Editorial
UNIMAGDALENA

Introducción a la lógica matemática

Jesús Tinoco del Valle
Eric Hernández Sastoque
Edgardo Escorcia Caballero

Colección Ciencias Naturales
Serie: Matemáticas

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Tinoco del Valle, Jesús Antonio, autor
Introducción a la lógica matemática / Jesús Tinoco del Valle, Eric Hernández Sastoque, Edgardo Escorcia Caballero -- Primera edición -- Santa Marta : Editorial Unimagdalena, 2023.
228 páginas. -- (Ciencias naturales. Matemáticas)

Incluye bibliografía.

ISBN 978-958-746-608-9 (impreso) -- 978-958-746-609-6 (pdf)

1. Lógica matemática - Enseñanza 2. Teoría de la demostración I. Hernández Sastoque, Eric, autor II. Escorcia Caballero, Edgardo, autor

CDD: 511.3 ed. 23
CO-BoBN– a1112518

Primera edición, abril de 2023

Editorial Unimagdalena
Carrera 32 n.° 22-08
Edificio de Innovación y Emprendimiento
(57 - 605) 4381000 Ext. 1888
Santa Marta D.T.C.H. - Colombia
editorial@unimagdalena.edu.co
https://editorial.unimagdalena.edu.co

Colección Ciencias Naturales, serie: Matemáticas

Rector: Pablo Vera Salazar
Vicerrector de Investigación: Jorge Enrique Elías-Caro

Diagramación LaTeX: Jesús Ramón Beltrán Sánchez
Asesoría en diagramación: Luis Felipe Márquez Lora
Diseño de portada: Orlando Javier Contreras Cantillo
Corrección de estilo: Juan Diego Mican González

Santa Marta, Colombia, 2023

ISBN: 978-958-746-608-9 (impreso)
ISBN: 978-958-746-609-6 (pdf)

DOI: 10.21676/9789587466089

Impreso y hecho en Colombia - Printed and made in Colombia
Xpress Estudio Gráfico y Digital S.A.S. - Xpress Kimpres (Bogotá)

Jesús Tinoco del valle
A Rodrigo Lara Piña,
mi cuñado-padre,
quien siempre confió en mí

Eric Hernández Sastoque
A mi esposa Ruth
y a mis hijas Laura y Ana

Edgardo Escorcia Caballero
A mi esposa Olga
y a mis hijas Dayana y Angelis

Índice general

Introducción

La lógica es la ciencia que estudia el razonamiento, en el sentido de poder determinar si un argumento es válido (correcto) o no válido (incorrecto). Al considerar que en las ciencias empíricas se busca obtener conclusiones verdaderas a partir de una serie de datos y que, particularmente en matemáticas, todas las verdades (salvo los axiomas) deben deducirse lógicamente, puede afirmarse con propiedad que la lógica es la base de todas las ciencias. En consecuencia, con la aseveración anterior, un bien concebido plan de estudios de matemáticas o de licenciatura en matemática debe iniciarse con un buen curso de lógica.

Este libro contempla varios propósitos. El primero es servir de texto para la asignatura Lógica Matemática, que se ofrece a los estudiantes del primer semestre del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Magdalena. Para el efecto, el texto cubre, paso a paso, todo el contenido de la asignatura, con una prueba inicial y un gran número de ejercicios al final de cada tema. Además, se ha dedicado un capítulo a los métodos de demostración de teoremas, y otro a las demostraciones por el método de inducción matemática, así como una sección a la refutación de conjeturas. También se incluye un apartado que estudia la contradicción y el problema que esta genera en una argumentación. Como fundamento de la temática se ha utilizado la teoría de conjuntos, relativamente sencilla, conocida por los estudiantes desde la educación primaria, y sobre la cual se ha elaborado un pequeño apéndice. De esta manera, al finalizar el curso el estudiante deberá haber mejorado su argumentación en el lenguaje corriente, y estará capacitado para refutar conjeturas matemáticas y comprender lógicamente todas las demostraciones de las asignaturas de su plan de estudio.

