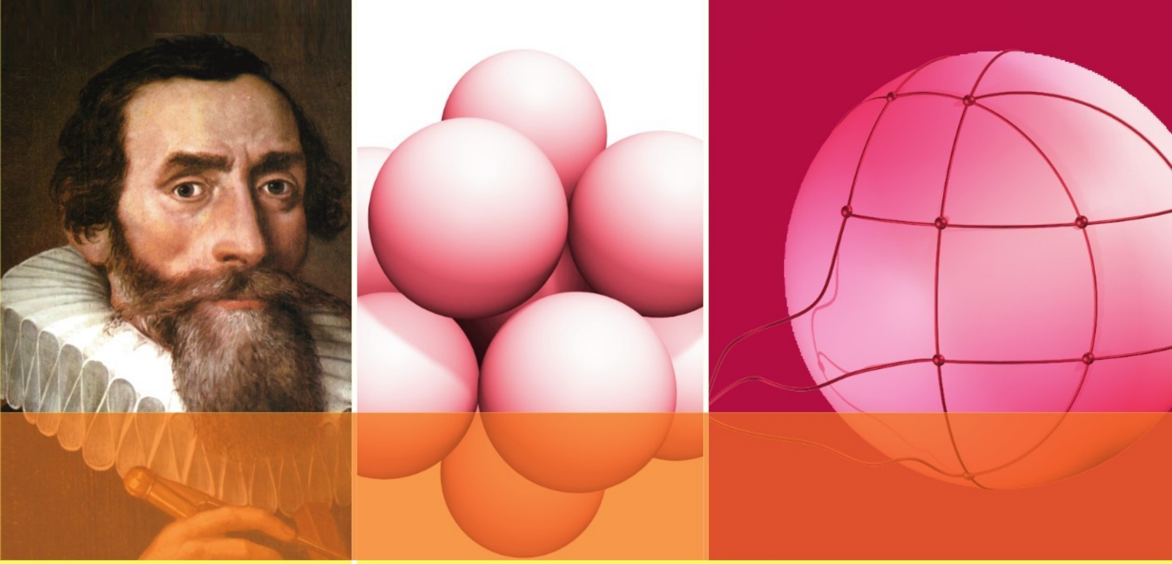

George G. Szpiro

Die Keplersche Vermutung

Springer

Die Keplersche Vermutung

George G. Szpiro

Die Keplersche Vermutung

Wie Mathematiker ein 400 Jahre altes Rätsel lösten

Aus dem Englischen von Manfred Stern

Springer

George G. Szpiro
Neue Zürcher Zeitung
Hayarmuk St. 3
91060 Jerusalem
Israel
g.szpiro@NZZ.ch

Übersetzer
Manfred Stern
Kiefernweg 8
06120 Halle
Deutschland
info@manfred-stern.de

Die englische Originalausgabe erschien 2003 unter dem Titel Kepler's Conjecture bei John Wiley & Sons, Inc.

ISBN 978-3-642-12740-3 e-ISBN 978-3-642-12741-0
DOI 10.1007/978-3-642-12741-0
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 52-XX, 97-XX, 00-XX, 01-XX

Einbandentwurf: deblik

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort zur deutschen Übersetzung

Es ist mir eine besondere Freude, daß die Geschichte des Beweises der Keplerschen Vermutung sieben Jahre nach ihrem ersten Erscheinen in Amerika nun auch den Lesern in deutscher Sprache zugänglich gemacht werden kann. Die Übersetzung bot Gelegenheit, verschiedene Fehler zu korrigieren und ein zusätzliches Kapitel aufzunehmen, in dem die Ereignisse beschrieben werden, die nach dem Jahr 2003, dem Erscheinungsjahr der amerikanischen Ausgabe, stattfanden.

Ich möchte hier vor allem dem Übersetzer Manfred Stern (Halle an der Saale) danken, der sich mit Elan und Sachwissen an die Aufgabe gemacht hat. Er machte mich auf verschiedene Unklarheiten und Versehen aufmerksam, die in der vorliegenden deutschen Ausgabe beseitigt wurden. Für verbleibende Fehler bin jedoch weiterhin ich verantwortlich.

Ferner danke ich Herrn Martin Peters und Frau Ruth Allewelt vom Springer-Verlag für Vertrauen und Unterstützung.[1]

Gewidmet ist dieses Buch dem Andenken an meinen Vater, Simcha Binem Szpiro (4. August 1915 – 10. Oktober 2009).

George G. Szpiro

Jerusalem, im August 2010

[1] Der Übersetzer bedankt sich zusätzlich und herzlich bei Karin Richter und Gerd Richter (beide Martin-Luther-Universität Halle, Fachbereich Mathematik) für Korrekturen und technischen Support vor Ort und bei Gerhard Betsch (Weil im Schönbuch) für zusätzliche Literaturhinweise. Ein ebenso herzliches Dankeschön geht an Frank Holzwarth (Springer-Verlag Heidelberg) für umfassende LaTeX-Hilfe.

Vorwort zur amerikanischen Ausgabe

Dieses Buch schildert ein Problem, das die Mathematiker nahezu vierhundert Jahre lang gequält hat. Der deutsche Astronom Johannes Kepler vermutete 1611, daß man die dichteste Packung von gleichgroßen Kugeln dadurch erreicht, daß man sie so stapelt wie es manche Obst-und Gemüsehändler mit Orangen oder Tomaten machen. Bis vor kurzem gab es keinen strengen Beweis dieser Vermutung.

An Versuchen hat es nicht gemangelt. Die besten und klügsten Köpfe bemühten sich im Laufe von vier Jahrhunderten, das Problem zu lösen. Erst 1998 gelang Thomas Hales, einem jungen Mathematiker der University of Michigan, der Durchbruch. Dabei mußte er auf Computer zurückgreifen. Es ist wirklich überraschend, wieviel Zeit und welche Anstrengungen die Mathematiker dieses Problem gekostet hat – und es waren sehr viele Mathematiker, die sich damit abmühten. Mathematiker befassen sich routinemäßig mit vier- und höherdimensionalen Räumen. Mitunter ist das schwierig und oft wird die Vorstellungskraft auf eine harte Probe gestellt. Aber zumindest im dreidimensionalen Raum kommen wir zurecht. Oder es scheint so. Aber dem ist nicht so und das geistige Ringen, über das wir in diesem Buch berichten, zeugt von den riesigen Schwierigkeiten. Nachdem Simon Singh seinen Bestseller über das Fermatsche Problem[2] veröffentlicht hatte, schrieb er im *New Scientist*, daß „ein würdiger Nachfolger von Fermats letztem Satz dem Zauber und der Faszination dieser Aussage ebenbürtig sein muß. Keplers Vermutung zur Kugelpackung ist genau ein solches Problem – auf den ersten Blick sieht es einfach aus, aber dann offenbart es subtile Grausamkeiten für diejenigen, die es zu lösen versuchen“.

Ich bin Keplers Vermutung erstmalig 1968 begegnet, als ich Student des ersten Studienjahres an der ETH Zürich war. Ein Professor der Geometrie erwähnte in einem anderen Zusammenhang „die Vermutung, daß man die dichteste Kugelpackung erzielt, wenn jede Kugel von zwölf anderen in einer

[2] Simon Singh, *Fermats letzter Satz: Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels*, Deutscher Taschenbuch Verlag, München 2000.

bestimmten Weise berührt wird“. Er sagte auch, daß Kepler der Erste war, der diese Vermutung aussprach, und er fügte hinzu, daß sie zusammen mit Fermats berühmter Vermutung eine der ältesten unbewiesenen mathematischen Vermutungen sei. Ich vergaß das alles dann für einige Jahrzehnte.

Dreißig Jahre und einige Berufswechsel später besuchte ich eine Konferenz in Haifa in Israel. Es ging thematisch um Symmetrie in akademischen und künstlerischen Disziplinen. Ich arbeitete als Korrespondent für die *Neue Zürcher Zeitung (NZZ)*. Die siebentägige Konferenz erwies sich als eine der besten Wochen meiner journalistischen Laufbahn. Unter den Leuten, die ich in Haifa traf, war Tom Hales, der junge Professor der University of Michigan, der gerade ein paar Wochen zuvor seinen Beweis der Kepler-Vermutung abgeschlossen hatte. Sein Vortrag war einer der Höhepunkte der Konferenz. Ich schrieb anschließend für die *NZZ* einen Artikel über die Konferenz und Toms Beweis, den Glanzpunkt der Zusammenkunft. Danach kehrte ich zu meiner Arbeit als politischer Journalist zurück.

Im darauffolgenden Frühling, als ich an einem Nachmittag gerade auf meinem Treadmill-Laufband schwitzte, kam mir plötzlich eine Idee. Vielleicht gibt es Menschen, nicht notwendigerweise Mathematiker, die an einer Lektüre über Keplers Vermutung interessiert sind. Ich stieg vom Laufband und begann zu schreiben. Ich schrieb zweieinhalb Jahre lang. Während dieser Zeit brach der zweite Palästinenseraufstand aus und der Friedensprozeß ging in die Brüche. Es waren sehr traurige und frustrierende Ereignisse. In diesen schweren Zeiten gab meiner Stimmung Auftrieb, daß ich in den Nächten, nach dem Abgabetermin für die Zeitung, in der Lage war, an dem Buch zu arbeiten. Aber dann, als ich den abschließenden Kapiteln gerade den letzten Schliff gab, tötete ein islamischer Dschihad-Selbstmordattentäter einen meiner besten Freunde. Ein paar Tage später, am 11. September 2001, ereigneten sich die Katastrophen von New York, Washington und Pennsylvania. Wenn es doch nur gelänge, menschliches Bestreben ausschließlich auf die Förderung von Wissen zu lenken anstatt manche zu veranlassen, ihren Mitmenschen Zerstörung zu bringen. Wäre es nicht schön, wenn Zeitungen ihre Seiten ausschließlich mit Storys über Kunst, Sport und Wissenschaft füllen könnten, und die letztgenannten Reportagen schlimmstenfalls mit Nachrichten über Prioritätsstreitigkeiten und akademische Kämpfe würzten?

