$ und dieses Mal zeigt die vollständige Tabelle 1.3, daß das Team $T_W$ nun das Team $T_B$ mit dem Ergebnis von 13 zu 12 schlägt.

[3] W steht für *worst* und B für *best*.

Eine Verlierermannschaft ist also dadurch zu einer Siegermannschaft geworden, daß sie schlechtere Spieler ausgewählt hat als der Gegner.

Tabelle 1.4 zeigt für jeden der drei Fälle das durchschnittliche Ranking der beiden Mannschaften. Wir sehen in allen drei Fällen, daß das Team $T_{\mathrm{B}}$ ein niedrigeres Ranking hat als das Team $T_{\mathrm{W}}$, und daß das durchschnittliche Ranking nach Hinzunahme neuer Spieler für $T_{\mathrm{B}}$ zunimmt, aber für $T_{\mathrm{B}}$ abnimmt oder gleich bleibt. Dieser Effekt ist ein Nachhall eines einfachen aber wichtigen Paradoxons, das als *Will-Rogers-Phänomen* bekannt ist.

**Tabelle 1.4.** Das durchschnittliche Ranking eines jeden der drei Teampaare

| | | | |
|---|---|---|---|
| Durchschnittliches Ranking von $T_{\mathrm{B}}$ | 5 | $5\frac{1}{2}$ | $5\frac{2}{5}$ |
| Durchschnittliches Ranking von $T_{\mathrm{W}}$ | 6 | 6 | $5\frac{3}{5}$ |

Die Weltwirtschaftskrise führte in den 1930er Jahren zu einer Migrationsbewegung zwischen den Einzelstaaten der USA. Dieser Umstand veranlaßte den lassowerfenden Witzbold und Volksphilosophen Will Rogers zu folgender Bemerkung:

> Als die Okies Oklahoma verließen und nach Kalifornien gingen, erhöhten sie den Intelligenzquotienten in beiden Staaten.

Rogers, der ein ‘Okie’ war (also ein aus Oklahoma stammender Amerikaner), teilte mit dieser Stichelei natürlich Seitenhiebe aus. Betrachten wir aber den theoretischen Fall, daß die am wenigsten intelligenten Okies nach Kalifornien migrierten und daß sie alle intelligenter waren als die einheimischen Kalifornier (!), dann ist Rogers’ spöttische Anspielung offensichtlich wahr. Das Ergebnis ist jedoch subtiler. Wir betrachten zum Beispiel die beiden mit einem Intelligenz-Ranking (1 niedrig, 9 hoch) versehenen Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Das durchschnittliche Ranking von $A$ ist $2,5$ und das von $B$ ist 7. Überführen wir nun die in $B$ auftretende 5 nach $A$, dann ist $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{6, 7, 8, 9\}$. Das durchschnittliche Ranking von $A$ ist jetzt 3 und das von $B$ ist $7,5$: beide Intelligenzquotienten sind im Schnitt angestiegen.

Wir gehen nun vom theoretischen Intelligenzquotienten zur realen Welt des Gesundheitszustandes von Individuen über, indem wir den medizinischen Begriff *stage migration* und ein realistisches Beispiel des Will-Rogers-Phänomens betrachten. Bei der medizinischen *stage migration* führt eine verbesserte Feststellung von Krankheiten zu einer raschen Neueinstufung von „gesund“ in „nicht gesund“. Nach der Neueinstufung als „nicht gesund“ erhöht sich die durchschnittliche Lebensdauer derjenigen, die auch weiterhin als „gesund“ eingestuft bleiben. Ebenso erhöht sich aber auch die durchschnittliche Lebensdauer der als „nicht gesund“ eingestuften Personen, denn der Gesundheitszustand einiger dieser Personen ist schon seit längerer Zeit schlecht. Kurz gesagt:

das Phänomen könnte zu einer nur in der Einbildung vorhandenen Steigerung der Überlebensraten zweier verschiedener Gruppen führen. Beispiele für dieses Phänomen sind unlängst u. a. in Bezug auf das Prostatakarzinom (I. M. Thompson, E. Canby-Hagino and M. Scott Lucia (2005), 'Stage migration and grade inflation in prostate cancer: Will Rogers meets Garrison Keillor', *Journal of the National Cancer Institute* 97:1236–37) und in Bezug auf Brustkrebs (W. A. Woodward et al. (2003), 'Changes in the 2003 American Joint Committee on cancer staging for breast cancer dramatically affect stage-specific survival', *Journal of Clinical Oncology* 21:3244–48) gegeben worden. Die obengenannten Arbeiten werfen jedoch die Frage auf, ob der Rückgang der Sterblichkeit wirklich ein Behandlungserfolg war, oder ob es sich nicht vielmehr um eine Selbsttäuschung aufgrund des Will-Rogers-Phänomens handelt.