Por otra parte, resulta asombroso que tantas personas, de todos los niveles sociales y educativos, sean engañadas por políticos que presumen de títulos de doctores que nunca obtuvieron, médicos que acreditan especializaciones que nunca realizaron, captadores de dinero que ofrecen ganancia fácil mediante pirámides insostenibles y perfiles en redes sociales que no corresponden a las personas reales. Todo esto es generado, principalmente, por un limitado uso de la razón, acompañado por el abuso de la axiomatización.

Además, el uso generalizado, tanto en el lenguaje hablado como en el escrito, del innecesario barbarismo "y/o" muestra un desconocimiento de los más elementales conectivos lógicos del idioma. Como si esto no fuese suficiente, persiste un constante señalamiento, por parte de los profesores, con relación a la falta de coherencia entre los objetivos, las hipótesis y las conclusiones en los trabajos de los estudiantes.

Así las cosas, el segundo propósito de este libro es que cualquier persona que lo lea, con un poco de atención y un lápiz en la mano, logre elevar su nivel de lógica, hasta un punto que le permita hacer un uso racional de la duda y evitar la excesiva axiomatización. De igual modo, deberá ser capaz de detectar en un argumento las falacias más comunes y ser consciente de lo nefasta que es, en un argumento lógico, una contradicción.

Presentación

Amigo lector: se encuentra usted ante un texto de introducción a la lógica matemática. Esto quiere decir que, si tiene el suficiente interés, disciplina y compromiso, al final adquirirá una buena formación lógica que, por una parte, le dará sólidas bases para continuar con su formación matemática, ya que a cada verdad matemática no evidente (teorema) se llega mediante un razonamiento lógico y, por otra, le permitirá utilizar en forma mucho más precisa el idioma.

El libro se encuentra dividido en siete capítulos, más un apéndice. El primero, denominado capítulo 0, presenta una breve reseña histórica sobre el desarrollo de la lógica y se puede considerar independiente del resto. Su objetivo es mostrar a la lógica como el resultado del trabajo de muchas personas, a lo largo de la historia.

El capítulo 1 comprende una descripción de lo que son los sistemas axiomáticos, estilo que se ha impuesto en la exposición de casi todas las ramas de la matemática y que, sin demasiado rigor, se tratará de utilizar en este texto para el desarrollo de la lógica. Además, se aprovecharán las ideas para mostrar que, aunque la axiomatización es muy importante en las ciencias, también genera problemas muy serios (en la vida práctica) cuando se axiomatiza precipitadamente, o sin fundamentos sólidos.

El capítulo 2 comprende los conceptos que se aceptarán como básicos en el desarrollo del texto. También expondrá las definiciones de las otras proposiciones compuestas fundamentales, utilizando las propuestas por Peirce, y con el formato de Wittgenstein.

El capítulo 3 relaciona las proposiciones con el idioma y trata sobre los procesos que permiten determinar los valores de verdad de una proposición compuesta del lenguaje corriente. Se estudian también las bases para la argumentación correcta: las tautologías. Además, se aborda el tema de la formación de proposiciones compuestas, la estructura de los enunciados y su relación con el lenguaje corriente. También se trabajan las tablas de verdad y se examinan las tautologías fundamentales. Por último, se trata el problema de la contradicción en un argumento.

El capítulo 4 estudia el proceso de deducción proposicional. Para dicho fin, se ha modificado el esquema de Patrick Suppes (1970), haciéndolo más coincidente con el razonamiento natural. Se plantean el criterio de validez lógica, las reglas de la deducción proposicional y la consistencia de un conjunto de premisas. De igual manera, se describe y se muestra la invalidez de las falacias formales más comunes.

El capítulo 5 trata sobre los teoremas, su estructura lógica y los métodos de demostración. Para los ejemplos se recurre a definir los numeros reales como cuerpo ordenado, y se consideran algunas de sus propiedades.

El capítulo 6 estudia el proceso de deducción cuantificacional, considerando en las proposiciones: cuantificadores y sintagmas nominal y verbal. Como base para la simbolización del lenguaje argumental se utiliza la teoría de conjuntos, tomando la idea de Allwood, *et al (1981)*.