Dieses Buch ist für ein breites Lesepublikum gedacht und wendet sich an Leser, die an Wissenschaft, Wissenschaftlern und Wissenschaftsgeschichte interessiert sind. Es werden nur die üblichen Oberschulkenntnisse in Mathematik vorausgesetzt. Andererseits habe ich versucht, so viele mathematische Details wie möglich zu geben, damit auch diejenigen Leser das Buch interessant finden, die mehr darüber wissen möchten, was Mathematiker tun. Leser, die mehr über die Menschen wissen möchten, die zur Lösung der Kepler-Vermutung beigetragen haben, seien für zusätzliches Material auf `www.GeorgeSzpiro.com` verwiesen.

Diejenigen Leser, die sich mehr für die „Basis-Story“ interessieren, möchten die esoterischen mathematischen Stellen vielleicht überspringen; aus diesem Grund sind die kompakteren mathematischen Passagen in einer anderen Schriftart gesetzt. Weiteres Material, das noch mehr Mathematik enthält, wurde in die Anhänge verbannt. Ich möchte auch darauf hinweisen, daß die hier gegebenen mathematischen Ausführungen keineswegs streng sind. Mein Ziel war es, eine allgemeine Vorstellung von dem zu geben, was einen mathematischen Beweis ausmacht, und ich wollte mich nicht in Details verlieren. Die Betonung liegt auf der Lebendigkeit der Darstellung und manchmal findet man nur ein Beispiel anstelle eines strengen Arguments.

Eine weitere Bemerkung zur Mathematik: Überall im Text werden die Zahlen auf drei oder vier Nachkommastellen „zusammengestutzt“. In der mathematischen Literatur schreibt man üblicherweise zum Beispiel $0,883\ldots$, um anzudeuten, daß noch viel mehr (möglicherweise unendlich viele) Nachkommastellen folgen. Im vorliegenden Buch schreibe ich die Pünktchen nach den Ziffern nicht immer hin.

Ich habe viel wertvolles Material in der Mathematics Library, der Harman Science Library und der Edelstein Library for History and Philosophy of Science der Hebrew University of Jerusalem gefunden. Die Bibliothek der ETH Zürich hat freundlicherweise einige Artikel bereitgestellt, die nirgendwo anders vorhanden waren, und sogar die Bibliothek des israelischen Instituts für Atomenergie stellte einen schwer zu findenden Artikel zur Verfügung. Ich möchte mich bei allen diesen Einrichtungen bedanken. Wie immer erwies sich das Internet als Füllhorn vieler nützlicher Informationen ... und vielen Mülls. Zum Beispiel fand ich unter der Überschrift „On Johannes Kepler's Early Life“ folgende Perle: „Es gibt keine Aufzeichnungen darüber, daß Johannes irgendwelche Eltern gehabt hat“. So viel hierzu. Wahrscheinlich wird es eine der wichtigsten Aufgaben zukünftiger Suchmaschinen sein, die e-Spreu vom e-Weizen zu trennen. Eine der nützlichsten Websites, auf die ich während der Arbeit an diesem Buch stieß, ist das MacTutor History of Mathematics archive (www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history), das von der School of Mathematics and Statistics der University of St. Andrews (Schottland) gepflegt wird. Das Archiv enthält eine Sammlung von Biographien von ungefähr 1500 Mathematikern.

Freunde und Kollegen lasen Teile des Manuskripts und machten Vorschläge. Ich gebe die Namen in alphabetischer Reihenfolge an. Zu den Mathematikern und Physikern, die mir Ratschläge und Erläuterungen gaben, gehören András Bezdek, Benno Eckmann, Sam Ferguson, Tom Hales, Wu-Yi Hsiang, Robert Hunt, Greg Kuperberg, Wlodek Kuperberg, Jeff Lagarias, Christoph Lüthy, Robert MacPherson, Luigi Nassimbeni, Andrew Odlyzko, Karl Sigmund, Denis Weaire und Günther Ziegler. Ich bedanke mich bei allen für ihre Mühe, vor allem aber danke ich Tom und Sam, die immer bereit waren, per E-Mail auf meine unzähligen Fragen zu den Feinheiten ihres Beweises zu antworten. Dank geht auch an Freunde, die sich die Zeit nahmen, ausgewählte

Kapitel zu lesen: Elaine Bichler, Jonathan Dagmy, Ray und Jeanine Fields, Ies Friede, Jonathan Misheiker, Marshall Sarnat, Benny Shanon und Barbara Zinn. Itay Almog vollbrachte viel mehr als nur die künstlerische Gestaltung – er korrigierte einige Fehler und machte zahlreiche Verbesserungsvorschläge. Ein besonderes Dankeschön geht an meine Mutter, die das ganze Manuskript gelesen hat. (Selbstverständlich fand sie es faszinierend.) Ich möchte mich auch bei meinem Agenten Ed Knappman bedanken, der mich bereits zu einer Zeit ermutigte, als es nur ein Probekapitel und einen Entwurf gab. Ebenso danke ich Jeff Golick, dem Herausgeber bei John Wiley & Sons, der das Manuskript in eine Form brachte, die veröffentlicht werden konnte.

Und schließlich danke ich meiner Frau Fortunée und meinen Kindern Sarit, Noam und Noga. Sie übten immer Nachsicht mit mir, wenn ich sie auf ein weiteres Beispiel der Keplerschen Kugelpackung aufmerksam machte. Ihre gute Laune machte alles der Mühe wert. Nicht zuletzt habe ich dieses Buch geschrieben, um ihnen etwas Liebe und Bewunderung für die Mathematik und für die Naturwissenschaften zu vermitteln. Ich hoffe, daß es mir gelungen ist. Der Vorname meiner Frau drückt am besten aus, was ich zum Schluß sagen möchte: *c'est moi qui est fortuné de vous avoir autour de moi!*

Ich widme dieses Buch meinen Eltern Simcha Binem Szpiro (aus Warschau, Polen) und Márta Szpiro-Szikla (aus Beregszász, Ungarn).

Inhaltsverzeichnis

1

Kanonenkugeln und Melonen

Der englische Adlige und Seefahrer Sir Walter Raleigh (1552–1618) ist vielleicht ein eher unwahrscheinlicher Vorläufer für ein intellektuelles Abenteuer. Seine wissenschaftlichen Leistungen werden mitunter angezweifelt, dennoch stieß er eine der großen mathematischen Untersuchungen der letzten vierhundert Jahre an: Irgendwann gegen Ende der 1590er Jahre, als Raleigh seine Schiffe für eine weitere Entdeckungsreise ausrüstete, bat er seinen besten Freund und mathematischen Assistenten Thomas Harriot um einen Gefallen. Harriot solle eine Formel aufstellen, mit deren Hilfe Raleigh die Anzahl der Kanonenkugeln in einem gegebenen Stapel einfach anhand der Form des Stapels ermitteln konnte. Harriot war auf Draht und löste das Problem, das ihm Raleigh gestellt hatte. Wie jeder gute Assistent verstand Harriot die Bedürfnisse seines Meisters, entwickelte sie einen Schritt weiter und versuchte, die effizienteste Möglichkeit zu finden, so viele Kanonenkugeln wie möglich in den Laderaum eines Schiffes zu stopfen. Auf diese Weise erblickte ein mathematisches Problem das Licht der Welt.

Harriot, acht Jahre jünger als Sir Walter, war ein vielseitig gebildeter Mathematiker, Astronom und Geograph. Er war auch ein glühender Atheist – eine Überzeugung, die er mit seinem Meister teilte, aber das sollte nicht zur Schau gestellt werden. Die beiden Männer waren durch einen gemeinsamen Tutor miteinander bekannt geworden; ihr Interesse an Seefahrt und Forschungsreisen war die Grundlage für eine lebenslange Freundschaft.

Eines der wenigen erhalten gebliebenen schriftlichen Dokumente von Harriot ist sein Bericht über Sir Walters Expedition 1585–1586 in die Neue Welt: *A Briefe and True Report of the New Found Land of Virginia*. Der 1588 veröffentlichte Bericht war das erste englische Buch, das die erste englische Kolonie in Amerika beschrieb. Der Bericht wurde in gebildeten Kreisen der damaligen Zeit ein echter Hit: Er wurde mehrere Male nachgedruckt und ins Lateinische, Französische und Deutsche übersetzt. Dieser Bericht hat dazu geführt, daß Harriot nicht so sehr als Wissenschaftler, sondern eher als Beobachter des *American way of life* bekannt geworden ist.

G.G. Szpiro, *Die Keplersche Vermutung*,
DOI 10.1007/978-3-642-12741-0_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

Harriot hat viele wissenschaftliche Leistungen aufzuweisen und er war einer der führenden Denker seiner Zeit, was mitunter zu Unrecht übersehen wird. Im Jahr 1609 war Harriot der erste Mensch, der den Mond durch ein Fernrohr beobachtete, und er entdeckte die Sonnenflecken und die Jupitermonde unabhängig von Galilei. Das wissen wir jedoch nur aus seinen Notizbüchern, weil Harriot kaum etwas veröffentlichte. Die meisten seiner wissenschaftlichen Ergebnisse sind Bestandteil seines opus magnum *Artis analyticae praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* (Anwendungen der Kunst der Analysis zur Lösung algebraischer Gleichungen), das 1631, zehn Jahre nach seinem Tod, veröffentlicht wurde. In diesem Buch entwickelte Harriot ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung von algebraischen Gleichungen. Er entwickelte auch die Techniken zur Lösung von Gleichungen dritten Grades weiter und ihm wird die Einführung der Zeichen $>$ (größer als) und $<$ (kleiner als) in die mathematische Notation zugeschrieben. Er leistete Beiträge zum Verständnis der Lichtbrechung, zum Dualsystem, zur sphärischen Geometrie, zur Ballistik und zu vielen anderen Gebieten. Im Jahr 1607 beobachtete er ein UFO am Nachthimmel, das später als der Halleysche Komet identifiziert werden sollte. Er war auch einer der ersten Atomisten (also jener Denker, die davon überzeugt waren, daß die gesamte Materie aus winzigen Partikeln besteht) – zu einer Zeit, als diese Auffassung noch keineswegs weit verbreitet war. Und er hatte viele Einsichten in die Anordnung von Kristallen – Einsichten, die später dem berühmteren Astronomen Johannes Kepler zugeschrieben wurden.

Als Antwort auf Sir Walters Frage stellte Harriot eine Tabelle auf, mit deren Hilfe man die Anzahl von Kanonenkugeln auf Karren von gegebenen Formen bestimmen kann. Aber wie wir bereits gesagt hatten, ging Harriot noch einen Schritt weiter. Er ersann nicht nur Formeln zur Berechnung der Anzahl von Kanonenkugeln in Stapeln einer bestimmten Form, sondern entdeckte auch, wie man die Anzahl der Kanonenkugeln maximiert, die in den Laderaum eines Schiffes passen. Im modernen mathematischen Sprachgebrauch ausgedrückt, fragte er sich, wie man dreidimensionale Kugeln so dicht wie möglich packen kann. Nachdem Harriot eine Weile über diese Frage nachgedacht hatte, beschloß er, einen Brief an Kepler zu schreiben, seinen Kollegen in Prag, der einer der führenden Mathematiker, Physiker und Astronomen der damaligen Zeit war.

Obwohl Kanonenkugeln dreidimensionale Objekte sind, kann dasselbe Problem auch in niedrigeren Dimensionen formuliert werden, und wir werden uns das entsprechende Problem zunächst in einer Dimension und dann in zwei Dimensionen ansehen. Die Objekte, die uns interessieren, sind Kugeln, die wir formal als Gesamtheit aller derjenigen Punkte des Raumes definieren, deren Abstand vom Mittelpunkt kleiner oder gleich einem bestimmten Radius ist. Raum und Abstand werden in Bezug auf die jeweilige Dimension definiert. In *einer* Dimension ist der Raum eine Gerade. In zwei Dimensionen ist der Raum eine Ebene. Und der dreidimensionale Raum ist der Raum um uns herum. Gemäß Definition ist also eine eindimensionale Kugel eine Strecke, deren

Länge gleich dem doppeltem Radius ist. Um das Ganze etwas intuitiver zu machen, betrachten wir eine Gerade und legen einen bestimmten Punkt als Kugelmittelpunkt fest. Dann bewegen wir uns zuerst in eine Richtung entlang der Geraden, bis wir den Abstand R zurückgelegt haben. Anschließend machen wir dasselbe in der anderen Richtung. Insgesamt haben wir damit eine eindimensionale Kugel mit Radius R. Es mag auf den ersten Blick überraschend erscheinen, daß eine gerade Strecke eine Kugel sein kann, da wir uns Kugeln üblicherweise als runde Objekte vorstellen.[1] Aber das sollte uns nicht stören; „Rundheit" hat keine Bedeutung in *einer* Dimension.

Eine zweidimensionale Kugel ist ein vertrauteres Objekt. Man lege einen Punkt in der Ebene fest und betrachte dann die Gesamtheit aller Punkte, die von dem festgelegten Punkt einen Abstand von höchstens R haben; diese Kugel besteht aus der Kreislinie und aus allen denjenigen Punkten, die innerhalb dieser Linie liegen. Man kann die Situation folgendermaßen illustrieren: Stellen Sie sich eine Wiese vor, auf der ein Mast steht. An diesem Mast binde man eine Kuh mit einem Seil der Länge R fest und lasse sie weiden. Nach einiger Zeit hat die Kuh alles Gras gefressen, das vom Mast nicht weiter als R entfernt ist.

Die dreidimensionale Kugel ist natürlich unsere Kanonenkugel.

Warum sollen wir eigentlich bei drei Dimensionen Schluß machen? Tatsächlich haben die Mathematiker – die nichts glauben, wenn man ihnen keinen wasserdichten Beweis gibt – überhaupt keine Schwierigkeiten, etwas zu definieren, das niemand jemals sehen wird. Sie definieren einfach höherdimensionale Kugeln auf dieselbe Weise, wie sie Strecken, Kreise und dreidimensionale Kugeln definiert haben: als die Gesamtheit von Punkten im n-dimensionalen Raum (wobei n eine beliebige natürliche Zahl sein kann), die nicht weiter vom Mittelpunkt entfernt sind als der Radius. Ob Sie es nun glauben oder nicht: Die Mathematiker können sogar das Volumen einer solchen n-dimensionalen Kugel angeben (vgl. Tabelle im Anhang).

Wir kommen nun wieder auf Packungen zurück und definieren, was wir unter deren Dichte verstehen. Immerhin können wir ja stets unendlich viele Kugeln in einen unendlich großen Raum packen. Was bedeutet das für uns? Zunächst einmal haben wir hier ein Beispiel dafür, warum Mathematiker so pingelig in Bezug auf scheinbar offensichtliche Dinge sind. Bevor wir also weitere Untersuchungen durchführen, muß der Begriff der Dichte präzisiert werden. Die Mathematiker definieren die Dichte einer Packung als das Verhältnis des Volumens des Raumes, der mit Kugeln gefüllt ist, zum Volumen des ganzen Raumes. Zur Berechnung der Dichte müssen wir einfach nur das von den Kugeln ausgefüllte Volumen durch das Raumvolumen dividieren. Das gilt für jede Dimension und nach Grenzübergang auch für einen unendlichen Raum. Es mag vielleicht etwas schwierig erscheinen, das Volumen eines unendlichen Raumes zu messen, aber die Mathematiker lassen sich durch der-

[1] Man kann auch eine gekrümmte Linie als eindimensionales Objekt definieren. In diesem Raum wären die Kugeln Teile der gekrümmten Linie.

lei geringfügige Hindernisse nicht abschrecken. Sie definieren die Dichte der Packung eines unendlichen Raumes als den Grenzwert des obengenannten Verhältnisses, wenn der Raum immer größer wird.

Können Sie sich vorstellen, was die dichteste Packung von Kugeln in *einer* Dimension ist? Wir wissen bereits, daß ein eindimensionaler Raum aus einer Geraden besteht, und daß die eindimensionalen Kugeln Strecken dieser Geraden sind – zum Beispiel Streichhölzer oder Zahnstocher. Versuchen Sie jetzt, möglichst viele Streichhölzer oder Zahnstocher auf einer Geraden unterzubringen. Man merkt ziemlich schnell, daß die dichtestmögliche Packungsweise darin besteht, die Streichhölzer lückenlos aneinander zu legen. Tatsächlich erreicht man mit dieser Art Packung die bestmögliche Dichte: 100 Prozent der Geraden werden mit Streichhölzern ausgefüllt und zwischen diesen ist kein Platz übrig. Das ist so offensichtlich, daß nicht einmal Mathematiker einen Beweis verlangen.

Wir gehen jetzt zu zwei Dimensionen über. Hier besteht das Problem darin, Kreise in einer Ebene anzuordnen. Wir illustrieren den Sachverhalt durch ein einfaches Beispiel. Man nehme einige Münzen der gleichen Größe, zum Beispiel Fünfcentstücke, lege sie auf einen Tisch und schubse sie dort eine Weile herum. Schnell findet man die dichteste Anordnung heraus: diese liegt vor, wenn jede Münze von sechs anderen umgeben ist, das heißt, wenn die Münzen ein hexagonales Muster bilden. Man muß nicht einmal besonders sorgfältig vorgehen, wenn man die Münzen anordnet: Wenn man sie nur ein bißchen herumschubst, dann ordnen sie sich üblicherweise von selbst in diesem Muster an.

Was ist die Dichte dieser Anordnung? Anhand der Abbildung erkennen wir, daß das Grundmuster, von dem die Packung bestimmt wird, ein Hexagon ist, genauer gesagt ein reguläres Hexagon oder regelmäßiges Sechseck. (Genaue Berechnungen findet man im Anhang.) Die ganze Fläche läßt sich mit solchen Hexagonen überdecken. Ein Teil eines jeden Hexagons ist durch Kreise ausgefüllt, ein anderer Teil bleibt dagegen leer. Jedes reguläre Sechseck kann in gleichseitige Dreiecke zerlegt werden, wobei die Dreiecke miteinander kongruent sind. Wir können uns deswegen darauf beschränken, die Dichte der Dreiecke zu berechnen. Wie sich herausstellt, überdecken die Kreise 90,7 Prozent der Fläche.

Zu Vergleichszwecken wollen wir die Dichte der Münzen bestimmen, wenn sie in einer regulären quadratischen Packung angeordnet werden. In diesem Fall füllen die Münzen weniger als 79 Prozent der Fläche aus (für die Details der Berechnung verweisen wir auf den Anhang). Folglich ist in zwei Dimensionen die regelmäßige quadratische Packung weitaus weniger effizient als die hexagonale Packung.

Es ist wichtig zu bemerken, daß die hexagonale Packung nicht notwendigerweise eine dichtere Packung als die quadratische Packung ist, falls die Fläche nicht bis ins Unendliche erweitert wird. Zum Beispiel könnten wir unter Verwendung der hexagonalen Packung nur drei Kreise in einem Quadrat der Kantenlänge vier unterbringen, während bei einer quadratischen Packung

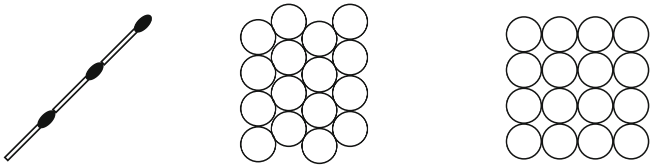

Abb. 1.1. (links) Streichhölzer, (Mitte) Münzen in einer hexagonalen Packung, (rechts) Münzen in einer quadratischen Packung

vier Kreise hineinpassen würden. Etwas Ähnliches gilt auch in drei Dimensionen und die Keplersche Vermutung, der Gegenstand dieses Buches, bezieht sich auf einen Raum, der sich bis ins Unendliche erstreckt.