## Gewinn bei Aufschlag

Wir wenden uns nun leichteren Dingen beim Zählen im Tennis zu und sehen uns eine Situation an, bei der theoretisch eine Anomalie des Zählsystems aufgedeckt werden kann.

Das Zählsystem im Rasentennis ist geheimnisvoll und beruht auf den Positionen eines Uhrzeigers. Für jedes einzelne Spiel wird folgendermaßen gezählt.

> Gewinnt ein Spieler seinen ersten Punkt, dann wird ihm eine 15 gutgeschrieben; gewinnt er den zweiten Punkt, dann hat dieser Spieler einen Stand von 30; bei Gewinn des dritten Punktes beträgt der Stand 40 für diesen Spieler und der vierte Punkt führt zum Gewinn des betreffenden Spielers – es sei denn, beide Spieler haben je drei Punkte gewonnen, und in diesem Fall spricht man von Einstand; der nächste von einem Spieler gewonnene Punkt wird als „Vorteil" für den betreffenden Spieler bezeichnet. Gewinnt derselbe Spieler auch noch den nächsten Punkt, dann gewinnt er das Spiel; gewinnt der andere Spieler den nächsten Punkt, dann spricht man wieder von Einstand. Das Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis ein Spieler unmittelbar nach einem Einstand zwei Punkte und damit das Spiel gewinnt.

Die großen Tennisspieler der Vergangenheit und Gegenwart werden vielleicht überrascht sein, wenn sie erfahren, *daß bei diesem Zählsystem ein sehr guter Spieler, der bei einem Stand von 40–30 oder 30–15 gegen einen gleichwertigen Gegner aufschlägt, geringere Gewinnchancen hat als zu Beginn des Spiels.*

Wir quantifizieren die ebenbürtigen Spieler, indem wir einem von ihnen eine feste Wahrscheinlichkeit $p$ dafür zuweisen, daß er als Aufschläger einen Punkt gewinnt (und die Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ dafür, daß er den Punkt verliert); für einen sehr guten Spieler liegt $p$ nahe bei 1. Wir verwenden die Notation $P(a, b)$ für die Wahrscheinlichkeit, daß der Aufschläger das Spiel gewinnt, wenn er $a$ Punkte und der Rückschläger $b$ Punkte hat. Wir müssen

$P(40,30)$ und $P(30,15)$ berechnen und beide Ergebnisse mit $P(0,0)$ vergleichen, was mit einigem Aufwand einhergeht!

Zunächst bemerken wir, daß die Position „Vorteil“ die gleiche ist wie die Position bei $(40,30)$; das bedeutet, daß die Situation bei Einstand – unter Aufteilung in Gewinn oder Verlust des nächsten Punktes – durch

$$P(40,40) = pP(40,30) + qP(30,40)$$

gegeben ist. Die gleiche Logik liefert

$$P(30,40) = pP(40,40) \quad \text{und} \quad P(40,30) = p + qP(40,40).$$

Setzen wir diese Gleichungen zusammen, dann ergibt sich

$$P(40,40) = p(p + qP(40,40)) + q(pP(40,40))$$

und somit

$$P(40,40) = \frac{p^2}{1-2pq}.$$

Unter Verwendung der Identität $1 - 2pq = (p+q)^2 - 2pq = p^2 + q^2$ erhalten wir für die Situation „Einstand“ die symmetrischere Form

$$P(40,40) = \frac{p^2}{p^2+q^2}$$

und diese liefert

$$P(30,40) = pP(40,40) = \frac{p^3}{p^2+q^2}.$$

Der erste Ausdruck, der uns interessiert, ist dann

$$\boxed{P(40,30) = p + \frac{p^2 q}{p^2+q^2}}$$

Wir suchen jetzt den Ausdruck für $P(30,15)$, was etwas mehr Arbeit erfordert. Zur Vereinfachung verwenden wir ein Baumdiagramm, das die möglichen Erfolgsrouten aufteilt und mit bekannten Wahrscheinlichkeiten endet (vgl. Abbildung 1.1).

Zählen der absteigenden Wege ergibt

$$\begin{aligned} P(30,15) &= p^2 + 2pq\left(p + \frac{p^2 q}{p^2+q^2}\right) + q^2\left(\frac{p^3}{p^2+q^2}\right) \\ &= p^2(1+2q) + \frac{3p^3q^2}{p^2+q^2} \end{aligned}$$

und somit haben wir unseren zweiten Ausdruck: