CIME Summer Schools

35

Aldo Ghizzetti (Ed.)

Alcune questioni di analisi numerica

Perugia, Italy 1964

Springer

Fondazione CIME Roberto Conti

Aldo Ghizzetti (Ed.)

Alcune questioni di analisi numerica

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Perugia, Italy,
September 7-16, 1964

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-11026-9 e-ISBN: 978-3-642-11027-6
DOI:10.1007/978-3-642-11027-6
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1965
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

4° Ciclo - Università di Perugia dal 7 al 16 settembre 1964

"QUESTIONI DI ANALISI NUMERICA"

Coordinatore: Aldo GHIZZETTI

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

ALDO GHIZZETTI

LEZIONI SUI PROCEDIMENTI DI QUASILINEARIZZAZIONE

LEZIONI SUI PROCEDIMENTI DI QUASILINEARIZZAZIONE

di

Aldo Ghizzetti

Introduzione

Queste lezioni dovevano essere tenute da R.Bellman. Poichè non gli è stato possibile partecipare personalmente al corso, mi ha pregato di sostituirlo, tenendo conto di un manoscritto da Lui redatto in collaborazione con R.Kalaba. Gli argomenti contenuti in tale manoscritto sono all'incirca quelli esposti in un precedente lavoro di R.Kalaba [6].

Ho scelto fra tali argomenti quelli che mi son sembrati più significativi e ne ho rifatta l'esposizione, seguendo un ordine inverso a quello adottato dai predetti Autori. Precisamente, dopo un primo § contenente nozioni generali sulla quasi-linearizzazione, espongo nel § 2 un'applicazione ad un tipo abbastanza generale di problemi sulle equazioni differenziali, ordinarie o a derivate parziali. I casi particolari (premessi da Bellman e Kalaba) sono esposti successivamente nei § 3, 4, 5, 6 ; ciò mi ha consentito di evitare la ripetizione di dimostrazioni del medesimo tipo. Ho introdotto anche alcune modificazioni di forma per mettere bene in evidenza le ipotesi essenziali su cui sono fondate le applicazioni considerate.

Nel § 7 tratto un problema che non rientra fra quelli del § 2 ; per tale problema ho messo a punto le relative dimostrazioni, che son appena accennate da Bellman e Kalaba.

Infine nel § 8 espongo un'altra applicazione ad un problema di calcolo delle variazioni.
Varie altre applicazioni (di tipo più particolare) son state considerate da Bellman e Kalaba; per esso devo rinviare ai lavori citati, non essendovi tempo di esporle nelle 4 lezioni del corso.

Merita però un cenno l'argomento delle <u>disuguaglianze differenziali</u>, o degli <u>operatori</u> <u>monotoni</u>, che sono essenziali nelle applicazioni della quasilinearizzazione. A ciò è dedicato il § 9, destinato anche a mettere in evidenza le molte ricerche che restano da fare in questo campo.

A.Ghizzetti

Bibliografia

[1] - E.F.BECKENBACH-R.BELLMAN - Inequalities - Ergebnisse der Mathematik - Neue Folge - Heft 30 - Springer Verlag (1961).

[2] - R.BELLMAN - Dynamic programming and a new formalism in the Calculus of variations - I - Rivista Matematica dell'Università di Parma - vol.6, 193-213 (1955).

[3] - R.BELLMAN-R.KALABA - Quasilinearization and boundary-value problems -Manuscript (april 1964).

[4] - L.COLLATZ - Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Die Grundlehren der Math. Wissensch., Band 120, Springer-Verlag, 1964.

[5] - G.DOETSCH - Theorie und Anwendung der Laplace - Transformation. Dover Publications. New York 1943.

[6] - R.KALABA - On nonlinear differential equations, the maximum operation, and monotone convergence. Journal of Mathematics and Mechanics, vol.8, 519-574, (1959).

§ 1 - Generalità sulla quasilinearizzazione.