Wir haben gesehen, daß im zweidimensionalen Raum die hexagonale Packung dichter als die quadratische Packung ist, aber ist sie auch die dichtestmögliche Packung? Es ist keineswegs offensichtlich, daß es keine dichteren Anordnungen gibt, und die Optimalität der hexagonalen Anordnung erfordert tatsächlich einen Beweis. Aber auch wenn das Ergebnis ziemlich banal aussieht, war ein exakter Beweis keine einfache Sache und es hat bis 1940 gedauert, einen Beweis zu finden, der die Mathematiker zufriedenstellte. Wir werden auf dieses Problem in Kapitel 4 zurückkommen.

Aber nun zurück zu Raleighs Kanonenkugeln. Nach Erhalt des Briefes von Harriot mußte Kepler nicht lange nachdenken, um zu dem Schluß zu kommen, daß man die dichtestmögliche Packung dreidimensionaler Kugeln dadurch erreicht, daß man sie so anordnet wie die Marktverkäufer ihre Äpfel, Orangen und Melonen stapeln. Kepler veröffentlichte 1611 eine kleine Broschüre, die er seinem Freund Johann Matthäus Wacker von Wackenfels als Neujahrsgeschenk überreichte. Das Büchlein hieß *Vom sechseckigen Schnee* und Kepler beschrieb darin eine Methode, Kugeln so dicht wie möglich zu packen. Das war die Geburt der Keplerschen Vermutung. Im nächsten Kapitel werden wir ausführlicher auf Schneeflocken und ihre Beziehung zur Packung von Kanonenkugeln eingehen.

Wir wollen Melonen als Illustration verwenden. Wären Melonen würfelförmig, dann wäre alles viel einfacher. Sie könnten dann lückenlos nebeneinander und übereinander gestapelt werden. Wie bei den Streichhölzern würde

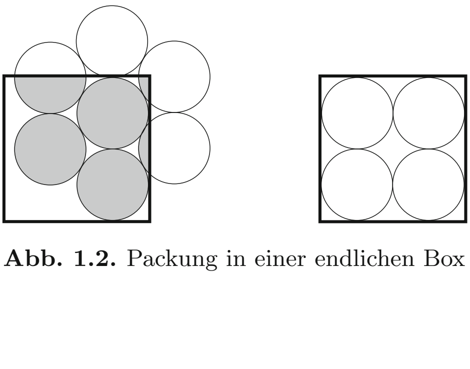

Abb. 1.2. Packung in einer endlichen Box

die Dichte dann 100 Prozent betragen. Aus exakt diesem Grund hat es Versuche gegeben, kubische Melonen zu züchten.[2] Da die Produkte häufig von heißen Ländern zu Überseemärkten geflogen werden, muß man die Melonen in Flugzeuge verladen. Das könnte am effizientesten in Kisten erfolgen, in denen man würfelförmige Melonen stapelt. An dieser Stelle fragt sich der Leser vielleicht, warum die Natur runde Melonen entwickelt hat (wobei wir zu Illustrationszwecken annehmen, daß Melonen vollkommen runde Objekte sind). Und warum sind so viele andere Früchte und Gemüsepflanzen annähernd rund? Nun, die Natur machte sich keine Sorgen wegen des beschränkten Laderaumes auf Schiffen oder in Flugzeugen, wohl aber wegen des Feuchtigkeitsverlustes in heißen Ländern. Und sie war bestrebt, diesen Verlust zu minimieren. Der Feuchtigkeitsverlust eines Objektes ist zu dessen Oberfläche proportional: Je mehr Schale erforderlich ist, um das Objekt zu bedecken, desto höher ist der Feuchtigkeitsverlust aufgrund der Verdunstung. Und welche Form minimiert die Oberfläche für eine Frucht mit gegebenem Volumen? Der Leser ahnt vielleicht schon, daß das die Kugelform ist.[3] Vergleicht man zwei Melonen gleichen Gewichts – eine würfelförmige und eine runde Melone –, dann hat die runde Melone fast 20 Prozent weniger Oberfläche als die würfelförmige (vgl. Anhang). Durch die Entwicklung runder Melonen strebte die Natur danach, die Oberfläche zu minimieren, um den Feuchtigkeitsverlust zu senken. Übrigens war das ein weiteres derjenigen leidigen Probleme, auf deren Beweis man Jahrtausende warten mußte. Bereits Archimedes kannte vermutlich die richtige Form. Aber erst 1894 gab Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) eine strengen Beweis, daß die „runde" Kugel diejenige Form ist, die bei einem gegebenen Volumen die Oberfläche minimiert.

Ähnliche Überlegungen dürften zwei Mineralwasservertreiber zu unterschiedlichen Schlußfolgerungen bezüglich der optimalen Form der Behälter veranlaßt haben, die sie für den Vertrieb verwenden sollten. Eines der Unternehmen (Neviot) vertreibt das Wasser in würfelförmigen Dosen. Das andere Unternehmen (Eden) liefert zylindrische Flaschen. (Keine der beiden Firmen verwendet runde Flaschen – vermutlich deswegen, weil diese von den Transportern rollen würden.) Offensichtlich versucht Neviot, die Anzahl der Flaschen zu maximieren, die auf einen Lasttransporter passen, und würfelförmige Flaschen erfüllen diesen Zweck. Was aber macht Eden? Das Unternehmen versucht augenscheinlich, die Rohstoffkosten zu minimieren, denn – für ein und dasselbe Volumen – erfordern zylindrische Flaschen weniger Kunststoff als die würfelförmigen. Aber die Eden-Container haben einen wirklich wichtigen Vorteil für den Endverbraucher. Die 20-Kilogramm-Flaschen können von der Haustür bis in die Küche gerollt werden, während die Neviot-Flaschen getragen werden müssen.

---

[2] Japanische Bauern haben herausgefunden, wie man kubische Wassermelonen anbaut.

[3] Das ist eine Version des sogenannten Problems der Dido, auf das wir in Kapitel 3 zurückkommen.

Um wieder auf den Obststand zurück zu kommen: Eine Methode, die Waren zur Schau zu stellen, besteht darin, diese in wildem Durcheinander in eine Kiste zu legen. Aus gutem Grund wählen nur sehr wenige Verkäufer diese Möglichkeit. Das ist nämlich nicht nur eine extrem unansprechende Weise, Melonen zur Geltung zu bringen, sondern auch eine sehr ineffiziente Methode. Experimente zeigen, daß nur ungefähr 55 bis 60 Prozent einer Kiste gefüllt sind, wenn man die Kugeln nach dem Zufallsprinzip hineinlegt. Eine besseres, obwohl auch nicht viel ästhetischeres Verfahren besteht darin, die Kiste zu verformen, während die Melonen hineingelegt werden. Unter der Voraussetzung, daß bei diesem Verfahren keine der Melonen zerquetscht wird, lassen sich ungefähr 64 Prozent des Behälters füllen.

Eine viel ästhetischere Art und Weise, die Melonen unterzubringen, besteht darin, zuerst die unterste Schicht in ordentlichen „Zeilen“ und „Spalten“ anzuordnen, und darauf dann die nächste Schicht so zu legen, daß die neu hinzukommenden Melonen sorgfältig auf den oberen „Spitzen“ der unteren Melonen positioniert werden. Offensichtlich hat diese kubische Stapelung aber einen ernsthaften Nachteil: die Melonen sind nicht stabil positioniert. Der geringste Ruck oder Stoß von einem Kunden würde den ganzen Stapel zum Einsturz bringen. Aber die Stabilität von Melonenstapeln – eine äußerst wichtige Sache für Marktverkäufer – ist für Mathematiker ohne Belang.[4] Die Mathematiker stört hingegen, daß die kubische Stapelmethode auf einem unendlich großen Tisch ineffizient ist. Die Dichte erreicht nur ungefähr 52 Prozent. Wenn also der Melonenhaufen einstürzt, dann nimmt die Dichte tatsächlich um ungefähr 3 bis 8 Prozent zu. Nur doofe Verkäufer würden so weit gehen, einen instabilen Melonenhaufen anzulegen, der noch dazu ineffizient ist.

Schlauere Verkäufer können es besser machen. Wie es sich herausstellt, wird auf den Märkten überall auf der Welt die gleiche, allgemein akzeptierte Stapelmethode angewendet. Zuerst werden die einzelnen Früchte in einer Reihe von einem Ende des Tisches zum anderen gelegt. Wie wir oben gesehen hatten, ist das die dichteste Packung in *einer* Dimension. Dann wird die nächste Reihe so aufgefüllt, daß jede Melone dieser zweiten Reihe in eine Vertiefung kommt, die zwischen zwei Melonen der ersten Reihe besteht. Im mathematischen Jargon ist die zweite Reihe „um eine halbe Melone transponiert“. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis der Tisch aufgefüllt ist. Sieht man von oben auf den Ladentisch, dann hat der Verkäufer jetzt die dichtestmögliche Packung in zwei Dimensionen.

Wenden wir uns jetzt der nächsten Schicht von Melonen zu, was also dem Übergang zur dritten Dimension entspricht. Es liegt nicht auf der Hand, was der Verkäufer tun sollte. Wir könnten etwa so vorgehen, daß wir jede Melone der zweiten Schicht genau über einer Melone der darunter befindlichen ersten

[4] Die Physiker hingegen machen sich da schon eher Sorgen. Wir verweisen auf das, was Per Bak in *How Nature Works* (Copernicus, New York 1996) über die Stabilität von Sandhaufen zu sagen hat.

Schicht plazieren. Das führt zu einer Dichte von 60,5 Prozent (vgl. Anhang). Leider ist das nicht viel besser als die zufällige Anordnung von Melonen.

