

utb.

Hans-Dieter Sill

Grundkurs Mathematik- didaktik



Standard
Wissen
Lehramt

utb 5008



Eine Arbeitsgemeinschaft der Verlage

Böhlau Verlag · Wien · Köln · Weimar
Verlag Barbara Budrich · Opladen · Toronto
facultas · Wien
Wilhelm Fink · Paderborn
A. Francke Verlag · Tübingen
Haupt Verlag · Bern
Verlag Julius Klinkhardt · Bad Heilbrunn
Mohr Siebeck · Tübingen
Ernst Reinhardt Verlag · München
Ferdinand Schöningh · Paderborn
Eugen Ulmer Verlag · Stuttgart
UVK Verlag · München
Vandenhoeck & Ruprecht · Göttingen
Waxmann · Münster · New York
wbv Publikation · Bielefeld

StandardWissen Lehramt

- Mündliche Kommunikation in der Schule** von R.W. Wagner (utb 2810)
- Lese- und Rechtschreiberwerb** von P. Marx (utb 2946)
- Sprachdidaktik Deutsch** von J. Ossner (utb 2807)
- Texte schreiben** von M. Fix (utb 2890)
- Orthographie** von J. Ossner (utb 3329)
- Texte lesen**, 2. Auflage, von C. Garbe/K. Holle/T. Jesch (utb 3110)
- Teaching English: Task-Supported Language Learning** von A. Müller-Hartmann/M. Schocker-v. Ditzfurth (utb 3336)
- Teaching English: Computer-assisted Language Learning** von K. Heim/M. Ritter (utb 3334)
- Deutsch als Zweitsprache**, 3. Auflage, von G. Kniffka/G. Siebert-Ott (utb 2891)
- Sprachbetrachtung und Grammatikunterricht** von U. Bredel (utb 2890)
- Psychologie des Unterrichts** von M. Kunter/U. Trautwein (utb 3895)
- Teaching English with Films** von E. Thaler (utb 3946)
- Sprachwissenschaft für das Lehramt** von J. Ossner/H. Zinsmeister (utb 4083)
- Lernen mit Medien** von G. Nieding/P. Ohler/G.D. Rey (utb 4001)
- Literaturdidaktik Deutsch** von C. Dawidowski (utb 4419)
- Fachsprachenvermittlung im Unterricht** von G. Kniffka/T. Roelcke (utb 4094)
- Integrative Deutschdidaktik** von U. Bredel/I. Pieper (utb 4101)
- Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen** von W. Schneider/P. Küspert/K. Krajewski (utb 3899)
- Erzählende Kinder- und Jugendliteratur im Deutschunterricht** von K. Spinner/J. Standke (utb 8653)
- Interkulturalität und Schule** von K. Göbel/P. Buchwald (utb 4642)
- Emotion, Motivation und selbstreguliertes Lernen**, 2. Auflage, von T. Götz (utb 3481)
- Der Roman im Deutschunterricht** von S. Ehlers (utb 4744)
- Kinder- und Jugendliteratur**, 3. Auflage, von G. Weinkauff/G. von Glasenapp (utb 3345)

Hans-Dieter Sill

Grundkurs Mathematikdidaktik

Ferdinand Schöningh

Der Autor:

Hans-Dieter Sill, Dr. paed. habil. et Dr. rer. nat., ist Professor für Didaktik des Mathematikunterrichts an der Universität Rostock. Er bildet seit 1980 Studierende für Sekundarstufenlehrämter aus. Im Rahmen Schulpraktischer Studien hat er zahlreiche Unterrichtsstunden von Studierenden betreut. Er führte viele Fortbildungsveranstaltungen und Projekte mit Mathematiklehrkräften durch. Seine Forschungsschwerpunkte sind die Curriculumforschung, das Arbeiten mit offenen Aufgaben sowie der Stochastikunterricht. Er ist Herausgeber einer Schulbuchreihe zum Mathematikunterricht.

Online-Angebote oder elektronische Ausgaben sind erhältlich unter www.utb-shop.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2019 Verlag Ferdinand Schöningh, ein Imprint der Brill-Gruppe
(Koninklijke Brill NV, Leiden, Niederlande; Brill USA Inc., Boston MA, USA;
Brill Asia Pte Ltd, Singapore; Brill Deutschland GmbH, Paderborn, Deutschland)

Internet: www.schoeningh.de

Das Werk, einschließlich aller seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Herstellung: Brill Deutschland GmbH, Paderborn
Einbandgestaltung: Atelier Reichert, Stuttgart

UTB-Band-Nr: 5008

E-Book ISBN 978-3-8385-5008-4

ISBN der Printausgabe 978-3-8252-5008-9

Vorwort zur Reihe

StandardWissen Lehramt – Studienbücher für die Praxis

Wie das gesamte Bildungswesen wird sich auch die künftige Lehramtsausbildung an Kompetenzen und Standards orientieren. Damit rückt die Frage in den Vordergrund, was Lehrkräfte wissen und können müssen, um ihre berufliche Praxis erfolgreich zu bewältigen. Das Spektrum reicht von fachlichen Fähigkeiten über Diagnosekompetenzen bis hin zu pädagogisch-psychologischem Wissen, um Lehren als Unterstützung zur Selbsthilfe und Lernen als eigenaktiven Prozess fassen zu können.

Kompetenzen werden nicht in einem Zug erworben; Lehrerbildung umfasst nicht nur das Studium an einer Hochschule, sondern ebenso das Referendariat und die Berufsphase. Die Reihe StandardWissen Lehramt bei UTB bietet daher Lehramtsstudierenden, Referendaren, Lehrern in der Berufseinstiegsphase und Fortbildungsteilnehmern jenes wissenschaftlich abgesicherte Know-How, das sie im Rahmen einer neu orientierten Ausbildung wie auch später in der Schule benötigen. Fachdidaktische und pädagogisch-psychologische Themen werden gleichermaßen in dieser Buchreihe vertreten sein – einer Basisbibliothek für alle Lehramtsstudierenden, Referendare, Lehrerinnen und Lehrer.