1.1 - Si consideri una funzione numerica $F(x,y)$, a valori reali, di due argomenti x , y , la quale sia lineare in x , per ogni y appartenente ad un certo insieme Y(*). Supponiamo che esista il $\max_{y \in Y} F(x,y)$; tale massimo sarà una funzione $\Phi(x)$ che, in generale, non sarà più lineare.

Con formule del tipo

$$\Phi(x) = \max_{y \in Y} F(x,y) \tag{1}$$

abbiamo dunque la possibilità di rappresentare funzioni non lineari per mezzo di funzioni lineari alle quali sia applicata un'operazione di massimo (o di minimo).

Questa semplice idea può essere sfruttata con profitto in molte questioni di analisi matematica e di analisi numerica. Tutte le volte che essa viene applicata, si dice che si usa un procedimento di quasilinearizzazione.

1.2 - Cominciamo col dare alcuni semplici esempi di rappresentazioni del tipo (1).

Esempio 1°). Se x , y son variabili reali, si ha evidentemente

$$|x| = \max_{|y| \leq 1} x\, y \quad . \tag{2}$$

(*) L'argomento x deve essere un punto di uno spazio vettoriale; y può essere un punto di un insieme qualsiasi. La linearità in x di $F(x,y)$ si traduce nella $F(c_1 x_1 + c_2 x_2, y) = c_1 F(x_1, y) + c_2 F(x_2, y)$, per ogni y .

Esempio 2°). Se $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ son due vettori a componenti reali non negative, dalla classica disuguaglianza di Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q} , \quad (p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1),$$

ove vale il segno di uguaglianza se e solo se i numeri x_i^p e y_i^q son proporzionali, si deduce immediatamente

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} = \max_{y\in Y} \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \tag{3}$$

ove Y è l'insieme definito da $\sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1$.

Esempio 3°). Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x , di classe C^2 in un dato intervallo $[a\ ,\ b]$. Supponiamo che la $f(x)$ sia ivi convessa in senso stretto, sia cioè $f''(x) > 0$. Scrivendo che il diagramma di $f(x)$ è situato al disopra di ogni sua tangente, si ottiene per ogni coppia x , ξ di punti di $[a\ ,\ b]$ la disuguaglianza

$$f(x) \geqslant f(\xi) + (x-\xi)\, f'(\xi) ,$$

il segno $=$ valendo se e solo se $\xi = x$. Dunque

$$f(x) = \max_{a\leq\xi\leq b} \left[f(\xi) + (x-\xi)\, f'(\xi)\right] . \tag{4}$$

Esempio 4°). La (4) si estende subito al caso di una funzione $f(x_1,\dots,x_n)$ di più variabili, di classe C^2 in un dato dominio D . L'ipotesi di convessità in senso stretto si traduce nel fatto che la matrice hessiana $(f_{x_i x_j})$ è definita positiva. Scrivendo che l'ipersuperficie diagramma della funzione è situata al disopra di ogni suo iperpiano tangente, si ottiene

$$f(x_1,\dots,x_n) \geqslant f(\xi_1,\dots,\xi_n)+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)f_{x_i}(\xi_1,\dots,\xi_n) ,$$

il segno $=$ sussistendo se e solo se $\xi_i = x_i$ $(i=1,\dots,n)$. Ne segue

$$(5) \quad f(x_1,\dots,x_n)= \max_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D} \Big[f(\xi_1,\dots,\xi_n)+ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)f_{x_i}(\xi_1,\dots,\xi_n)\Big] .$$

<u>Esempio 5°)</u>. Nel caso di funzioni <u>concave in senso stretto</u>, le (4), (5) sussistono con <u>min</u> in luogo di <u>max</u> .