El capítulo 7 retoma el tema de demostración de teoremas, para estudiar el método de inducción matemática, tanto en la forma débil como en la fuerte.

Por último, el apéndice contiene unas nociones básicas de la teoría de conjuntos, precisamente las necesarias para comprender los temas del capítulo 6.

Cada capítulo, exceptuando el capítulo 0, se inicia con una prueba exploratoria del tema que se va tratar. Esto le permitirá al lector valorar qué tanto conoce sobre el tema. Si el resultado de esta exploración es satisfactorio, podrá pasar al siguiente capítulo. Además, en cada capítulo se presentan los objetivos que se pretende alcanzar y una introducción. Por otra parte, con la intención de hacer muy ágil la lectura, siempre que se haga alusión a temas anteriores, ademas de referenciar el apartado se indicará la página en la que se encuentra el contenido referenciado. También, al final de cada capítulo, y en algunos casos al final de temáticas importantes, se encuentra una lista numerosa de ejercicios cuyo propósito es lograr un dominio conceptual y contribuir con el desarrollo de destrezas en los temas correspondientes.

Capítulo 0

El desarrollo de la lógica matemática

Objetivos

Los objetivos de este capítulo son:

1. Reconocer algunos avances del proceso evolutivo de las matemáticas como parte del desarrollo particular de la lógica.
2. Identificar algunas características de la lógica de Boole, Frege, Peano, Turing, Whitehead y Russell, y la lógica matemática en los últimos tiempos.

0.1. Introducción

En este capítulo se presenta un panorama histórico del desarrollo de la lógica, señalando su estado actual como una convergencia de, al menos, cinco avances del proceso evolutivo de las matemáticas. Estos avances son: la lógica antigua, la idea de un lenguaje completo y automático para el razonamiento, los progresos del álgebra y de la geometría después del año 1825, la idea de que las distintas ramas de la matemática pueden considerarse como sistemas deductivos y el desarrollo de nuevas lógicas.

0.2. La lógica antigua

Por ser sus trabajos los más antiguos que se conocen, puede decirse que la lógica empieza con Aristóteles (384 a. C.-332 a. C.). En sus escritos se encuentran varias referencias lógicas:

- Textos sobre el lenguaje común, relacionados con las categorías del ser: sustancia, cantidad, cualidad, lugar, tiempo, entre otros.
- Estudio sobre el arte de la argumentación, donde se trata de refutar los argumentos sobre los que no se está de acuerdo y de evitar que sean vulnerables los propios.
- Enseñanzas sobre la investigación de las ciencias naturales y, en particular, sobre el método científico.
- Opiniones sobre una organización de un sistema en la matemática, y una teoría de las formas de razonamiento correcto, que fue denominada silogismo por Aristóteles. Esta última parte es la que se conoce como lógica aristotélica.

En la lógica de Aristóteles, solo cuatro tipos de enunciados pueden ser utilizados como antecedentes o como consecuentes de implicaciones. Son los "enunciados categóricos", que tienen las estructuras:

Todo S es P	(tipo A)
Ningún S es P	(tipo E)
Algún S es P	(tipo I)
Algún S no es P	(tipo O)

En ellos se denominaba a S el sujeto y a P el predicado.

En opinión de Aristóteles, los únicos nombres que tenían sentido en un enunciado categórico son los nombres comunes como *hombre*, *animal*, *flor* y *rojo*, por ejemplo, pero no los nombres de personas, lugares o cosas susceptibles de ser considerados como unidades reales. De acuerdo con esto, enunciados como "Cristóbal Colón descubrió América" o "Santa Marta es una bella ciudad" no pueden ser antecedentes o consecuentes de condicionales.