Inhaltsverzeichnis

Seite	13	Vorwort
	17	1 DIDAKTIK DES MATHEMATIKUNTERRICHTS – DIE BERUFSWISSENSCHAFT VON MATHEMATIKLEHRKRÄFTEN
	18	1.1 Bezüge zu anderen Wissenschaften
	21	1.2 Gegenstände der Mathematikdidaktik
	27	2 FUNKTIONEN UND ZIELE DES MATHEMATIKUNTERRICHTS
	27	2.1 Funktionen des Mathematikunterrichts
	32	2.2 Ziele des Mathematikunterrichts
	32	2.2.1 Zum Zielbegriff
	35	2.2.2 Zur Strukturierung von Zielen des Mathematikunterrichts
	40	2.2.3 Weitere Strukturierungsmöglichkeiten von Zielen des Mathematikunterrichts
	42	2.2.4 Planungsebenen
	47	3 AUFGABEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT
	47	3.1 Allgemeine Probleme
	50	3.2 Arten mathematischer Schüleraufgaben
	56	3.3 Differenziertes Arbeiten mit Aufgaben
	56	3.3.1 Zur inneren Differenzierung des Unterrichts
	58	3.3.2 Differenziertes Arbeiten mit Aufgaben
	59	3.4 Problemhafte Aufgaben
	59	3.4.1 Allgemeine Bemerkungen
	60	3.4.2 Grundlagen aus der Heuristik
	65	4 MOTIVIERUNG UND ZIELORIENTIERUNG
	65	4.1 Grundlagen der Motivierung und Zielorientierung
	65	4.1.1 Motivierung

INHALTSVERZEICHNIS

69	4.1.2	Zielorientierung
72	4.2	Möglichkeiten der Motivierung und Zielorientierung durch Angabe von Gründen und Aufwerfen von Problemen
76	4.3	Motivierung mit Elementen der Unterhaltungsmathematik
77	4.4	Möglichkeiten zur Langzeitmotivierung
79	4.5	Historische Betrachtungen im Mathematikunterricht
83	4.6	Wiederholung und Reaktivierung
85	5	ANEIGNEN VON MATHEMATISCHEN BEGRIFFEN
85	5.1	Vorbemerkungen
87	5.2	Grundlagen aus anderen Wissenschaften
94	5.3	Grundlagen der Erarbeitung und Festigung von Begriffen
94	5.3.1	Begriffsarten
95	5.3.2	Definieren von Begriffen
98	5.3.3	Planung von Lernprozessen zur Aneignung von Begriffen
99	5.4	Vorgehensweisen zum Erarbeiten von Begriffen
100	5.4.1	Bilden von Beispielen und Gegenbeispielen
101	5.4.2	Induktives Vorgehen
105	5.4.3	Konstruktives Vorgehen
108	5.4.4	Deduktives Vorgehen
109	5.4.5	Hinweise zum Einsatz der Vorgehensweisen
111	5.5	Möglichkeiten zum Festigen und Vertiefen von Begriffen
113	5.5.1	Identifizieren von Begriffen
115	5.5.2	Realisieren von Begriffen
116	5.5.3	Weitere Möglichkeiten zum Festigen und Vertiefen von Begriffen
119	6	ANEIGNEN VON MATHEMATISCHEN ZUSAMMENHÄNGEN
119	6.1	Theoretische Grundlagen
119	6.1.1	Arten von mathematischen Zusammenhängen
121	6.1.2	Grundlagen aus der Logik

123	6.2	Ziele und Möglichkeiten der Erarbeitung von Zusammenhängen
123	6.2.1	Ziele des selbstständigen Findens eines Zusammenhangs
124	6.2.2	Möglichkeiten des Findens von Zusammenhängen
130	6.3	Festigen von Zusammenhängen
135	7	AUSBILDEN VON FERTIGKEITEN
136	7.1	Gedächtnis- und lernpsychologische Grundlagen der Ausbildung von Fertigkeiten
145	7.2	Gestaltung der Phasen zur Ausbildung von Fertigkeiten
145	7.2.1	Vorbereitende Überlegungen der Lehrkraft
148	7.2.2	Phasen der Ausbildung von Fertigkeiten
153	8	GESTALTEN VON ÜBUNGSPROZESSEN
153	8.1	Bedeutung, Formen und Prinzipien der Übungsgestaltung
160	8.2	Möglichkeiten zur Variation des Anforderungsniveaus
164	8.3	Möglichkeiten zur vielseitigen Gestaltung von Übungen
169	9	LÖSEN VON SACHAUFGABEN
169	9.1	Vorbemerkungen
169	9.1.1	Zum Anwenden im Mathematikunterricht
171	9.1.2	Zum Modellieren im Mathematikunterricht
173	9.1.3	Funktionen der Behandlung von Sachaufgaben
174	9.1.4	Probleme von Lernenden beim Bearbeiten von Sachaufgaben
176	9.2	Hauptschritte einer heuristischen Orientierung zum Bearbeiten von Sachaufgaben
177	9.3	Möglichkeiten zum Erfassen und Analysieren des Sachverhalts
177	9.3.1	Erfassen des Sachverhalts
180	9.3.2	Analysieren des Sachverhalts
185	9.4	Anwenden heuristischer Vorgehensweisen zum Finden von Lösungsideen bei Sachaufgaben

INHALTSVERZEICHNIS

195	9.5	Orientierungen zur Durchführung des Lösungsplans und Kontrolle der Lösung
195	9.5.1	Durchführung des Lösungsplans
196	9.5.2	Kontrolle der Lösung und des Lösungsweges
197	9.5.3	Weitere Probleme
199	10	LÖSEN PROBLEMHAFTER FORMALER BESTIMMUNGSAUFGABEN
199	10.1	Allgemeine Orientierungen
201	10.2	Algorithmisch lösbare Aufgaben zum Reaktivierbaren Wissen und Können
205	10.3	Lösen von formalen Bestimmungsaufgaben, die nicht algorithmisch lösbar sind
209	11	ARGUMENTIEREN, BEGRÜNDEN UND BEWEISEN
209	11.1	Theoretische und empirische Grundlagen
209	11.1.1	Beweise in der Mathematik
210	11.1.2	Zu den Begriffen <i>Argumentieren</i> , <i>Begründen</i> und <i>Beweisen</i>
211	11.1.3	Beweisleistungen von Lernenden und Lehrenden und mögliche Ursachen
214	11.2	Vorschläge zum Umgang mit Begründungen und Beweisen im Mathematikunterricht
219	11.3	Suchen nach Begründungen
220	11.3.1	Begründungen beim Festigen von Begriffen
221	11.3.2	Begründungen bei Übungen zur Fertigkeitentwicklung
222	11.3.3	Begründungen beim Bearbeiten von Sachaufgaben
224	11.4	Bearbeiten von Beweisaufgaben
224	11.4.1	Vorbemerkungen
227	11.4.2	Möglichkeiten für nichtdeduktive Argumentationen
229	11.4.3	Heuristische Vorgehensweisen zum Finden eines mathematischen Beweises