1.3 - L'uso di formule del tipo (1) è utile nella deduzione di certe disuguaglianze. Per esempio, dalla (3) si deduce immediatamente la <u>disuguaglianza di Minkowski</u>

$$(6) \quad \Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\Big]^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\Big)^{1/p} , \qquad (x_i,y_i \geqslant 0 , \quad p > 1).$$

Infatti da (3) segue

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\Big]^{1/p} = \max_{z\in Z} \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\, z_i ,$$

ove Z è l'insieme definito da $z_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} z_i^q = 1$, e quindi

$$\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\Big]^{1/p} \leqslant \max_{z\in Z}\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \max_{z\in Z}\sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\Big)^{1/p} ,$$

avendo nell'ultimo passaggio applicato ancora la (3).

Non insistiamo su applicazioni di questo genere, che non rientrano nel nostro programma; rimandiamo a E.F. Beckenbach - R.Bellman [1]

1.4 - Mostriamo un'applicazione di altro tipo, prendendo in considerazione il classico metodo di Newton per il calcolo dell'unica radice r di un'equazione $f(x) = 0$, esistente in un intervallo $[a, b]$ ove sia, per esempio $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$.

Tale metodo si può inquadrare nei procedimenti di quasi-linearizzazione; infatti dalla (4) con $x = r$ segue, in virtù della $f(r) = 0$

$$f(\xi)+(r-\xi)\, f'(\xi) \leq 0 \tag{7}$$

il segno $=$ valendo solo per $\xi = r$. La (7) equivale alla $r \geqslant \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ e si ha pertanto la

$$r = \max_{a \leq \xi \leq b} \left[\xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} \right], \tag{8}$$

che esprime sotto forma concisa il metodo in questione.

E' ben noto che da (8) segue la costruzione di una successione $\{\xi_i\}$ che tende crescendo alla radice r, verificandosi inoltre la convergenza quadratica, nel senso che $r - \xi_{i+1} \leq k\,(r - \xi_i)^2$, ove k è una costante indipendente dall'indice i.

1.5 - Passeremo ora ad esporre alcune applicazioni della quasilinearizzazione a problemi sulle equazioni differenziali non lineari. Troveremo che, in certi casi e sotto determinate ipotesi, essa conduce a costruire delle approssimazioni successive della soluzione, per le quali rimangono valide le due proprietà ora menzionate del metodo di Newton: la <u>monotonia</u> e la <u>convergenza quadratica</u>.

§ 2 - Applicazione della quasilinearizzazione a certi problemi sulle equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali.

2.1 - Indicato con x un punto dello spazio euclideo R_n, consideriamo, nell'incognita $u(x)$, un'equazione differenziale <u>non lineare</u> del tipo

$$(1) \qquad E[u] = f(x, u), \qquad (x \in A),$$

ove E è un operatore differenziale <u>lineare</u> (ordinario se $n = 1$, a derivate parziali se $n > 1$), $f(x, u)$ una funzione <u>non lineare</u> nell'argomento u, mentre A designa un aperto limitato di R_n.

Si cerca della (1) una soluzione $u(x)$ la quale verifichi certe <u>condizioni al contorno</u>, che scriveremo concisamente nella forma

$$(2) \qquad L[u] = g(x), \qquad (x \in \partial A),$$

ove L è un operatore <u>lineare</u>, $g(x)$ una funzione assegnata e ∂A la frontiera di A(*) . Porremo nel seguito $\bar{A} = A \cup \partial A$.

Il problema (1), (2) si può scindere nei due problemi seguenti:

(3) $\quad E[u_1] = 0 , \quad (x \in A) ; \quad L[u_1] = g(x) , \quad (x \in \partial A) ;$

(4) $\quad E[u_2] = f(x, u_1+u_2), \quad (x \in A); \quad L[u_2] = 0 , \quad (x \in \partial A),$

risultando poi $u = u_1 + u_2$. Noi supporremo senz'altro risolto il problema (3) (che è <u>lineare</u>) e ci occuperemo soltanto del problema (4) che presenta <u>condizioni omogenee al contorno</u>.