Dos cosas muy importantes para resaltar en Aristóteles son, por un lado, que consideró tanto el principio de identidad, “Para todo x, se tiene que: $x = x$ ”, como el del tercero excluido, “Alguno de los dos, p o no p, pero no ambos”, y también el principio de la no contradicción: “ no (p y no p)”. Por otro lado, otorgó importancia a los enunciados modales, o sea, aquellos enunciados donde se consideraba lo necesario o lo posible, tales como: “Todo S es P” o “Algún S es posiblemente P”. La lógica modal de Aristóteles no tuvo mucha influencia en el pensamiento posterior; sin embargo, hoy día es una parte importante de la lógica matemática.

Los principales defectos de la silogística de Aristóteles consistieron en no admitir como antecedentes más de dos enunciados categóricos; ni la intervención de más de tres nombres comunes. Sin embargo, hay condicionales que, siendo válidas, tienen más de dos enunciados categóricos como antecedentes. Por ejemplo, si se tiene que:

“Todo hombre blanco y rubio es racista”.
“Ninguna persona que odia a los negros es filántropo”.
“Todo racista odia a los negros”.

Se deduce que:

“Todo hombre blanco y rubio no es filántropo”.

Otra notable falla en la lógica de Aristóteles fue que este no les dio importancia a los términos de enlace: “no”, “y”, “o”, “Si _____ entonces _____”, “_____si, y solo si _____ ”, de gran relevancia tanto en el lenguaje corriente como en la lógica. Por último, también se le critica a este enfoque que no llegó muy lejos en el uso de símbolos.

Casi al mismo tiempo en que se desarrolló la lógica de Aristóteles, también trabajaron en esta temática los megáricos y los estoicos entre el 300 y 200 a. C. A diferencia de Aristóteles, los megáricos-estoicos sí investigaron los juntores o partículas conectivas de los enunciados.

Los tipos de razonamientos a los cuales prestaron atención los megáricos-estoicos fueron:

“Si P entonces Q, y P, por tanto, Q”.
“Si P entonces Q, y no Q, por tanto, no P”.
“No ambos P y Q, y P, por tanto, no Q”.
“P o Q, y P, por tanto, no Q”.
“P o Q, y no P, por tanto, Q”.

Como algunos de estos y otras formas de argumentos tienen como una de sus condiciones un enunciado de la forma: “Si _____ entonces _____”, resultaba necesario dar una respuesta a la pregunta: ¿cuándo es verdadero un enunciado “Si _____, entonces _____”? Sobre esta cuestión se discutió mucho en la escuela megárico-estoica; tanto, que Calímaco, uno de sus miembros, llegó a decir: “Hasta los cuervos discuten en los tejados este problema”.

De entre las varias respuestas que se adujeron a este respecto, se encuentra la de Filón, quien decía que todos los enunciados “Si _____, entonces _____” son verdaderos, excepto aquellos que tienen una parte "si" verdadera y una parte "entonces" falsa, los cuales serían, por tanto, falsos. Así, por ejemplo, el enunciado "Si es de noche, entonces es de día" es verdadero en todo momento, mientras que el enunciado "Si es de día, entonces es de noche" es falso.

Este tipo de relación "Si _____, entonces _____" de Filón ha sido el normalmente utilizado en lógica matemática y ha sido denominado por Russell *implicación material*.

Por otra parte, Diodoro decía que un enunciado "Si _____, entonces _____" es verdadero si y solo si es tal que en ningún momento tiene una parte "si" verdadera y una parte "entonces" falsa. Así, "Si es de noche, entonces es de día" no es un enunciado verdadero (ni aunque se emitiera a la luz del día) porque hay momentos (por la noche) en que "es de noche" es verdadero y "es de día" es falso. A este tipo de implicación, de Diodoro, se le denominó *implicación material en todo momento*.

Por último, algunos consideraban que un enunciado "Si _____, entonces _____" es verdadero solo cuando hay alguna conexión entre los contenidos de sus dos partes. Es decir, el enunciado "Si P entonces Q" es verdadero cuando, y solamente cuando, Q es necesariamente verdadero si P es verdadero. Este tipo de enunciado "Si _____, entonces _____ necesariamente" fue lo que antiguamente se llamó implicación.