237	12	Entwicklung des Wissens und Könnens im Arbeiten mit Zahlen und Größen
238	12.1	Teilprozesse
241	12.2	Arbeiten mit Größen
243	12.3	Arbeiten mit Näherungswerten und sinnvoller Genauigkeit
248	12.4	Lösen von Prozentaufgaben
248	12.4.1	Aspekte des Prozentbegriffs
250	12.4.2	Methoden zum Lösen von Prozentaufgaben
252	12.5	Rechnen mit rationalen Zahlen
257	13	ENTWICKLUNG DES WISSENS UND KÖNNENS IM ARBEITEN MIT VARIABLEN, GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN
258	13.1	Teilprozesse und Phasen der Entwicklung
261	13.2	Aspekte von Grundbegriffen der Algebra
267	13.3	Inhaltliches Lösen von Gleichungen und Ungleichungen
271	14	ENTWICKLUNG DES WISSENS UND KÖNNENS IM ARBEITEN MIT FUNKTIONEN
271	14.1	Teilprozesse der Entwicklung
276	14.2	Phasen der Entwicklung des Wissens und Könnens im Arbeiten mit Funktionen
280	14.3	Bedeutungsaspekte des Funktionsbegriffs
282	14.4	Zur Behandlung der Proportionalität
282	14.4.1	Die direkte Proportionalität
285	14.4.2	Zur umgekehrten Proportionalität

INHALTSVERZEICHNIS

287	15	ENTWICKLUNG DES GEOMETRISCHEN WISSENS UND KÖNNENS
288	15.1	Teilprozesse und Phasen der Entwicklung
291	15.2	Zum Können im Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben
298	15.3	Zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
301	16	ENTWICKLUNG DES STOCHASTISCHEN WISSENS UND KÖNNENS
302	16.1	Teilprozesse der Entwicklung
305	16.2	Prozessbetrachtung stochastischer Erscheinungen
310	16.3	Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs
315	17	HINWEISE ZUR PLANUNG UND GESTALTUNG VON UNTERRICHTSSTUNDEN
315	17.1	Hinweise zur Planung von Unterrichtsstunden
315	17.1.1	Generelle Hinweise
318	17.1.2	Heuristische Orientierungen zur Planung einer Unterrichtsstunde
321	17.1.3	Hinweise zur schriftlichen Planung einer Stunde
324	17.2	Erfahrungen mit ersten Unterrichtsversuchen
324	17.2.1	Generelle Erfahrungen
326	17.2.2	Stolpersteine
331	18	LITERATURVERZEICHNIS
341		Verzeichnis der Unterrichtsbeispiele
341		Zahlen und Größen
342		Algebra
342		Funktionen
343		Geometrie
344		Stochastik
345		Register

Vorwort

Das Buch wendet sich vor allem an Studierende und Referendare von Lehrämtern für die Sekundarstufen I und II sowie an Seiten- und Quereinsteiger. Es ist ebenfalls zur Reaktivierung von Grundlagen der Didaktik des Mathematikunterrichts für Lehrkräfte, insbesondere im Rahmen von Lehrerfortbildungen, geeignet. Weiterhin soll das Buch auch zu Diskussionen in der Fachdidaktik anregen.

Das Lehrbuch basiert zu großen Teilen auf meiner Vorlesung zu den Grundlagen der Didaktik des Mathematikunterrichts, die ich seit 1985 bis zum Wintersemester 2016/17 im Umfang von zwei Semesterwochenstunden an der damaligen Pädagogischen Hochschule in Güstrow und ab 1992 an der Universität Rostock vor Lehramtsstudierenden für die Sekundarstufen I und II gehalten habe. Bestandteil des Buchs sind weiterhin Themen aus einem Hauptseminar zu ausgewählten Fragen der Didaktik des Mathematikunterrichts. Weiterhin fließen in das Buch Ergebnisse von Projekten mit Mathematiklehrkräften aus Mecklenburg-Vorpommern ein, die auf der Internetplattform www.mathe-mv.de veröffentlicht wurden.

Seit 1980 leitete ich regelmäßig Schulpraktische Übungen, in denen die Studierenden Unterrichtsstunden vorbereiten, durchführen und auswerten. Dabei geht es neben vielen anderen Dingen auch um die Anwendung von Erkenntnissen aus der theoretischen Ausbildung auf konkrete Fragen der Unterrichtsgestaltung. In solchen Situationen erweist sich, inwieweit die vermittelten theoretischen Grundlagen einen konstruktiven Charakter haben, worin für mich ein entscheidendes Qualitätskriterium einer professionellen Lehrerbildung besteht. Diese Erfahrungen sowie die Diskussionen mit meinen Kolleginnen Dr. Christine Sikora, Viola Mendler und Petra Lämmel, die selbst aktive Lehrerinnen waren bzw. sind, haben zu einer ständigen Veränderung von Strukturen und Inhalten der Vorlesung geführt.

Die konkreten Unterrichtsvorschläge, die dieses Lehrbuch enthält, sind auch ein Ergebnis meiner Arbeit bei der Herausgabe einer neuen Lehrbuchreihe für den Mathematikunterricht (Sill 2002, Sill 2003b, Sill 2003a, Sill 2004, Sill 2006, Sill 2008a), wozu ich eine große Reihe vorhandener Lehrbücher gesichtet und mit einer Gruppe erfahrener Mathematiklehrkräfte als Autoren zusammengearbeitet habe.

Viele Elemente meiner Vorlesung basieren auf den Erkenntnissen und Erfahrungen meiner Vorgänger als Lehrstuhlinhaber. Dies waren Prof. Dr. Karl Claus, Dr. Karl Rohn und Dr. Horst Thamm, die damit auch Anteil an diesem Buch haben.

Das Konzept der Vorlesung und der Seminare entstand in einer Zeit der einphasigen Lehrerausbildung. Daraus ergab sich der Anspruch einer möglichst engen Verbindung von theoretischen Grundlagen und konkreten Orientierungen für die Unterrichtsgestaltung. Durch das Fortbestehen der Schulpraktischen Übungen in unserem Bundesland bin ich von diesem Anspruch auch in den weiteren Jahren nicht mehr abgerückt. Durch die gegenwärtige, teilweise erhebliche Ausdehnung von Schulpraktika in der ersten Phase der Lehrerbildung hat sich das Festhalten an dem Anspruch langfristig als richtig erwiesen.

Das **erste Kapitel** beschäftigt sich mit dem Gegenstand und den Aufgaben der Mathematikdidaktik als Wissenschaftsdisziplin und Berufswissenschaft und stellt Bezüge zu Nachbarwissenschaften her.