Considereremo pertanto un problema del tipo

(5) $\quad E[u] = f(x,u), \quad (x \in A) ; \quad L[u] = 0 , \quad (x \in \partial A),$

facendo un insieme di ipotesi che andiamo a spiegare.

<u>Ipotesi I</u>)- Considerato, accanto al problema (5), quest'altro problema <u>lineare</u>, nell'incognita $v(x)$:

(6) $\quad E[v] = g(x), \quad (x \in A) ; \quad L[v] = 0 , \quad (x \in \partial A),$

con $g(x)$ funzione assegnata in $\bar{A}$ (verificante opportune ipotesi di continuità oppure hölderianità, ecc.), <u>supporremo che esso ammetta una ed una sola soluzione</u> $v(x)$, <u>continua in</u> $\bar{A}$, <u>rappresentabile con una formula del tipo</u>

(*) Non escludiamo che $L[u]$ e $g(x)$ siano vettori a più componenti e nemmeno che $L[u]$ possa avere diverse espressioni su diverse parti di ∂A .

$$(7) \qquad v(x) = \int_{\bar{A}} G(x,s)\, g(s)\, ds \quad ,$$

ove $G(x,s)$ è la cosidetta funzione di Green del problema (6). La $G(x,s)$ in generale non è limitata (diventa infinita per $s = x$), ma per ogni x è funzione di s sommabile in $\bar{A}$. Pertanto, introdotta per ogni funzione $\varphi(x)$ continua in $\bar{A}$ la norma $\|\varphi\| = \max_{x \in \bar{A}} |\varphi(x)|$, da (7) si può dedurre $|v(x)| \leq \|g\| \int_{\bar{A}} |G(x,s)|\, ds$ ed a fortiori

$$(8) \qquad \|v\| \leq C \, \|g\| \qquad \text{con} \qquad C = \left\| \int_{\bar{A}} |G(x,s)|\, ds \right\| \quad .$$

Ipotesi II)- Ritornando al problema (5), supporremo $f(x,u)$ continua assieme alle sue derivate parziali $f_u(x,u)$, $f_{uu}(x,u)$ per x variabile in un certo dominio D e per $|u| \leq \beta$ (*) . Supporremo inoltre che, per ogni $x \in D$, la $f(x,u)$ sia funzione di u convessa in senso stretto nell'intervallo $[-\beta, \beta]$, vale a dire che sia

$$(9) \qquad f_{uu}(x,u) > 0 \quad , \qquad (x \in D \, , \ |u| \leq \beta \ ) \, .$$

Nel seguito faremo uso delle posizioni

(*) Per certi casi occorreranno ipotesi più restrittive, p.es. $f(x, u) \in C^1$.

$$(10) \qquad \max_{x\in D,\,|u|\leq\beta} \begin{cases} |f(x,u)| = M \ , \\ |f_u(x,u)| = M_1 \ , \\ f_{uu}(x,u) = M_2 \ . \end{cases} \qquad (*)$$

Prima di formulare altre ipotesi, facciamo qualche premessa. Tenuto conto di (6), (7), il problema (5) si traduce evidentemente nella seguente equazione integrale

$$(11) \qquad u(x) = \int_{\bar{A}} G(x,s)\, f\,[\,s,\, u(s)]\, ds \quad ,$$

che può essere risolta col metodo delle approssimazioni successive, partendo da una $u_0(x)$ (naturalmente verificante la $\|u_0\| \leq \beta$) e procedendo secondo lo schema ricorrente

$$(12) \qquad u_{n+1}(x) = \int_{\bar{A}} G(x,s) f\,[s,\, u_n(s)]\, ds\ , \qquad (n=0,1,2,\dots)\ .$$

Le (12) hanno senso soltanto se risulta $\|u_n\| \leq \beta$, $(n=1,2,\dots.)$.

(*) Resta inteso che l'aperto A del problema (5) sarà contenuto in D. Si noti che β , M , M_1 , M_2 sono indipendenti da A .