Aber kluge Mathematiker können es sogar noch besser machen. Sie weisen uns prompt darauf hin, daß sich zwischen jeweils drei benachbarten Melonen der ersten Schicht eine Vertiefung gebildet hat. Eine größere Menge von Früchten kann gestapelt werden, wenn die Melonen der zweiten Schicht in die Vertiefungen der ersten Schicht gelegt werden. In der nachfolgenden Schicht wird eine Vertiefung mit einer Melone gefüllt, die nächste Vertiefung bleibt leer, danach wird wieder eine Vertiefung gefüllt, die nächste wird wieder leer gelassen und so weiter. Wie wir in Kapitel 2 sehen werden, erreicht die Dichte dieser sogenannten *hexagonal dichtesten Packung* (*hexagonal closest packing*, HCP) mordsmäßige 74,05 Prozent. Diese Art und Weise, Melonen zu stapeln, ist nicht nur besser als die vorherige, sondern sogar die beste Methode. Mit anderen Worten: es handelt sich um die dichteste Packung. Marktverkäufer wissen es, Sie und ich wissen es, Harriot und Kepler wußten es, aber die Mathematiker weigerten sich, das zu glauben. Und es dauerte 387 Jahre, um sie von der Richtigkeit dieser Tatsache zu überzeugen.

An dieser Stelle möchte ich zwei interessante und sehr wichtige Fakten über Kugelpackungen bekanntgeben. Diese Fakten zeigen, daß insbesondere in der Mathematik nichts so einfach ist wie es aussieht: 1883 wies der Kristallograph William Barlow (1845–1934) darauf hin, daß es nicht nur *eine* gute Möglichkeit gibt, Melonen zu stapeln, sondern zwei. Barlow war ein autodidaktischer Wissenschaftler, der die Muße, die ihm sein väterliches Erbe gewährte, dazu nutzte, auf dem Gebiet der Kristallographie zu arbeiten. Er war überzeugt davon, daß die Art und Weise, in der die Atome und Moleküle zusammengepackt sind, die Frage nach den symmetrischen Formen von Kristallen beantworten würde. Deswegen untersuchte er verschiedene Packungsanordnungen. Nach langjährigen Untersuchungen veröffentlichte er in der britischen Zeitschrift *Nature* einen Artikel, in dem er fünf räumliche Anordnungen von Atomen beschrieb. Zwei dieser Anordnungen sind hier für uns von Interesse.

Die erste Anordnung ist die oben beschriebene HCP der Marktverkäufer. Wir wollen aber nochmals kurz auf die Strategie der doofen Verkäufer eingehen. Sie beginnen damit, ihre Melonen in ordentlichen „Zeilen" und „Spalten" anzuordnen. Haben wir diese Anordnung nicht soeben als ineffizient zurückgewiesen? Ja schon, aber der springende Punkt ist die nachfolgende zweite Schicht. Man beachte, daß es auch hier (auf der Oberseite der ersten Schicht) Vertiefungen gibt, aber diese bestehen zwischen jeweils vier aneinander angrenzenden Melonen. (Bei der HCP gibt es Vertiefungen zwischen jeweils drei Melonen.) Die doofen Verkäufer legen die Melonen der nachfolgenden Schicht in diese Zwischenräume und errichten auf diese Weise den Stapel. Sie erhalten eine Packung, die als *flächenzentrierte kubische Packung* (*face-centered cubic packing*, FCC) bezeichnet wird.

Warum sollten Verkäufer so etwas Dummes tun, nachdem wir gezeigt haben, daß die HCP die effizienteste Anordnung ist? Nun, die HCP ist die effizienteste Stapelmethode, aber sie ist nicht die *einzige*. Bei genauer – peinlich genauer – Inspektion stellt sich nämlich heraus, daß die FCC und die HCP zwar nicht identisch, aber in gewisser Weise äquivalent sind! Das scheint auf den ersten Blick ziemlich unglaublich zu sein. Aber in Barlows Arbeit zeigt die sehr aufschlußreiche Illustration eines Schnittmodells einer FCC-Anordnung, daß sich die beiden Anordnungen mühelos ineinander transformieren lassen. Um die FCC-Anordnung in dem Schnittmodell fortzusetzen, müssen zehn Kugeln in zehn der verfügbaren sechzehn Lücken positioniert werden. Demzufolge bleiben sechs Lücken leer. Anstelle der zehn Kugeln könnte man nun aber sechs Kugeln in den Lücken positionieren, die zuvor unbesetzt geblieben sind. Setzt man die Positionierung der Kugeln über das Schnittmodell hinaus fort, dann wird wieder klar, daß jede Kugel von zwölf Nachbarn berührt wird. Aber jetzt ist die Schicht nicht als FCC-Anordnung gepackt, sondern als HCP-Anordnung. In Abhängigkeit davon, in welche Lücken die Kugeln der nächsten Schicht plaziert werden, erhält man entweder eine FCC- oder eine HCP-Anordnung. Beide Packungen haben die gleiche Dichte von 74,05 Prozent. Ganz so dumm sind also die dummen Verkäufer doch nicht.

Vierundzwanzig Jahre später schlug der Amateurwissenschaftler erneut zu. Zusammen mit seinem Kollegen William Jackson Pope, der später Chemieprofessor in Manchester wurde, schrieb Barlow einen Artikel, der 1907 im *Journal of the Chemical Society* erschien. In dieser Arbeit zeigten die beiden, daß es nicht nur zwei, sondern unendlich viele Möglichkeiten gibt, Melonen auf effizienteste Weise zu stapeln. (In Wahrheit befaßten sie sich mehr mit Atomen als mit Melonen.) Wir wollen nun beschreiben, was sie damit meinten.

Nach Anordnung der ersten Schicht von Melonen muß der Verkäufer eine Entscheidung treffen: Welche Vertiefungen soll er für die zweite Schicht verwenden? Er könnte die Zwischenräume verwenden, die auf Abbildung 1.4 durch ein Y gekennzeichnet sind. Er könnte aber auch diejenigen Zwischenräume nehmen, die durch ein Z markiert sind. Wir nehmen an, daß der Verkäufer Y verwendet. Bei der nachfolgenden Schicht steht er wieder vor einer Wahl:

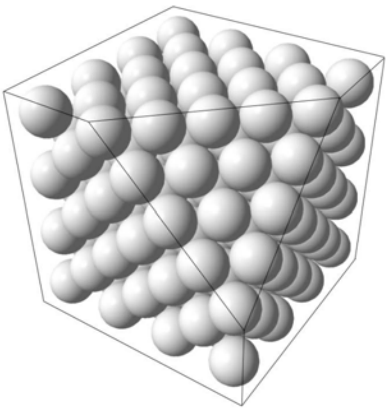

Abb. 1.3. Barlows Illustration

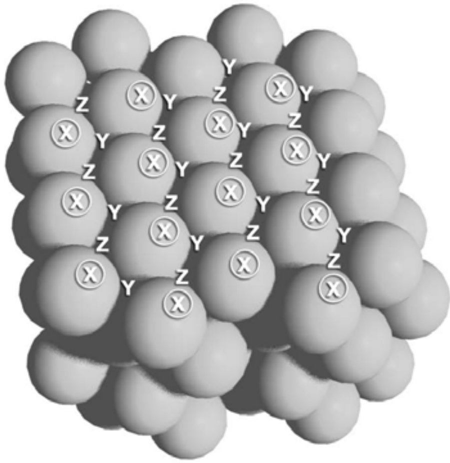

Abb. 1.4. Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Kugeln zu stapeln

Soll er die durch Z gekennzeichneten Zwischenräume oder die mit X markierten Zwischenräume verwenden? Und so weiter. Nach einigen Schichten wird der Haufen als XYZXZX .... oder als XZXZYX .... oder als XYXYXY .... oder als irgendeine andere Folge von Schichten gestapelt, die aus einer unendlichen Vielfalt von Möglichkeiten ausgewählt werden. Alle diese Anordnungen haben eine Dichte von 74,05 Prozent! Wären Harriot und Kepler da nicht überrascht gewesen?

Haben diese unendlich vielen Packungen außer ihrer Dichte noch etwas anderes gemeinsam? Ja, das haben sie. Bei jeder dieser Anordnungen berührt jede Kugel zwölf andere Kugeln. Man darf diese Aussage jedoch nicht mit ihrer Umkehrung verwechseln. Nicht jede Anordnung, bei der jede Kugel zwölf andere berührt, ist effizient. Tatsächlich gibt es äußerst widerliche Anordnungen, die ich als *dreckige Dutzende* bezeichne. In späteren Kapiteln werde ich mehr davon erzählen. Einstweilen wollen wir hier jedoch definitiv festhalten, daß in der Mathematik nichts so einfach ist, wie es aussieht.

2

Das Puzzle der Dutzend Kugeln

Harriots Briefpartner Johannes Kepler wurde in der Nähe von Stuttgart als Kind von Heinrich und Katharina Kepler (geb. Guldenmann) geboren. Heinrich und Katharina heirateten am 15. Mai 1571, und sieben Monate später, am 27. Dezember desselben Jahres, wurde der kleine Johannes geboren. Damit man nicht glaube – Gott verhüte! –, daß Katharina bereits an ihrem Hochzeitstag schwanger war, nehme man zur Kenntnis, daß Johannes eine Frühgeburt war. Er selbst behauptete, daß er am Morgen nach der Hochzeitsnacht siebenunddreißig Minuten nach vier Uhr empfangen worden sei. Der genaue Zeitpunkt der Empfängnis war für Kepler wichtig, da sich dieser gelehrte Mann, der führende Wissenschaftler seiner Zeit, gelegentlich als Liebhaber der Astrologie betätigte.