Im **zweiten Kapitel** wird versucht, die Frage zu beantworten, wozu Mathematik in der Art und dem Umfang unterrichtet wird. Dazu werden die Funktionen des Mathematikunterrichts in unterschiedlichen Bezugssystemen beschrieben. Weiterhin werden der Begriff *Ziel* im engeren Sinne definiert und das Rostocker Modell der Strukturierung von Unterrichtszielen vorgestellt.

Das **dritte Kapitel** ist dem Arbeiten mit Aufgaben im Mathematikunterricht als dem wichtigsten Mittel des Unterrichts gewidmet. Weiterhin werden Elemente der Heuristik vorgestellt, die für das selbstständige Lösen problemhafter mathematischer Aufgaben von Bedeutung sind.

Im **vierten Kapitel** werden Ergebnisse erziehungswissenschaftlicher Forschungen für den Mathematikunterricht spezifiziert. Insbesondere geht es um Motivierung, Zielorientierung und Reaktivierung im Mathematikunterricht.

In den **Kapiteln 5 bis 11** werden ausgehend von theoretischen Grundlagen aus anderen Disziplinen konkrete Vorschläge zur Gestaltung typischer Lernprozesse gemacht. Dazu gehören die Erarbeitung und Festigung von mathematischen Begriffen und Zusammenhängen, die Ausbildung von Fertigkeiten, die Gestaltung von Übungen sowie das Lösen von Sachaufgaben und wei-

teren problemhaften Aufgaben sowie die Befähigung zum Begründen und Beweisen.

Nach dieser Betrachtung des Mathematikunterrichts quer durch alle Themengebiete erfolgt dann in den **Kapiteln 12 bis 16** eine Längsbetrachtung entsprechend den Hauptprozessen der Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens, wobei aus Umfangsgründen der Schwerpunkt auf der Sekundarstufe I liegt.

Im **17. Kapitel** stelle ich, ausgehend von meinen langjährigen Erfahrungen mit Studierenden in Schulpraktischen Übungen, einige Empfehlungen für die Planung und Gestaltung von Unterrichtsstunden zusammen, die auf typische Probleme und Fehler von Anfängern im Lehrerberuf hinweisen sollen.

Ein Hauptanliegen des Lehrbuchs ist es, Studierenden und Referendaren Orientierungen für die Gestaltung eines erfolgreichen lehrerzentrierten Unterrichts zu geben. Hilbert Meyer stellte in Auswertung zahlreicher internationaler empirischer Untersuchungen zu Schülerleistungen bereits 2005 fest, dass lehrerzentrierter (vorrangig frontaler) Unterricht erfolgreicher beim fachlichen Lernen ist, während offener Unterricht erfolgreicher bei der Vermittlung von Methoden- und Sozialkompetenzen ist (Meyer 2005, S. 162). Dies wurde 2008 durch die Hattie-Studie erneut bestätigt (Hattie 2015). Lehrerzentrierter Unterricht bedeutet aber nicht, dass das Denken und Handeln der Schüler nicht im Fokus des Lehrenden liegt, im Gegenteil: Das vorausschauende Nachdenken über die notwendigen und möglichen geistigen und manuellen Tätigkeiten der Schüler beim Lösen der Aufgaben ist eine wesentliche Voraussetzung für erfolgreichen lehrerzentrierten Unterricht. Die Beherrschung dieser Unterrichtsform ist wiederum eine notwendige Bedingung für die noch anspruchsvollere Gestaltung offener Unterrichtsformen. Zu diesen Unterrichtsformen werden in diesem Lehrbuch nur wenige Hinweise gegeben, da längere Ausführungen den Umfang sprengen würden. Die Befähigung zum Umgang mit diesen Formen und Methoden sollte erst in späteren Phasen der Entwicklung des pädagogischen Könnens zielgerichtet in Angriff genommen werden.

Ein Problem für ein kurzgefasstes Lehrbuch der Mathematikdidaktik ist die gegenwärtig große Vielfalt und Breite in den Bedeutungen zahlreicher Grundbegriffe. Die in diesem Buch verwendeten Begriffsbildungen folgen dem „Minimalprinzip“ eines

möglichst geringen Umfangs zur leichteren Verständigung und Abgrenzung von anderen Bedeutungen.

Wenn in diesem Buch die Personenbezeichnungen in maskuliner Form wie „Lehrer“, „Schüler“ oder „Studenten“ verwendet werden, sind immer beide Geschlechter gemeint.

Ich danke meiner Kollegin Dr. Christine Sikora für die gründliche Durchsicht des Manuskripts und die zahlreichen Hinweise für Verbesserungen.

1 Didaktik des Mathematikunterrichts – Die Berufswissenschaft von Mathematiklehrkräften

Vertreter der Wissenschaft Didaktik des Mathematikunterrichts begleiten angehende und tätige Mathematiklehrer in ihrer gesamten Ausbildung und Tätigkeit. Sie sind die Experten für die Gesamtheit der beruflichen Anforderungen bei der Planung und Durchführung von Mathematikunterricht. Auf dieser Grundlage beteiligen sie sich an der Entwicklung von Curricula für die fachliche und fachdidaktische Ausbildung in Lehramtsstudiengängen in der ersten Phase. Die wissenschaftliche Begleitung dieser und anderer Aktivitäten auf dem Gebiet der Lehreraus- und Fortbildung ist Teil der wissenschaftlichen Arbeiten auf dem Gebiet der Didaktik des Mathematikunterrichts und wird als Lehrerbildungsforschung bezeichnet. Die Didaktik des Mathematikunterrichts ist in dieser Hinsicht eine Berufswissenschaft für den Beruf einer Mathematiklehrperson. Eine Berufswissenschaft erforscht die Zusammenhänge von „Berufspraxis, Berufstheorie, Facharbeit, Lehrplänen, Berufsbildern, u. a. (...), um zu Erkenntnissen zu gelangen, die für die Gestaltung der Berufsbildung von Bedeutung sind“ (Becker und Spöttl 2015, S. 20). Sie leistet „Beiträge zur Ausgestaltung der Berufsbildung und universitären Fachrichtungen.“

Berufswissenschaft

Die Didaktik des Mathematikunterrichts ist aber auch Berufswissenschaft im weiteren Sinne. Da sie sich mit dem Lernen von Mathematik in Unterrichtsprozessen beschäftigt, beteiligen sich viele Didaktikerinnen und Didaktiker als Experten an der Entwicklung von Schullehrplänen, Schulbüchern und anderen Unterrichtsmaterialien. Sie arbeiten oft eng mit Vertretern der zweiten Phase, dem Referendariat, zusammen und führen Fortbildungsveranstaltungen in der dritten Phase der Lehrerbildung, der Berufstätigkeit, durch.