Per assicurare ciò è sufficiente richiedere che sia $CM \leqslant \beta$; infatti da (12) segue ovviamente $\|u_{n+1}\| \leqslant CM$.

Osserviamo poi che si ha, come conseguenza di (12)

$$u_{n+1}(x)-u_n(x)=\int_{\bar{A}} G(x,s)\left\{f[s,u_n(s)]-f[s,u_{n-1}(s)]\right\} ds =$$

$$=\int_{\bar{A}} G(x,s)[u_n(s)-u_{n-1}(s)]\, f_u[s,\bar{u}_n(s)]\, ds \quad ,$$

con $\bar{u}_n(s)$ compreso fra $u_{n-1}(s)$ e $u_n(s)$, e quindi $\|u_{n+1}-u_n\| \leqslant CM_1 \|u_n-u_{n-1}\|$; pertanto la condizione $CM_1 < 1$ assicura la convergenza uniforme delle successive approssimazioni.

Dopo ciò, con ragionamenti ben noti, si può concludere che il problema (5) ammette una ed una sola soluzione, data da $u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$.

E' opportuno pertanto fare, a titolo provvisorio, la seguente ipotesi:

<u>supporremo verificate le due condizioni</u>

(13) $$CM \leqslant \beta \quad , \qquad CM_1 < 1$$

le quali assicurano fra l'altro che <u>il nostro problema (5) ammette una ed una sola soluzione</u> $u(x)$, continua in $\bar{A}$ <u>con</u> $\|u\| \leqslant \beta$.

Indichiamo ora con $z(x)$ una qualsiasi funzione continua in $\bar{A}$ verificante la $\|z\| \leqslant \beta$. L'ipotesi (9) ci permette di scrivere [cfr. con la (4) di § 1] :

$$(14) \qquad f\,[x,u(x)] = \max_{z(x)} \Big\{ f[x,\ z(x)] + [u(x)-z(x)]\ f_u[x,z(x)] \Big\} ,$$

il massimo essendo conseguito soltanto per $z(x) = u(x)$. Ne segue che il nostro problema (5) può anche essere formulato così:

$$(15) \qquad E[u] = \max_{z}\ [f(x,z)+(u-z)f_u(x,z)], \quad (x \in A);\ L[u]=0, \quad (x \in \partial A)$$

e questo suggerisce di considerare accanto a (5) il seguente <u>problema lineare associato</u>, nell'incognita $w(x)$ e contenente la <u>funzione parametro</u> $z(x)$:

$$(16) \qquad E[w]=f(x,z)+(w-z)f_u(x,z), \quad (x \in A);\quad L[w]=0, \quad (x \in \partial A).$$

Questo nuovo problema si traduce nell'equazione integrale

$$w(x)=\int_{\bar{A}} G(x,s) \Big\{ f\,[s,\ z(s)] + [w(s)-z(s)]\ f_u[s,\ z(s)] \Big\}\, ds$$

che può, come dianzi, essere studiata col metodo delle approssimazioni successive. Riconosceremo fra poco l'opportunità di richiedere che risulti $\|w\| \leq \beta$. Per realizzare ciò basterà che tale condizione sia verificata dalle successive approssimazioni ed è subito visto che ciò si ottiene imponendo che sia $c(M+2\beta M_1) \leq \beta$. Si vede poi che la $CM_1 < 1$ (già considerata) assicura la convergenza uniforme di tali approssimazioni.

E' evidente che la $C(M+2\beta M_1) \leq \beta$ assorbe le (13) e perciò formuleremo la seguente:

<u>Ipotesi</u> III - <u>Supporremo verificata la condizione</u>

(17) $$C\,(M + 2\,\beta\,M_1) \leq \beta \quad ;$$

essa assicura che il nostro problema (5) ha una ed una sola soluzione $u(x)$, continua in $\bar{A}$ con $\|u\| \leq \beta$ e che ogni problema lineare (16) ad essa associato ammette pure una ed una soluzione $w(x)$, continua in $\bar{A}$ con $\|w\| \leq \beta$ [qualunque sia la funzione parametro $z(x)$, continua e con $\|z\| \leq \beta$].