Seine Eltern sorgten nicht für das, was man ein gemütliches Zuhause nennen würde. Sein Vater war ein äußerst unsympathischer Mann, der von Zeitgenossen als übellauniger Hitzkopf beschrieben wurde, und seine Mutter war nicht viel besser. Sie war eine kleine, dünne Frau, geschwätzig und streitsüchtig; sie war als außergewöhnlich gemeiner Charakter bekannt und sah es augenscheinlich als ihre Aufgabe an, das Leben für Heinrich zu einem Jammerdasein zu machen. In seinem Verdruß büxte dieser von Zuhause aus, um sich der spanischen Armee anzuschließen und ließ den dreijährigen Johannes mit seiner Mutter allein zurück. Aber Katharina war keine Frau, die eine Niederlage akzeptierte, und sie machte sich auf die Suche nach ihrem Mann. Sie erwischte ihn schließlich in Belgien und wir können uns gut vorstellen, wie verlegen Heinrich inmitten seiner Kriegsgefährten wurde, als diese Frau aus heiterem Himmel bei ihm auftauchte. Heinrich hatte keine Wahl und folgte ihr zurück nach Deutschland. Aber er konnte die Heimstätte nicht lange ertragen und sehnte sich nach seinen Trinkgelagen und Raufereien. Bald schlich er sich erneut davon, um sich seinen Kriegskameraden wieder anzuschließen. Als er sich ein weiteres Mal in Belgien aufhielt, beging er ein unbekanntes Delikt und entkam nur mit knapper Not dem Galgen. Drei Jahre später kehrte er bei schlechter Gesundheit und sehr ramponiert nach Deutschland zurück und versuchte sein Glück als Gastwirt. Aber auch dieser Karrierewechsel sagte

G.G. Szpiro, *Die Keplersche Vermutung*,
DOI 10.1007/978-3-642-12741-0_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

Heinrich nicht zu, und da er vom ständigen Gezänk seiner Frau die Nase gestrichen voll hatte, kam er schließlich zu dem Entschluß, daß es reichte. Eines Tages verließ er das Haus und wurde nie wieder gesehen. Es ist nicht bekannt, wie und wo sein Leben endete.

Unter so widrigen Umständen hätten die bis dahin noch verborgenen Talente des jungen Johannes keinerlei Entfaltungsmöglichkeiten gehabt, wäre da nicht das Programm für begabte Kinder gewesen, das die ortsansässigen Adligen, die Herzöge von Württemberg, in der Stadt Leonberg initiiert hatten. Johannes wurde in diese Schule aufgenommen. Er tat sich beim Lernen hervor, ohne an der Spitze zu liegen. Offenbar hatte er die nicht gerade liebenswürdige Veranlagung seiner Mutter geerbt, verhielt sich ekelhaft zu den meisten seiner Klassenkameraden und war ständig an Raufereien und kleineren Auseinandersetzungen beteiligt.

Als Kepler schließlich seine Lebengeschichte niederschrieb, las sich diese teilweise folgendermaßen:

> Holp hasste mich offen, zweimal raufte er mit mir ... Molitor hatte für seine Abneigung insgeheim den gleichen Grund .... einst hatte ich ihn und Wieland verraten ... Köllin hasste mich nicht, sondern vielmehr ich ihn ... Braunbaum wurde mir durch meine Ausgelassenheit im Benehmen und Scherzen vom Freund zum Feind ... Den Huldenreich entfremdete zuerst verletztes Vertrauen von mir und meine unbesonnenen Vorwürfe. Die Abneigung gegen Seifert übernahm ich von mir selbst, da ihn auch die anderen nicht mochten ... Ortholf konnte mich nicht leiden wie ich den Köllin ... Den Lendlin [brachte ich gegen mich auf] durch unpassendes Schreiben, Spangenberg dadurch, dass ich ihn unbesonnen kritisierte, wo er doch der Lehrer war. Kleber hasste mich aufgrund eines falschen Verdachtes als Rivalen ... Den Rebstock reizte es, wenn man meine Begabung lobte ... Husel stellte sich ebenfalls feindselig gegen mein Vorankommen ... Zwischen Dauber und mir bestand, bei beiden fast gleich, eine stille eifersüchtige Rivalität ... Lorhard verkehrte nicht mit mir ... als mein Begleiter Jaeger mein Vertrauen getäuscht hatte ... war ich zwei Jahre lang beleidigt ... inzwischen ward mir ein anderer Feind im Rektor beschieden. Der Grund seiner Abneigung war, dass ich ihm als Vorgesetztem nicht genug Ehre zu erweisen schien. ... den Murr bekam ich als Feind, weil ich mir die Freiheit nahm, ihn zurechtzuweisen.

Und so weiter, und so weiter. Nicht ein einziges Mal erwähnte Kepler einen Freund, außer zu sagen, daß sich auch dieser in einen Feind verwandelt hatte. Natürlich war die schlechte Atmosphäre nicht die Schuld des armen Jungen. Der tiefere Grund für Haß und Ressentiment war, daß, wie Kepler selbst sagte, „Merkur sich im Quadrat des Mars, der Mond sich im Trigon des Mars und die Sonne sich im Sextil des Saturns befand“. Obendrein war Kepler ein Hypochonder, der in seiner ganzen Jugend an der einen oder anderen Krankheit litt, obwohl es dafür keine astrologische Erklärung gab.

Abb. 2.1. Johannes Kepler

Aber er schaffte es, in der Schule Latein zu lernen. Das sollte sich später als nützlich erweisen, denn Latein war damals die *lingua franca* der Wissenschaft, so wie es heute Englisch ist. Nach drei Jahren Studium bestand Kepler erfolgreich das Staatsexamen und bekam eine der begehrten Stellen in den Klosterschulen von Adelberg (wo der Tag frühmorgens um vier Uhr mit dem Singen von Psalmen anfing) und später in Maulbronn. 1589, ein halbes Jahr nach der endgültigen Abreise seines Vaters, begab sich der gerade fertig gewordene Baccalaureus an eine Universität mit der Vorstellung, die Laufbahn eines Geistlichen einzuschlagen. Kepler mußte jedoch, wie es damals üblich war, zwei Jahre an der philosophischen Fakultät der Universität Tübingen studieren, bevor er mit dem Studium der Theologie anfangen konnte. Nachdem er den Grad eines Magister Artium erlangt hatte, erhielt er schließlich die Genehmigung, sich an der theologischen Fakultät einzuschreiben. Im Jahr 1594, gegen Ende des Studiums, begann Kepler, sich nach einer Stelle als Geistlicher umzusehen. Aber zu seinem großen Verdruß lief die Sache nicht reibungslos – ein Umstand, der sich als immerwährender Gewinn für die Wissenschaft und für die Welt erweisen sollte.

Michael Mästlin, Professor der Mathematik und Astronomie, war einer von Keplers Lehrern und hatte in diesem Wunderkind ein außergewöhnliches Talent für die Naturwissenschaften bemerkt. Mästlin gab deswegen die Empfehlung, daß Kepler nach Abschluß seines Studiums in die österreichische Stadt Graz geschickt werden solle, um dort als Mathematiklehrer in der Domschule zu arbeiten. Die Mitglieder der theologischen Fakultät der Universität Tübingen waren auch nicht gerade unglücklich darüber, Kepler von seinen seelsorgerischen Ambitionen abzubringen, denn er hatte einen für ihren Geschmack allzu unabhängigen Geist gezeigt. Das Problem bestand in den Augen der Fakultätsmitglieder darin, daß Kepler, angefeuert von seinem Lehrer Mästlin, Interesse für das Kopernikanische System bekundete. Bei diesem System befand sich anstelle der Erde die Sonne im Mittelpunkt des Weltalls und diese Auffassung wurde von den frommen Männern mißbilligt. Also wurde Kepler trotz seines Protestes nach Graz geschickt, um dort mit seiner Arbeit als Lehrer zu beginnen.

Wie sich herausstellte, war seine neue Stelle nicht ganz so schlecht, wie er befürchtet hatte. Sein Blick fiel auf Barbara Müller von Mühlegg, eine junge Adlige, und er beschloß, um ihre Hand anzuhalten. Aber bevor er seinen Schwarm ehelichen konnte, bestand ihre Familie darauf, daß der Bräutigam seine adlige Abstammung beweisen solle. Kepler reiste zurück in seine Heimatstadt, um die erforderlichen Dokumente zu beschaffen. Das gelang ihm, aber als er einige Monate später nach Graz zurückkehrte, mußte er feststellen, daß einige Nebenbuhler Barbara fast davon überzeugt hatten, ihn zu vergessen. Es bedurfte einiger Anstrengungen seinerseits, sie erneut umzustimmen. Die Hochzeit fand schließlich am 9. Februar 1597 statt.

Die Lehrtätigkeit füllte Kepler nicht aus und er beschäftigte sich deswegen auch mit der Überarbeitung des Stadtkalenders. Diese Aufgabe bestand nicht nur darin, die Wochentage den Tagen des Monats zuzuordnen, sondern schloß auch astrologische Vorhersagen ein. Kepler sagte auch einige politische Ereignisse vorher, die sich später als zutreffend erweisen sollten – bei seinen Prognosen stützte er sich mehr auf den gesunden Menschenverstand als auf die Stellungen der Planeten. Er sagte auch einen eiskalten Winter vorher und gemäß zeitgenössischen Berichten wurde es tatsächlich so kalt, daß angeblich die Nasen der Menschen beim Schneuzen abfielen! Diese Prophezeiungen erhöhten sein Ansehen zwar unter den Städtern gewaltig, nicht aber unter der Mitgliedern der Fakultät und des Senats seiner Alma Mater. Ungeachtet der Tatsache, daß Kepler ein frommer Protestant war, hatte er die von Papst Gregor XIII. im Jahre 1582 eingeführte Kalenderreform verwendet. Der Lutherische Senat der Universität Tübingen verbarg sein Mißfallen nicht.