Im pädagogischen Können einer Mathematiklehrkraft ist ihr didaktisches Wissen und Können ein wesentlicher Faktor. Weitere bedeutsame Faktoren sind ihr fachliches Wissen und Können, insbesondere in der Schulmathematik, ihr pädagogisch-psychologisches Wissen und Können, ihre Einstellung zu Kindern und die individuellen Eigenschaften, die eine Lehrerpersönlichkeit ausmachen. Um das Zusammenwirken dieser Faktoren in vereinfachter, „mathematisierter“ Form zu beschreiben ist weniger das

Modell einer Summe, sondern eher das eines Produkts geeignet. Wenn einer der Faktoren gering ausgeprägt ist, lässt sich dies kaum durch andere kompensieren und wirkt sich in hohem Maße negativ auf das Gesamtsystem aus.

1.1 Bezüge zu anderen Wissenschaften

Verhältnis zur
Fachwissenschaft

Das Verhältnis der Didaktik des Mathematikunterrichts zur Fachwissenschaft Mathematik ist vielschichtig und oft mit Missverständnissen verbunden.

Als ein Hauptziel der Didaktik des Mathematikunterrichts wird manchmal die „didaktische Vereinfachung“ bzw. „didaktische Reduktion“ der Fachwissenschaft Mathematik angesehen. Diese Auffassung ist in mehrfacher Hinsicht problematisch. Die im Mathematikunterricht behandelten mathematischen Begriffe, Sätze und Verfahren können nicht „vereinfacht“ werden, wenn die Wissenschaftlichkeit des Mathematikunterrichts nicht verletzt werden soll. So entwickeln sich zwar zentrale Begriffe wie etwa der Funktionsbegriff stufenweise im Kopf der Schülerinnen und Schüler, aber am Ende der Entwicklung nach Abschluss der Schule sollte ein reichhaltiges System von Gedanken zum Funktionsbegriff bei den Lernenden ausgebildet sein. Über die formale mathematische Definition des Funktionsbegriffs hinaus sollte dieses System auch zahlreiche inhaltliche Aspekte des Begriffs enthalten (vgl. Kap. 14.3). Weiterhin ist zu fragen, was bei diesen Formulierungen mit dem Begriff *didaktisch* gemeint ist. Damit scheint aus meiner Sicht die Vorstellung verbunden zu sein, dass man den Stoff „didaktisch geschickt“ aufbereiten soll, um etwa die Zusammenhänge zwischen einzelnen Themen oder auch nur Gedankengängen für die Lernenden klar und verständlich darzustellen. Eine geschickte Aufbereitung des Stoffs und eine Beschränkung auf wesentliche Inhalte ist durchaus eine der vielen Aufgaben der Didaktik des Mathematikunterrichts, aber keine zentrale. Die in den Anfängen der Entwicklung der Didaktik des Mathematikunterrichts entstandene und heute noch oft verwendete Bezeichnung „Didaktik der Mathematik“ ist wörtlich genommen nicht zutreffend.

Die Denkweisen von Mathematikern und Fachdidaktikern unterscheiden sich in mehrfacher Hinsicht. Die Mathematik ist in

ihrem Kern ein komplexes und hierarchisches System von gedanklichen Objekten, von formale Zeichen und Strukturen, das sich im Kopf von Mathematikern befindet. Eine Darstellung dieses Systems in einem mathematischen Lehrbuch ist immer nur ein Teil dieses gedanklichen Systems, das der Autor schriftlich in geeigneter Weise formuliert hat, wobei er sich oft nur auf zentrale Gedanken beschränkt. Ein grundlegendes Merkmal mathematischen Denkens ist, dass alle Überlegungen in logisch exakter und lückenloser Folge vollzogen werden müssen. Alle aufgestellten Behauptungen werden auf deduktive Weise begründet. Mathematisches Denken ist im höchsten Grade analytisch und logisch exakt. Neue mathematische Entdeckungen werden zwar oft auf induktive Weise, etwa durch Probieren, analoges oder plausibles Schließen, Synthetisieren verschiedener Zugänge und andere nicht deduktive Überlegungen gefunden. Ihre Verifikation erfordert aber in jedem Fall eine Kette von deduktiven Begründungen. Im Zentrum der Überlegungen eines Didaktikers steht der Prozess der Entwicklung mathematischen Wissens und Könnens im Kopf von Schülerinnen und Schülern unter den Bedingungen des Klassenunterrichts. Das entsprechende Denken ist im hohen Grade synthetisch. Es müssen stets eine Vielzahl von Aspekten berücksichtigt werden. Die dann gewonnenen Erkenntnisse lassen sich prinzipiell nicht deduktiv begründen. Sie können nur empirisch verifiziert werden, besitzen stets einen Wahrscheinlichkeitscharakter und gelten nur unter bestimmten Bedingungen. Die schriftliche Darstellung didaktischer Erkenntnisse ist deshalb selten in stringenter Form möglich, sondern erfordert einen weit größeren Raum für vielschichtige Überlegungen.

Die Ziele und die Struktur des Mathematikunterrichts ergeben sich deshalb nicht primär aus der Mathematik. So beruht etwa die moderne Geometrie auf mengentheoretischen und algebraischen Grundlagen. Die von Mathematikern aus diesem Grund angestoßenen internationalen Bestrebungen in den 60er und 70er Jahren zur Modernisierung des Mathematikunterrichts durch explizite Aufnahme von Elementen der Mengenlehre und Algebra bereits in den Primarstufenunterricht haben sich als eine Fehlentwicklung erwiesen.

Es gibt aber auch eine Reihe von Gemeinsamkeiten. Die wesentlichen Inhalte des Mathematikunterrichts sind mathematische Begriffe, Sätze und Verfahren. Das damit ausgebildete System des mathematischen Wissens und Könnens der Schülerinnen

und Schüler sollte in möglichst hohem Grade kohärent, zumindest aber nicht widersprüchlich zum entsprechenden System von Gedanken im Kopf von Mathematikern sein. Die Schülerinnen und Schüler sollten darüber hinaus die Mathematik als Kulturgut erfassen und einen Eindruck von wichtigen mathematischen Denk- und Arbeitsweisen gewinnen. Ihre logischen Fähigkeiten und ihr Streben nach exakter und strukturierter Darlegung von Gedanken sind ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass es zwar gemeinsame stoffliche Inhalte von Mathematik und Mathematikunterricht gibt, aber die Didaktik des Mathematikunterrichts nicht als ein Teilgebiet der Mathematik angesehen werden kann.