A proposito della (17) ricordiamo che le costanti β, M, M_1 sono indipendenti dall'aperto A, mentre la costante C vi dipende.

Perciò la (17) è in sostanza una condizione per A; vedremo, nei casi particolari che esamineremo più avanti, che essa richiede che la misura n-dimensionale di A sia abbastanza piccola.

Veniamo infine all'ultima ipotesi che è la più impegnativa e che esprime una proprietà di monotonia degli operatori lineari E, L.

Ipotesi IV - Fissata comunque la funzione $z(x)$ (continua e con $\|z\| \leq \beta$), supponiamo che una funzione $\varphi(x)$ verifichi le seguenti condizioni

(18) $$E[\varphi] \geq f_u\,[x,\, z(x)]\,\varphi(x), \quad (x \in A); \quad L[\varphi] = 0, \quad (x \in \partial A);$$

allora si ha di conseguenza

$$(19) \qquad \varphi(x) \geqslant 0 \quad , \qquad (x \in \bar{A})^{(*)} ,$$

<u>riuscendo</u> $\varphi(x) \equiv 0$ <u>se e solo se la prima delle (18) sussiste col segno di uguaglianza</u>.

Questa ipotesi sarà ampiamente illustrata nel seguito.

2.2 - Vediamo ora una prima conseguenza delle ipotesi fatte. Mettiamo a confronto la soluzione $u(x)$ del problema (5) con la soluzione $w(x)$ di un qualsiasi problema associato (16), usando per quest'ultima anche la notazione $w\,[x\ ;\ z(x)]$ per mettere in evidenza che essa dipende dalla funzione parametro $z(x)$.

Da (15) segue

$$(20) \quad E[u] \geqslant f(x,z)+(u-z)f_u(x,z), \quad (x \in A); \quad L[u]=0, \quad (x \in \partial A)$$

e quindi sottraendo (16)

$$(21) \quad E[u-w] \geqslant (u-w)f_u(x,z), \quad (x \in A); \quad L[u-w]=0, \quad (x \in \partial A),$$

con la precisazione che qui vale il segno = solo se $z = u$. Da (21) segue, in virtù di (18) e (19):

(*) Oppure $\varphi(x) \leq 0$. In tal caso bisogna apportare a quanto diremo nel seguito alcune ovvie modificazioni; per esempio nella (22) occorre scrivere min in luogo di max, ecc. ecc.

$$u(x) - w(x) \geqslant 0 , \qquad (x \in \bar{A}) ,$$

riuscendo $u(x)-w(x) \equiv 0$ se e solo se $z = u$. Possiamo pertanto enunciare il seguente:

Teorema I - La soluzione $u(x)$ del problema (5) può rappresentarsi con la formula

$$u(x) = \max_{z(x)} w\left[x ; z(x)\right] \tag{22}$$

ove $w\left[x; z(x)\right]$ indica la soluzione del problema lineare associato (16), con la funzione parametro $z(x)$.

2.3 - La (22) può riguardarsi come l'analoga della (8) di § 1, relativa al metodo di Newton. Come in tale metodo, possiamo esaminare se è possibile costruire delle approssimazioni newtoniane $\left\{w_n(x)\right\}$, $(n = 1, 2,\ldots)$, ciascuna soluzione di un problema lineare associato (16), che convergano verso $u(x)$ in modo monotono e con convergenza quadratica.