Dieses Unternehmen fachte Keplers Interesse an Astronomie erneut an und er befaßte sich mit der Anzahl der Planeten, mit ihren Größen und mit ihren Umlaufbahnen. Keplers religiöse Überzeugungen blieben jedoch unverrückbar und er suchte nach einer theologischen Erklärung für seine Fragen. Da Gott eine vollkommene Welt geschaffen hat, dachte Kepler, daß es möglich sein sollte, die geometrischen Prinzipien zu entdecken und zu verstehen, die das Weltall regieren. Nach reiflicher Überlegung meinte Kepler, daß er Gottes Prinzipien in den regulären oder regelmäßigen Körpern gefunden hatte. Die Schlüsselidee, so heißt es, sei ihm während einer seiner Unterrichtsstunden gekommen. Seine Erklärungen des Universums beruhten auf einem imaginären System von Würfeln, Kugeln und anderen Körpern, die sich seiner Meinung nach zwischen der Sonne und den Planeten befinden. Kepler schrieb seine Theorie auf und veröffentlichte sie in einem Buch mit dem Titel *Mysterium Cosmographicum*. Dieser Wälzer entschleierte keines der Geheimnisse des Planetensystems. Das konnte er auch nicht tun, da es keine solchen Körper gibt, die im Universum schweben. Aber der große dänische Astronom Tycho Brahe wurde auf das Buch aufmerksam.

Brahe wurde 1546 als erster Sohn einer adligen dänischen Familie geboren. Bereits vor seiner Geburt kam es zu Problemen, weil der Vater seinem Bruder, einem kinderlosen Vizeadmiral, versprochen hatte, ihm das Neugeborene, wenn es ein Junge werden sollte, zur Adoption zu überlassen. Aber als der Vater zum ersten Mal die Augen des süßen kleinen Babys sah, hielt er sich nicht mehr an sein Versprechen. Onkel Jørgen brachte dafür Verständnis auf, aber nachdem Herrn und Frau Brahe ein zweiter Sohn geboren wurde, dachte Jørgen, daß die Brahes keinen weiteren Bedarf für ihren Erstgeborenen hätten und kidnappte Tycho ohne größeres Aufheben. Der Vater hatte andere Vorstellungen und drohte damit, seinen Bruder zu töten. Er beruhigte sich erst, als er begriff, daß sein Sohn die große Erbschaft des kinderlosen Onkels in Aussicht hatte. Der Junge wurde zum Lateinunterricht geschickt, damit er später Rechtsanwalt werden und in den öffentlichen Dienst Dänemarks eintreten konnte. Aber im Alter von dreizehn Jahren wurde Tycho Zeuge eines Ereignisses, das seine Laufbahn bestimmen sollte: Er beobachtete eine partielle Sonnenfinsternis, die für diesen Tag vorausgesagt worden war. Der mit offenem Mund staunende Junge beschloß an Ort und Stelle, die Astronomie zu seinem Beruf zu machen. Aber zuerst mußte er sein Jurastudium in Leipzig beginnen. Sein heimliches Schwärmen für Astronomie ließ jedoch zu keinem Zeitpunkt nach.

Brahe begab sich dann nach Augsburg und schloß sich dort dem Klub der ortsansässigen Sterngucker an. Der junge Mann überzeugte seine neuen Amateurastronomiefreunde, daß sie exaktere Beobachtungen brauchten, und deswegen bestellte der Klub einen Sextanten, einen Apparat, mit dem ein geschickter Astronom die Position von Sternen bestimmen konnte. Der Sextant hatte einen Durchmesser von 12 Metern und entlang seines Gradbogens befanden sich ca. alle 1,5 Millimeter Einkerbungen, was einer Gradeinteilung von $1'$ entspricht ($1'$ ist der sechzigste Teil eines Grades; 360 Grad bilden einen Kreis). Das ermöglichte es, die Position von Himmelsobjekten mit einer beispiellosen Genauigkeit zu bestimmen.

Durch seine Erziehung als Kind aus begütertem Hause war Brahe leicht verhätschelt und hielt sich für den Besten und Klügsten. Eines Tages geriet er mit einem anderen Studenten in Streit darüber, wer der bessere Mathematiker sei, und man beschloß, die Frage ein für allemal nach guter teutonischer Sitte zu erledigen: durch ein Duell. Im Laufe dieser Auseinandersetzung wurde ein Teil von Brahes Nase gestutzt. Es sind keine Angaben darüber überliefert, welchen Körperteil, wenn überhaupt, sein Gegner verloren hat; somit fehlt der abschließende Beweis, wer der bessere Mathematiker war.

Sicher ist jedoch, daß Brahe ein begabter Erfinder astronomischer Instrumente war, und daß er sich im Umgang mit seiner Ausrüstung als gleichermaßen talentiert erwies. Er muß auch eine hohe Toleranzschwelle gegenüber Langeweile gehabt haben, da er es fertigbrachte, stundenlang in einem Observatorium zu sitzen und in die Sterne zu gucken. König Friedrich II. von

Dänemark, Förderer der Künste und der Wissenschaften, machte er Brahe ein beispielloses Angebot: Die malerische Insel Hven würde ihm zusammen mit einem Schloß und allen Annehmlichkeiten gehören, die sich ein Wissenschaftler nur wünschen konnte. Zum Besitztum gehörten eine Papiermühle und eine Druckerpresse, und alle Einwohner der Insel sollten Brahes Untertanen sein. Das Schloß hatte sogar einen eigenen kleinen Kerker, in dem unbotmäßige Bauern eingesperrt werden konnten. Brahe nahm das Angebot dankend an und begann, eine prächtige Sternwarte zu bauen, die er Uraniborg nannte.

Auch wenn der Meister seine Besucher gerne unterhielt und an vielen Abenden Partys und Feste gefeiert wurden, verbrachte Brahe während der nächsten zwanzig Jahre die meisten Nächte mit seinen Gehilfen im Observatorium, wo er die Bewegungen der Planeten verfolgte und aufzeichnete. Zuweilen maßen vier Teams von Beobachtern und Zeitmessern gleichzeitig ein und denselben Sachverhalt und reduzierten dadurch die Fehler auf ein Minimum. Brahe führte seine Messungen nicht nur mit einer beispiellosen Präzision durch, sondern auch – was ebenso wichtig ist – mit einer anhaltenden Kontinuität. Seine peinlich genau geführten Aufzeichnungen sollten der Schlüssel zu einem neuen Verständnis der Astronomie werden. Und dessen war er sich auch bewußt. Er hütete seine Datensammlung eifersüchtig wie einen Schatz und gestattete niemandem den Zugriff auf ihren Inhalt. Das Himmelssystem, das er sich vorstellte, sollte sowohl eine Verbesserung des Ptolemäischen Systems werden, in dem die Erde der Mittelpunkt des Universums ist, als auch eine Verbesserung des Kopernikanischen Systems, bei dem sich die Sonne im Mittelpunkt der kreisförmigen Umlaufbahnen der Planeten befindet. Brahe schlug ein System vor, das natürlich seinen Namen tragen sollte und bei dem die Erde ruht, die Sonne um die Erde kreist und alle Planeten um die Sonne kreisen.

Aber bevor er sein Ziel erreichte, brach der überhebliche Wissenschaftler einen Streit mit dem dänischen König vom Zaun. Offenbar war Brahe der Ruhm zu Kopf gestiegen und er entwickelte sich für die Einwohner der Insel Hven zu einem richtigen Tyrannen. Das zum Schloß gehörende Gefängnis trug zu seinem Sturz bei. Brahe nahm seine Strafbefugnis ernst und ließ einen aufsässigen Bauern und dessen Familie einsperren. Der arme Mann ging beim Obersten Zivilgericht Dänemarks in Berufung und die Richter erteilten Brahe die Anordnung, den Mann freizulassen – ein bemerkenswertes Beispiel für die Gleichheit vor dem Gesetz. Aber der selbstsichere Astronom tat nichts dergleichen und hielt den Mann weiter in Ketten. Zu dieser Zeit hatte jedoch König Christian IV. den Thron bestiegen und der neue König war dem eitlen und selbstgefälligen Astronomen gegenüber nicht mehr so wohlgesinnt wie sein Vorgänger. Der König hatte genug von den Eigenmächtigkeiten und senkte das Gehalt, das Brahe für seinen ruhigen Job erhielt. Das wiederum paßte Brahe nicht so recht und der zutiefst gekränkte Astronom packte seine Instrumente ein, nahm seine Familie und seine Aufzeichnungen mit und verließ Dänemark.

Brahe brauchte zwei Jahre, bis er eine neue Arbeit fand, aber 1599 hatte er Glück. Und was das für eine Arbeit war! Brahe wurde von Kaiser Rudolph II.

gebeten, „Kaiserlicher Mathematiker“ am Hof zu Prag zu werden. Zu den vielen Privilegien gehörte auch die Aussicht, einen Gehilfen – obgleich ohne Bezahlung – anzustellen, und Brahe erinnerte sich sofort an Kepler. Tatsächlich hatte der junge Lehrer gerade die Absicht, sich selbst auf die Jagd nach einer Stelle zu machen. Es war zu Problemen zwischen seiner Protestantischen Schule und der katholischen Stadt Graz gekommen. Alle Fakultätsmitglieder wurden gezwungen, eine eidliche Erklärung über ihr religiöses Bekenntnis zu unterzeichnen. Kepler – nicht willens, zu lügen –, erklärte, daß er Protestant sei und ganz genau wisse, daß man ihn wegen seiner Überzeugungen früher oder später aus Graz rausschmeißen würde. Fünf Tage nach seinem neunundzwanzigsten Geburtstag, am 1. Januar 1600, verließ Kepler die Stadt für ein halbes Jahr und ging nach Prag. Er kam im darauffolgenden Juni zurück, aber nur, um seine Sachen endgültig zu packen. Im September verließ er mit seiner Frau Barbara und seinem Kind die Stadt Graz für immer, um die Stelle eines mathematischen Gehilfen beim Kaiserlichen Mathematiker anzunehmen. Sein Gehalt war von seinem neuen Meister zu zahlen.