Verhältnis zur
Pädagogik und
Psychologie

Die Didaktik des Mathematikunterrichts hat enge Beziehungen zu den Wissenschaften Pädagogik, insbesondere zur Allgemeinen Didaktik, und zur Psychologie, insbesondere zur pädagogischen und zur Entwicklungspsychologie. Diese beschäftigen sich auf allgemeiner Ebene mit dem Lehren und Lernen unter unterrichtlichen Bedingungen. Ihre Aussagen erheben aber den Anspruch, für alle Lernprozesse gültig zu sein. Von der Spezifik des fachlichen Inhalts wird in der Regel abstrahiert. Viele Erkenntnisse der Pädagogik und Psychologie lassen sich aber auch auf den Mathematikunterricht übertragen. Dazu sind jedoch meist zusätzliche fachspezifische Überlegungen erforderlich. Obwohl die Didaktik des Mathematikunterrichts im Kern eine pädagogische Wissenschaft ist, ist sie kein Teilgebiet der Pädagogik.

In Abgrenzung zur Allgemeinen Didaktik spricht man bei einer Didaktik eines Unterrichtsfachs oft von einer **Fachdidaktik**. Dem entsprechend wird zur Verkürzung der Schreibweise in diesem Buch anstelle von „Didaktik des Mathematikunterrichts“ die Bezeichnung „**Mathematikdidaktik**“ verwendet.

Entwicklung der Mathematikdidaktik und bedeutende Lehrbücher

Die Mathematikdidaktik ist eine recht junge Disziplin, die sich erst ab den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts herausgebildet hat. Einer der ersten bedeutsamen Fachdidaktiker in Deutschland war Walter Lietzmann (1880–1959). Er war Mathematiklehrer, Herausgeber von Zeitschriften, Vorsitzender des MNU-Vereins und

Autor des verbreiteten Buchs „Methodik des mathematischen Unterrichts“ (Lietzmann 1953b, 1953a). Zu den bedeutenden Lehrbüchern der Mathematikdidaktik für die Sekundarstufen gehören weiterhin Monographien von Heinrich Winter (2016), Erich Christian Wittmann (1987, 2002) und Hans-Joachim Vollrath (2001) sowie die Sammelwerke (Leuders 2003) und (Bruder et al. 2015). Das Buch „Grundkurs Mathematikdidaktik“ von Friedrich Zech (1939–1996) ist das am meisten genutzte Lehrbuch und bereits in 10. Auflage (2002) erschienen, die nach der 8. Auflage (1996) nicht mehr verändert wurde. In der DDR wurde als Sammelwerk das Lehrbuch „Methodik des Mathematikunterrichts“ (Walsch und Weber 1975) herausgegeben.

1.2 Gegenstände der Mathematikdidaktik

Als Gegenstand der Mathematikdidaktik wird oft das Lehren und Lernen von Mathematik bezeichnet. Diese Beschreibung enthält zwar zutreffende Aspekte, bewegt sich aber auf einer allgemeinen Ebene, die noch weiter untersetzt werden kann. Es lassen sich drei Gegenstandsbereiche unterscheiden. Diese sollen im Folgenden am Beispiel des Arbeitens mit Größen charakterisiert werden, wobei auch kurz auf die historische Entwicklung der Mathematikdidaktik eingegangen wird.

Ein Gegenstand der Mathematikdidaktik sind die Funktionen, Ziele und stofflichen Inhalte des Mathematikunterrichts. Didaktische Arbeiten, die sich mit diesem Gegenstand beschäftigen, können als Ziel- und Stoffdidaktik bezeichnet werden. Ausgehend von den gesellschaftlichen und kulturellen Anforderungen an den Mathematikunterricht sollen seine allgemeinen und speziellen Ziele und ihre Funktionen bestimmt und geeignete Inhalte ausgewählt werden. Eine wichtige Forschungsmethode sind stoffdidaktische Sachanalysen.

Ziel- und Stoffdidaktik

Entsprechende Fragestellungen für das Arbeiten mit Größen sind z. B.:

- Welche Funktion hat die Entwicklung des Könnens im Arbeiten mit Größen in Bezug auf die anderen Unterrichtsfächer?
- Welche Größen und welche Einheiten sollen im Mathematikunterricht angeeignet werden?
- Was sollen Schulabsolventen zu den Größen sicher beherrschen?

Selbst die Auffassungen zum Begriff *Größe* sind ein Gegenstand stoffdidaktischer Sachanalysen. Der Begriff *Größe* war lange ein Fachbegriff in der Arithmetik und Analysis, konnte aber dann nicht in hinreichender Weise allgemein definiert werden. Eine Größe kann z. B. nicht als Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit aufgefasst werden. Heinz Griesel, ein Mithausgeber von zahlreichen und immer wieder weiterentwickelten Lehrbuchreihen, hat in einer grundlegenden Arbeit (1997) den Begriff *Größe* als Mittler zwischen Realität und Mathematik in geeigneter Weise definiert und damit auch für das strittige Problem der Proportionalität von Größen eine sinnvolle Lösung gefunden.

Mittel- und
Methodendidaktik

Ein zweiter Gegenstand der Mathematikdidaktik sind die im Unterricht einsetzbaren Mittel und Methoden, insbesondere mögliche Aufgaben zur Erreichung der Ziele. Dieser Bereich kann als Mittel- und Methodendidaktik oder im Speziellen als Aufgabendidaktik bezeichnet werden. Ziel der Forschungen ist es u. a., Aufgabenvorschläge oder auch komplexe Lerngelegenheiten, den Einsatz von Unterrichtsmitteln, insbesondere von digitalen Medien sowie methodische Gestaltungsformen zu erarbeiten und empirisch zu erproben. Für das Arbeiten mit Größen heißt dies z. B., günstige Vergleichsgrößen für Einheiten, verschiedene Methoden zum Umrechnen von Größen und geeignete Aufgaben zum Schätzen von Größen zu entwickeln und im Unterricht zu erproben.

Prozessdidaktik

Der Hauptgegenstand der Mathematikdidaktik sind die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler im Unterricht, insbesondere alle lokalen und globalen Entwicklungsprozesse mathematischer Leistungs- und damit verbundener Verhaltenseigenschaften. Forschungsarbeiten im Rahmen dieser Prozessdidaktik sind sehr anspruchsvoll. Es müssen in geeigneter Weise die Bedingungen des Lernens erfasst werden. Dazu gehören die für das Thema aufgewendete Unterrichtszeit, die ausgewählten Aufgaben und methodischen Gestaltungsformen, die Besonderheiten in der Zusammensetzung des Klasse und auch die besonderen Kenntnisse und pädagogischen Fähigkeiten der Lehrperson. Weiterhin müssen mit geeigneten Verfahren die Ergebnisse des Unterrichts, also die Qualität der Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler erfasst werden. Dabei geht es neben lokalen Prozessen vor allem um langfristige Entwicklungen des Wissens und Könnens. So haben in einer landesweiten Ver-

gleichsarbeit in der Klassenstufe 9 in Mecklenburg-Vorpommern im Schuljahr 2002/03 nur 38,8 % aller Schülerinnen und Schüler (im gymnasialen Bildungsgang 55,0 %) 5 m³ in Liter umrechnen können. Es müssen die begrenzte Unterrichtszeit und die zeitlichen Relationen aller Entwicklungsprozesse beachtet werden.