Fissata una funzione parametro $z(x)$, costruiamo la successione $\left\{w_n(x)\right\}$ col seguente procedimento ricorrente [cfr. con (16)] :

$$E[w_1] = f(x,z)+(w_1-z)f_u(x,z), \quad (x \in A); \quad L[w_1] = 0, \quad (x \in \partial A), \tag{23}$$

$$E[w_{n+1}] = f(x,w_n)+(w_{n+1}-w_n)f_u(x,w_n), \quad (x \in A); \quad L[w_{n+1}] = 0, \quad (x \in \partial A), \tag{24}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots).$$

Ciò è certamente possibile, giacchè sappiamo che, in virtù della (17), risulta $\|w_1\| \leq \beta$ onde la w_1 può esser usata come funzione parametro nella (24) con $n = 1$; risulta poi, per la stessa ragione, $\|w_2\| \leq \beta$, onde la w_2 può esser usata come funzione parametro nella (24) con $n = 2$; e così di seguito.

Dimostriamo i seguenti teoremi:

Teorema II - La successione $\{w_n(x)\}$ definita da (23), (24) è, in ogni punto $x \in \bar{A}$, monotona non decrescente.

Dim. - Riscriviamo la (24) con n in luogo di $n+1$:

$$(25) \qquad E\,[w_n] = f(x,w_{n-1}) + (w_n - w_{n-1}) f_u(x,w_{n-1}) ,$$

$$(x \in A); \qquad L\,[w_n] = 0, \qquad (x \in \partial A).$$

Poichè [cfr. (14)] si ha

$$f(x,w_n) = \max_z \,[f(x,z) + (w_n - z) f_u(x,z)]$$

da (25) discende

$$E\,[w_n] \leq f(x,w_n), \qquad (x \in A); \qquad L\,[w_n] = 0, \qquad (x \in \partial A)$$

e quindi sottraendo da (24):

$$E\,[w_{n+1} - w_n] \geq (w_{n+1} - w_n) f_u(x,w_n), \qquad (x \in A);$$

$$L\,[w_{n+1} - w_n] = 0, \qquad (x \in \partial A).$$

Ne segue, per (18) e (19):

$$w_{n+1}(x) - w_n(x) \geqslant 0 , \qquad (x \in \bar{A}) .$$

<u>Teorema III - La successione</u> $\{w_n(x)\}$ <u>definita da (23), (24) converge uniformemente verso la soluzione</u> $u(x)$ <u>del problema (5)</u>.

<u>Dim</u>. - In virtù del teor.II, in ogni punto $x \in \bar{A}$ esiste finito il $\lim_{n \to \infty} w_n(x) = U(x)$.

D'altra parte dalla (24) discende

$$w_{n+1}(x)= \int_{\bar{A}} G(x,s)\Big\{f[s,\ w_n(s)] + [w_{n+1}(s)-w_n(s)]\, f_u[s,\ w_n(s)]\Big\}ds,$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3,........) .$$

Fissato x, operiamo su questa il passaggio al limite per $n \longrightarrow \infty$. Si può operare sotto il segno d'integrale perchè il valore assoluto dell'integrando non supera $|G(x,s)|\ (M+2\beta M_1)$ e questa è una funzione di s, <u>indipendente da</u> n <u>e sommabile in</u> $\bar{A}$. Si ottiene pertanto, tenendo anche conto della continuità di f e f_u :

$$U(x) = \int_{\bar{A}} G(x,s)f\,[s,\ U(s)]\ ds \quad .$$

Ne deriva che $U(x)$ è soluzione del problema (5) [cfr. con (11)] e quindi, essendo unica la soluzione di tale problema, si ha $U(x)=u(x)$. Dunque $\lim_{n \to \infty} w_n(x)=u(x)$ e siccome in $\bar{A}$ le funzioni <u>continue</u> $w_n(x)$ tendono <u>non decrescendo</u> alla funzione <u>continua</u> $u(x)$, per un noto teorema di Dini, la convergenza è uniforme.

<u>Teorema IV</u> - <u>La convergenza della successione</u> $\{w_n(x)\}$, <u>verso la funzione</u> $u(x)$, <u>è quadratica nel senso che</u>

$$\|u-w_{n+1}\| \leq k\,\|u-w_n\|^2 , \qquad (n=1,\ 2,\ldots\ldots) \tag{26}$$

<u>con</u> k <u>costante indipendente da</u> n .