0.3. La idea de un lenguaje completo y automático para razonar

El primer paso en la dirección de un lenguaje completo y automático para el razonamiento fue dado por Ramón Llull (1232-1315) hacia el año 1270 en su libro *Ars Magna* (*El gran arte*). Llull (citado en Casadesús, 2015) pensaba que todo conocimiento consiste en la unión o conjunción de una serie de ideas simples. En particular, el conocimiento científico es un agregado de ideas básicas. Para dicho autor, estas ideas básicas eran solo 54, de las cuales la tercera parte se refería al campo de la religión o de las teorías del buen o mal comportamiento. La unión o conjunción de grupos de estas ideas es el "gran arte" por el cual ha de ser efectuada la ciencia general.

Llull (citado en Casadesús, 2015) solo dio algunas reglas triviales para juzgar el valor cognoscitivo de los diferentes argumentos complejos posibles. Parece haber sido su opinión que ningún conocimiento científico tiene necesidad alguna de la guía o soporte de la experiencia sensible. Al sustentar esta opinión, Llull era representativo de buena parte del pensamiento de su época (racionalismo).

Después de Llull, las sugerencias de un lenguaje general para una ciencia general fueron frecuentes en filosofía, pero el desarrollo de tal lenguaje no tuvo lugar hasta la década de 1660, cuando se imprimieron las obras *Ars Signorum* (*El arte de los signos*) de George Delgarno, y *An Essay Towards a Real Character and Philosophical Lenguaje* (*Ensayo en pro de un alfabeto real y un lenguaje filosófico*), de John Wilkins (Laborda, 1981). Las ideas del *essay* de Wilkins estaban, hasta cierto punto, tomadas de Delgaro, pero aquel proponía de forma detallada argumentos para la elaboración de un lenguaje conscientemente construido, mientras que la obra de Delgaro solo contenía un mero esquema de ellos.

El propósito de Wilkins era, como él mismo advierte, ofrecer una lista regular y una relación de todas aquellas cosas e ideas a las que pudieran asignárseles marcas o nombres acordes con sus propiedades naturales. En este sentido, el fin y el propósito de las diferentes ramas de las ciencias es hacer que todas las cosas e ideas estén colocadas en un entramado tal que se pudiese revelar claramente el orden natural de ellas, sus dependencias mutuas y sus relaciones. Sin embargo, el intento de este autor de hacer del lenguaje un instrumento vivo de la ciencia −y del comercio y de la religión− fue completamente vano, exceptuando el hecho de que ayudó a que se mantuviese la idea de que es posible construir conscientemente un lenguaje mejor que los lenguajes ordinarios.

Se considera que uno de los primeros que imaginó un lenguaje general como una especie de aritmética fue René Descartes (1596-1650). Según Descartes (2010), debe ser posible hacer una lista de todas las palabras que son necesarias para hablar de todos los pensamientos humanos. Si se pudiese determinar cuáles son las ideas simples básicas para pensar, prácticamente se podría eliminar la posibilidad de error en los pensamientos complejos. Inexplicablemente, Descartes no procuró presentar una relación de todas las ideas simples, ni de poner los órdenes, de manera que pudiera constituirse una aritmética del razonamiento que permitiera obtener conocimientos ciertos y complejos de todo cuanto sea verdad.

Poco más tarde, Gottfried Leibniz (1646-1716) concibió el proyecto de un nuevo lenguaje general, semejante al de Descartes, pero llevándolo unos pasos adelante. Sostenía Leibniz (citado en Yambo, 2009) que si todas las ideas y las relaciones entre ellas pudiesen simbolizarse, cada cuestión podría tratarse como se tratan los conceptos matemáticos y se obtendrían descubrimientos muy importantes de manera muy fácil. Consecuente con esta línea de pensamiento, introdujo el signo de igualdad en la identificación de cada enunciado, y lo aprovechó con la ley de transitividad, para establecer una ley de sustitución. Por otra parte, utilizó el principio de reducción al absurdo (*reductio ad absurdum* para establecer la validez de un argumento, comprobando que la negación de la conclusión conduce a una contradicción.