Das Problem der Rückentwicklungen spielt, wie in anderen Fächern, in denen es um kumulatives Lernen und sofortige Präsenz des Wissens und Könnens geht, eine zentrale Rolle. Was direkt nach der Behandlung eines Themas gewusst und gekonnt wurde, ist in lernpsychologisch gesetzmäßiger Weise schon nach kurzer Zeit nicht mehr in der bisherigen Qualität vorhanden. Deshalb gehört die permanente Wiederholung und Festigung des Gelernten zu den notwendigen Bestandteilen des Mathematikunterrichts. Das Verhältnis der aufgewendeten Unterrichtszeit für die Neuerarbeitung und die Festigung des Gelernten muss sich mit zunehmender Klassenstufe zugunsten der Festigung verändern, was im aktuellen Unterricht verbreitet nicht der Fall ist.

Dazu braucht man in der Schule aber konkrete Zeitempfehlungen. Überhaupt ist die begrenzte Unterrichtszeit eine wesentliche Rahmenbedingung der Prozessdidaktik. Es geht immer darum, in einer zur Verfügung stehenden Zeit optimale Lernergebnisse zu erzielen. Der Faktor Zeit ist für die Arbeiten in den beiden anderen Gegenstandsbereichen von geringerer Bedeutung, da es um die Bestimmung notwendiger Ziele und Inhalte bzw. die Erarbeitung von Möglichkeiten geht.

Man kann in vereinfachter Form die Ziel- und Stoffdidaktik als Didaktik des Notwendigen, die Mittel- und Methodendidaktik als Didaktik des Möglichen und die Prozessdidaktik als Didaktik des Machbaren bezeichnen. Alle drei Bereiche sind gleichermaßen wichtig und beeinflussen sich wechselseitig. Die Ergebnisse der Ziel- und Stoffdidaktik sind Grundlage für die Entwicklung von Mitteln und Methoden. Ohne die Ergebnisse der Mittel- und Methodendidaktik sind Arbeiten in der Prozessdidaktik nicht möglich. Aus der Begrenztheit des Machbaren ergeben sich Forderungen für die Reduzierung und Gewichtung der Ziele und Inhalte. Dies bleibt heute leider oft allein den Lehrkräften überlassen.

Die Leistungen des Mathematikunterrichts und damit auch die der Mathematiklehrer werden in der Gesellschaft daran gemessen, was die Schulabsolventen in den nachfolgenden Bil-

derungseinrichtungen wissen und können – und dazu gibt es gegenwärtig massive, in großen Teilen berechnete Klagen aus der beruflichen Ausbildung und den Hochschulen und Universitäten. Sie weisen auf wissenschaftliche Defizite in der Prozessdidaktik hin. Aufgrund der aktuellen Rahmenbedingungen didaktischer Forschungen gibt es z. Z. keine langfristigen Projekte zu diesem Hauptgegenstand der Mathematikdidaktik.

Produktorientierung der Forschungen

In allen drei Gegenstandsbereichen sind Produkte für die Schule und den Unterricht ein wichtiges Ergebnis der Forschungs- und Entwicklungsarbeiten. Die Ziel- und Stoffdidaktik beschäftigt sich u. a. mit der Erstellung und Evaluation von Lehrplänen in nicht immer einfacher Zusammenarbeit mit den dafür verantwortlichen staatlichen Behörden. Die Entwicklung von Aufgabensammlungen, von Unterrichtsvorschlägen für einzelne Themen und von Vorschlägen für den Einsatz digitaler Medien sind Produkte der Mittel- und Methodendidaktik. Die Forschungsergebnisse der Prozessdidaktik fließen zusammen mit denen der anderen beiden Bereiche in die Erstellung von Gesamtkonzeptionen für den Mathematikunterricht ein. Gegenständliche Produkte sind Schullehrbücher, zugeordnete Arbeitshefte und andere Materialien sowie didaktische Konzepte und konkrete Unterrichtsempfehlungen zu den Materialien. Die Erstellung dieser wichtigen Ergebnisse didaktischer Arbeiten liegt gegenwärtig in der Hand von privatwirtschaftlichen, miteinander konkurrierenden Schulbuchverlagen. Diese gesellschaftliche Rahmenbedingung behindert die wissenschaftliche Entwicklung und Evaluation der betreffenden Produkte.

In allen drei Gegenstandsbereichen sind Arbeiten auf unterschiedlichem Niveau der Abstraktion möglich. Neben den genannten produktorientierten Arbeiten gibt es mehrere Ebenen der theoretischen Verallgemeinerung. So existieren etwa zahlreiche Arbeiten zu den sogenannten „Fundamentalen Ideen“, zu denen Bank (2013) eine gute Übersicht erstellt hat.

Zu den Aufgaben in allen drei Gegenstandsbereichen gehört es auch, Konzepte und Materialien zur Vermittlung der Forschungsergebnisse für Veranstaltungen in der Lehreraus- und -fortbildung zu erarbeiten.

Auffassungen zum Gegenstand der Mathematikdidaktik

Am Anfang ihrer Entwicklung war die fachdidaktische Forschung noch stark an der Mathematik orientiert, was aus der folgenden Gegenstandsbeschreibung hervorgeht: „Unter Didaktik der Mathematik wird im Folgenden die Darstellung des Gegenständlich-Stofflichen der Mathematik unter dem Gesichtspunkt der Lehre verstanden, unter ihrer Wissenschaftsmethodik die Verfahrensweise in der Gewinnung der so definierten Inhalte“ (Drenckhahn, F., MNU 5(1952/53), S. 205–211).

Aber es gab auch zu Beginn einzelne Auffassungen, die den Gegenstand eher im Lernen von Mathematik, also in den Veränderungen bei den Lernenden sahen:

„Unter Didaktik der Mathematik verstehe ich die Disziplin, die sich mit der Veränderung des Menschen durch Mathematik beschäftigt. Unter ‚Veränderungen‘ verstehen ich geistige und psychische Veränderungen ... das Aneignen von Wissen und Können“ (Bierbaum, BzMU 1968 (1969), S. 7–18).