Die Zusammenarbeit zwischen dem Meister und seinem frischgebackenen Gehilfen erwies sich als nicht ganz einfach. Brahe übertrug Kepler die Aufgabe, die Bewegungen der Planeten zu berechnen, die sich, wie er bereits bemerkt hatte, nicht auf kreisförmigen Bahnen bewegen. Kepler sollte das auf der Grundlage von Brahes eigenen Beobachtungen der Sternpositionen tun, aber ohne vollen Zugang zu den Daten zu bekommen. Nur wenn der Meister dazu aufgelegt war, teilte er Auszüge und Bruchstücke aus seiner Datensammlung mit. Offensichtlich fürchtete er, daß ihn sein kluger Gehilfe übertreffen könnte. Und er hatte Recht, den listigen Gehilfen zu fürchten. „Tycho geizt sehr mit der Mitteilung seiner Beobachtungen. Aber mir wird erlaubt, sie täglich zu nutzen“, schrieb Kepler einem ehemaligen Lehrer und fügte hinzu, „wenn ich sie nur schnell genug abschreiben könnte!“

Um den frustrierten Kepler zu beschäftigen, setzte ihn Brahe auf seine eigenen Beobachtungen des Planeten Mars an, der die am wenigsten kreisförmige Umlaufbahn hatte. Kepler entdeckte bald, daß die Umlaufbahn des Mars eine Ellipse ist. Zum Glück für Kepler – nicht so für Brahe – endete die unfruchtbare Beziehung nach einem Jahr, als Brahe an einer Blaseninfektion starb. Die Krankheit soll Brahe getroffen haben, nachdem er sich an einer besonders üppigen Mahlzeit gütlich getan hatte. Kaiser Rudolph II. verlor keine Zeit mit Keplers Ernennung zum Kaiserlichen Mathematiker und der ehemalige Gehilfe erbte den von Brahe so hochgeschätzten Besitz, die Aufzeichnungen. Das Wort *erbte* ist vielleicht eine Idee zu positiv. Möglicherweise ist *entwendete* eine zutreffendere Beschreibung der Handlungsweise, mit der Kepler von den Aufzeichnungen Besitz ergriff, bevor Brahes Erben darauf zugreifen konnten.

Leider brachte der hohe Titel eines Kaiserlichen Mathematikers keine entsprechende finanzielle Vergütung, da die kaiserliche Schatzkammer so gut wie leer war. Dennoch arbeitete Kepler Tag und Nacht an einer Erklärung des Planetensystems und veröffentlichte schließlich 1609 seine *Astronomia nova*. Aber die harte Arbeit forderte ihren Tribut und Kepler litt bald an verschiedenen Krankheiten und Anfällen von Depressionen. 1612 starben seine Frau und sein Lieblingssohn an Fieber und Pocken. Zermürbt vom Kummer über den Tod seines Sohns hatte er sich nicht allzu sehr um seine Frau gekümmert, als sie noch lebte. Kepler wollte Prag verlassen, das zu einem Kessel der religiösen und politischen Auseinandersetzungen geworden war. Aber er war gezwungen, zu bleiben, und erst als sein Förderer Kaiser Rudolph II. ein paar Monate später starb, erhielt er die Erlaubnis, fortzugehen.

Kepler zog nach Österreich zurück, ließ sich in Linz nieder und nahm sich eine neue Frau, Susanna Reuttinger. Für die nächsten vierzehn Jahre fand er ausreichend Ruhe in Linz, um seine Arbeit über astronomische Tafeln fortzusetzen und einige seiner fundamentalen Werke zu veröffentlichen. Aber das Leben hatte nicht nur seine schönen Seiten. Kepler wurde von religiösen Zweifeln geplagt und als er sich einem Geistlichen anvertraute, verlor der gute Mann keine Zeit und hinterbrachte Keplers Bedenken den zuständigen Behörden. Dem Astronomen wurde beschieden, er solle seine theologischen Spekulationen einstellen und sich auf die Mathematik konzentrieren.

Danach brach über ihn – wie ein Blitz aus heiterem Himmel – eine weitere Katastrophe herein: Keplers Mutter Katharina wurde als Hexe angeklagt. Bei ihrem nicht gerade liebenswürdigen Temperament wären Anschuldigungen wegen ihres bösen Naturells keineswegs überraschend gewesen, aber eine Hexe? Das schien sogar für eine Frau mit einem so außergewöhnlich widerlichen Charakter leicht übertrieben zu sein, denn ein Schuldspruch hätte das Todesurteil bedeutet. Katharinas Tante hatte dieses Schicksal ein paar Jahre vorher erlitten. Was hatte sich nun wirklich zugetragen? Katharina, die gerne alle Arten von Kräutern mit angeblichen Heilkräften sammelte, war mit einem alten Weib in Streit geraten, mit einer gewissen Frau Reinhold, die vorher ihre beste Freundin war. Diese Frau, die Katharina in puncto Bosheit ebenbürtig war, beschloß, es ihr heimzuzahlen. Frau Reinhold beschuldigte Katharina, ihr einen Trank verabreicht zu haben, der depressive Anfälle auslöste. Auf einmal erinnerten sich auch andere Einwohner, daß sie nach dem Genuß von Katharinas Kräutermix ebenfalls erkrankt waren – die Hexenjagd konnte beginnen.

Kepler kämpfte sechs schwere Jahre lang für den Freispruch seiner Mutter. Katharina wurde von den Behörden eingekerkert und Kepler fand sie im Gefängnis von Güglingen, Hände und Füße gefesselt und Tag und Nacht von zwei Wächtern bewacht. Da Kepler die Gehälter der Wächter bezahlen mußte, schrieb er dem Gericht einen Brief und fragte an, ob denn nicht *ein* Wächter zur Bewachung einer dreiundsiebzigjährigen Frau ausreichen würde – dies um so mehr, da sie ja auch noch an die Wand gekettet war.

Wider Erwarten schaffte es Kepler, für seine Mutter einen Freispruch zu erwirken. Katharina trug aber auch selbst wesentlich zu ihrer Freilassung bei. Die allgemein übliche Befragungsmethode der damaligen Zeit bestand darin, ein Geständnis durch Folter herauszuholen. In Katharinas Fall machte das Gericht eine Ausnahme. Man beschloß, die verdächtigte Hexe zur Folterkammer zu führen und ihr die Werkzeuge zu zeigen, mit denen sie gefoltert würde, falls sie dem Vernehmer nicht erzählte, was dieser hören wollte. Die guten Männer glaubten, daß die Frau bei der bloßen Ansicht von Zangen, Flaschenzügen, Ketten, rotglühenden Eisenstangen und anderen Folterwerkzeugen alle Missetaten zugeben würde. Jede geringere Frau wäre einer derart sanften Überzeugungskunst erlegen, nicht so diese störrische Dame. Sie legte kein Geständnis ab. Der zunehmend frustrierte Folterknecht schleppte immer mehr unheimlich aussehende Werkzeuge heran, aber vergeblich. Schließlich fiel die alte Frau in Ohnmacht und der arme Folterknecht gab auf. Gestützt auf derart schlüssige Beweise erklärte das Gericht Katharina Kepler im Oktober 1621 für unschuldig. Aber die alte Frau sollte ihren Sieg nicht lange genießen können, denn ein halbes Jahr später starb sie.

Kepler schaffte es, die Arbeit an den astronomischen Tafeln abzuschließen. Anschließend reiste er nach Prag weiter, wo er sein Werk, das ordnungsgemäß „Seiner Exzellenz“ gewidmet war, am Hof vorstellte. Der Kaiser zeigte sich äußerst zufrieden und gewährte Kepler das außergewöhnliche Honorar von 4000 Gulden. Diese großzügige Geste kostete Majestät nichts und war auch für Kepler nur von geringem Nutzen, denn der Betrag wurde lediglich zu der Summe addiert, die der Kaiser seinem Kaiserlichen Mathematiker ohnehin bereits schuldete.

Verzweifelt hielt Kepler Ausschau nach Geldmitteln und ritt deswegen 500 Kilometer nach Regensburg. Er hoffte, dort die ausstehenden Schulden des Kaisers beim Reichstag einzutreiben, der Versammlung deutscher Würdenträger, die das Versprechen des Kaisers respektieren sollten. Die Reise dauerte fast vier Wochen. Entsetzliches Herbstwetter machte Kepler zu schaffen. Krank und mittellos kam er schließlich in Regensburg an und fand dort Obdach im Haus eines Freundes. Aber seine letzte Atempause sollte kaum eine Woche dauern. Am 15. November 1630, sechs Wochen vor seinem neunundfünfzigsten Geburtstag, starb Kepler, der Prinz der Astronomie.

Keplers Vermächtnis schloß viele bedeutende Leistungen ein. Sein größter Triumph war jedoch, das Kopernikanische System in seine endgültige Form zu bringen. Wie bereits gesagt, glaubte Kopernikus, daß sich die Planeten des Sonnensystems auf kreisförmigen Bahnen um die Sonne drehen. Kepler studierte die mit peinlicher Sorgfalt zusammengetragenen Beobachtungsdaten, die er geerbt oder gestibitzt hatte – die Interpretation hängt davon ab, auf welcher Seite man steht – und erkannte, daß die Planetenbahnen in Wirklichkeit Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Das war das sogenannte erste Gesetz der Planetenbewegung. Er formulierte noch zwei weitere Gesetze: Die Verbindungslinie Planet-Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen und die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer Abstände von der Sonne. Er erzielte diese Ergebnisse einfach dadurch, daß er sich die Zahlenreihen – wie auch die Planeten selbst – so lange ansah, bis er hinter den Zahlen ein Muster erkannte.

Aber Kepler beschäftigte sich nicht nur mit den großen Fragen zu den Himmelskörpern, sondern zeigte auch Interesse für die kleineren Werke der Natur. Und hier liegt seine Bedeutung für unsere Untersuchungen. Die Keplersche Vermutung ist Bestandteil des kleinen Büchleins *Vom sechseckigen Schnee*,