0.4. Nuevos descubrimientos en álgebra y geometría

En el período comprendido entre 1825 y 1900, el descubrimiento de múltiples álgebras y diversas geometrías desembocó en una nueva visión de la filosofía de las matemáticas. Aunque la geometría euclideana llegó a constituirse como un sistema axiomático-deductivo en un período muy temprano de su historia, la situación de la aritmética y del álgebra fue muy diferente. La necesidad de formar una tabla con las leyes del álgebra que dijera cuáles son las propiedades de las operaciones que tienen lugar en su seno y de dejarse guiar conscientemente por esas leyes fue vislumbrada solamente por George Peacock (1790-1888) en su obra *A Treatise on Algebra* (*Un tratado de álgebra*). Peacock (Gallardo y Torres, 2005) sostenía la idea de que el álgebra es una ciencia deductiva, lo mismo que la geometría, fundamentando sus bases en consideraciones estrictamente lógicas. De esta concepción surgió el nuevo tipo de álgebra, llamada por Peacock álgebra simbólica y, tiempo después, álgebra abstracta.

Por otra parte, el inesperado y sorprendente descubrimiento de Niels Abel (1802-1809) y otros de la imposibilidad de obtener una fórmula para la resolución de las ecuaciones de quinto grado y el intento de Évariste Galois (1811-1832) de demostrar que las conclusiones obtenidas por Abel eran ciertas, fueron determinantes del movimiento en la dirección del álgebra abstracta. Es así como Galois concibe la idea de "grupo" como una estructura algebráica y analiza algunas de sus más importantes propiedades. A partir de su trabajo, una parte del álgebra (la teoría de grupos) se convirtió en la base de lo que se conoce hoy en matemáticas cómo álgebra abstracta (Aznar, 2007).

No mucho tiempo después de la muerte de Galois aparecieron el álgebra de vectores y el álgebra de matrices, elaboradas por William R. Hamilton (1805-1865) y Arthur Cayley (1821-1895), respectivamente, que produjeron nuevas conmociones en el mundo matemático. Estas álgebras, cuyos elementos son distintos a los números que se habían utilizado siempre: reales y complejos, no satisfacen la propiedad conmutativa, rompiendo así con las ideas de un álgebra que se tenían hasta ese momento (Zea, 2012).

A pesar de que muchos años antes Gerolamo Saccheri (1667-1733), en un libro titulado *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* (*Euclides libre de todo defecto*), contrario a lo que pretendía, logró desarrollar una geometría diferente a la euclidiana, no fue sino con la invención de dos geometrías radicalmente diferentes a la de Euclides, en 1825 por Nikolái Lobachevski (1792-1856) y en 1854 por Georg Riemann (1826-1866), que se produjo otro profundo impacto que dio lugar a que se cuestionara el objeto y finalidad de la matemática, y de sus relaciones con las cosas situadas en el espacio físico (Senior Martínez, 2013). Cuando se admitió que es posible disponer de varias geometrías en las que lo verdadero en una puede ser falso en la otra, antiguas opiniones según las cuales la matemática es una ciencia que da un conocimiento completamente cierto de la existencia (natural o supranatural, al menos de las cosas tal como parecen ser) dejaron de mantenerse en pie.

0.5. Existen partes de la matemática axiomatizables

La idea de que algunas partes de la matemática pueden construirse como sistemas axiomáticos se remonta a la obra de Euclides aproximadamente (325 a. C.-265 a. C.) en geometría, pues esta rama de la matemática fue la primera que se estableció como uno de tales sistemas (Euclides, 1991). Ya antes de la década de 1890, y en relación con la geometría, se prestó alguna atención a la pregunta "¿Es posible dentro de un sistema obtener, al término de una cadena de deducciones, un enunciado P que se convierte por ello en un teorema (un enunciado verdadero) del sistema y obtener, al término de otra cadena similar, el teorema no P (que afirma que P es, en definitiva, falsa)?".

Se dice que un sistema deductivo es consistente si no da lugar a dos teoremas contradictorios: P y no P. Al principio, este problema no preocupó demasiado a las