2 Funktionen und Ziele des Mathematikunterrichts

Jeder, der Mathematik unterrichtet oder unterrichten will, steht irgendwann vor der Frage, warum und wozu eigentlich Mathematik unterrichtet werden soll. Dies führt zu der Frage nach den Aufgaben und der Stellung des Mathematikunterrichts in der Schule. Dazu gibt es eine große Anzahl von möglichen Antworten und Publikationen. So werden z. B. zu Beginn eines jeden zentralen Planungsdokuments wie einem Lehrplan, Rahmenplan, Bildungsplan oder den Bildungsstandards entsprechende Aussagen formuliert. Außer den Unterschieden in der Ausführlichkeit und Gründlichkeit der Darlegungen gibt es Unterschiede bezüglich der Art und Anzahl der betrachteten Aspekte und Aufgabenfelder. Oft wird nicht zwischen Aufgaben, Funktionen und Zielen des Mathematikunterrichts unterschieden, sodass die Darlegungen wenig vergleichbar sind.

Anliegen dieses Kapitels ist es, ausgehend von einer Definition der Begriffe *Funktion* und *Ziel* eine geordnete Beschreibung der Aufgaben des Mathematikunterrichts vorzunehmen und eine neue Taxonomie der Ziele vorzuschlagen.

2.1 Funktionen des Mathematikunterrichts

Als Oberbegriff für alles, was Mathematikunterricht bezwecken soll, ist die Bezeichnung *Aufgaben* des Mathematikunterrichts geeignet. Zur besseren Verständigung über diese *Aufgaben* ist eine weitere Unterscheidung in *Funktionen* und *Ziele* des Mathematikunterrichts sinnvoll. Begriff *Funktion*

Funktion des Mathematikunterrichts

Unter einer Funktion des Mathematikunterrichts wird seine Rolle innerhalb eines Systems gesellschaftlicher Erscheinungen, Verhältnisse oder Prozesse verstanden. Zur Angabe einer Funktion gehören die Ausweisung eines Bezugssystems und die Angabe der Wechselwirkung mit anderen Systemkomponenten.

Die Zuordnung der allgemeinen Aufgaben des Mathematikunterrichts zu Funktionen ermöglicht eine bessere Strukturierung und damit einen Vergleich und eine Bewertung z. B. der allgemeinen Aussagen in Lehrplänen. Der Mathematikunterricht muss alle Funktionen in ausgewogener Weise erfüllen. Mit dem Blick auf dieses Gesamtsystem von Funktionen werden Lücken in Aufgabenstellungen und Einseitigkeiten deutlich.

Das Funktionssystem entstand im Ergebnis einer Analyse von Lehrplänen, die Ende der 60er Jahre in Kraft waren, sowie weiterer Literatur zur mathematischen Allgemeinbildung (Sill 1997).

Mathematik als Teil
der Kultur

1. Funktion bei der Bewahrung und Weiterentwicklung der Wissenschaft Mathematik als Teil der menschlichen Kultur

Die Mathematik ist ein wesentlicher Bestandteil der menschlichen Kultur. Ihre Bedeutung in der Gesellschaft rechtfertigt es, dass Kenntnisse und Einstellungen zu ihren spezifischen Methoden und Besonderheiten als Instrument zur Gewinnung von Erkenntnissen zur Allgemeinbildung eines jeden Schulabsolventen gehören. Die Mathematik sollte auch in ihrer Entwicklung erlebbar gemacht werden, indem die Schülerinnen und Schüler an exemplarischen Beispielen Einblicke in das Entstehen von Mathematik und damit Achtung vor den Leistungen der Menschen früherer Epochen gewinnen. Die Vermittlung von Einsichten in die Entstehung von bestimmten Theorien und Begriffen kann einen wichtigen Beitrag zum Verständnis der betreffenden Lerninhalte leisten. Die Bekanntschaft mit den Leistungen und den persönlichen Eigenschaften bedeutender Mathematikerinnen und Mathematiker kann eine Vorbildwirkung für künftige Wissenschaftler unter den Schülerinnen und Schülern ausüben (vgl. Kap. 4.5).

Bezug zu
bisherigen
Bildungswegen

2. Funktion in Bezug auf den bisherigen Bildungsweg

Der Mathematikunterricht auf einer Bildungsstufe muss an die Ergebnisse der vorherigen Stufe anknüpfen, so etwa beim Übergang von der Grundschule in Sekundarschulen oder von einer allgemeinbildenden Schule in weiterführende Bildungseinrichtungen. Voraussetzung ist, dass die Lehrkräfte die Inhalte, Anforderungen und spezifischen Methoden der vorherigen

rigen Bildungsstufe kennen. Oft wird versucht, zu Beginn einer neuen Bildungsstufe durch Testarbeiten zu den Inhalten der bisherigen Stufe Informationen über den Stand des Wissens und Könnens zu gewinnen. Solche Tests zu Beginn der Sekundarstufe I oder zu Beginn eines universitären Studiums führen in der Regel zu sehr unbefriedigenden Ergebnissen. Sie sind für den intendierten Zweck allerdings auch wenig geeignet, da es aus lernpsychologischer Sicht für einen Lernenden nicht möglich ist, ohne Vorbereitung das gesamte Spektrum der Anforderungen zu erfüllen, auch wenn er dies schon einmal vielleicht sogar sehr gut beherrscht hat. Solche unvorbereiteten Tests sind nur für ein bestimmtes Anforderungsniveau sinnvoll (vgl. Kap. 2.2.2). Günstiger ist es, im Zusammenhang mit der Behandlung des neuen Stoffs durch eine immanente Wiederholung Bezüge zu den Vorkenntnissen herzustellen.

3. Funktion im System der parallel laufenden Unterrichtsfächer

Im Mathematikunterricht werden zahlreiche Begriffe, Sätze, Methoden und Denkweisen vermittelt, die für andere Unterrichtsfächer von Bedeutung sind. So werden im Mathematikunterricht die Grundlagen für das Arbeiten mit Größen gelegt, das dann insbesondere in den naturwissenschaftlichen Fächern praktiziert wird. Es wird gelernt, wie man Daten erfassen, analysieren und mit grafischen Methoden und statistischen Kenngrößen auswerten kann. Darauf wird dann unter anderem in den gesellschaftswissenschaftlichen Fächern aufgebaut. Der Mathematikunterricht hat auch beim Umgang mit Zahlen, Gleichungen und Funktionen eine Leitfunktion für diese Inhalte in der Schule. Zur Erfüllung dieser Funktion ist eine Abstimmung beginnend bei den Rahmenplänen bis hin zu Absprachen zwischen den unterrichtenden Lehrkräften erforderlich.

Bezug zu anderen Fächern