<u>Dim</u>. - Da (5) e (24) si ricava

$$E\,[u-w_{n+1}] = f(x,u)-f(x,w_n)-(u-w_n)f_u(x,w_n) + \\ + (u-w_{n+1})f_u(x,w_n) ,$$

$$(x \in A); \quad L\,[u-w_{n+1}] =0, \qquad (x \in \partial A)$$

e quindi

$$u(x)-w_{n+1}(x)= \int_{\bar{A}} G(x,s)\Big\{ f[s,u(s)]-f\,[s,w_n(s)]- \\ -[u(s)-w_n(s)]\,f_u[s,w_n(s)]+[u(s)- \\ -w_{n+1}(s)]\,f_u\,[s,w_n(s)\,]\Big\}\,ds$$

ovvero, applicando la formula di Taylor

$$u(x)-w_{n+1}(x)= \int_{\bar{A}} G(x,s)\Big\{ \tfrac{1}{2}[u(s)-w_n(s)]^2\, f_{uu}[s,\bar{w}_n(s)] + \\ +[u(s)-w_{n+1}(s)]\, f_u\,[s,w_n(s)]\Big\}\,ds$$

$$(\text{con}\quad w_n(s) \leq \bar{w}_n(s) \leq u(s)).$$

Ne segue

$$\|u-w_{n+1}\| \leq C\left\{\frac{1}{2}\|u-w_n\|^2 M_2 + \|u-w_{n+1}\| M\right\} ,$$

ossia

$$(1-CM_1)\|u-w_{n+1}\| \leq \frac{1}{2} CM_2 \|u-w_n\|^2 ;$$

ricordando che $1-CM_1 > 0$ [cfr. (13)] , si conclude che sussiste la (26) con

$$k = \frac{1}{2}\frac{CM_2}{1-CM_1} .$$

2.4 - Esamineremo nei successivi § 3, 4, 5, 6 quattro casi particolari notevoli; verrà così meglio messa in luce la natura dell'ipotesi IV che, come si è visto, è essenziale per la validità dei teor.I, II, III, IV .

§ 3 - Caso particolare delle equazioni differenziali ordinarie del 1° ordine.

3.1 - Detta x una variabile reale, consideriamo, come caso particolare del problema (5) di § 2, il seguente problema:

(1) $$u' = f(x,u) , \quad u(0) = 0 , \quad (0 \leq x \leq a) .$$

Passiamo ad esaminare le quattro ipotesi poste nel § 2 ; vedremo che la I e la IV sono senz'altro soddisfatte, onde rimarranno soltanto la II (esprimente condizioni per la funzione f) e la III (esprimente che il numero a deve essere abbastanza piccolo).

Per quanto riguarda l'ipotesi I, essa è soddisfatta perchè il problema $v'(x)=g(x)$, $v(0)=0$ ha la soluzione $v(x)=\int_0^x g(s)\,ds$, cosicchè la funzione di Green $G(x, s)$ è espressa dalla

$$G(x,s)=\begin{cases} 1 & (0 \leq s \leq x \leq a) \\ 0 & (0 \leq x \leq s \leq a) \end{cases} ,$$

il che implica

$$C = \left\| \int_0^a |G(x,s)|\,ds \right\| = \|x\| = a \qquad (2)$$

L'ipotesi IV è pure verificata, come conseguenza del seguente elementarissimo:

<u>Lemma</u> - <u>Qualunque sia la funzione</u> $p(x)$ <u>continua in</u> $[0,a]$, <u>le due condizioni</u>

$$\varphi'(x)+p(x)\varphi(x) \geq 0 , \qquad \varphi(0) = 0, \qquad (0 \leq x \leq a) \qquad (3)$$

<u>implicano</u>

$$\varphi(x) \geq 0 , \qquad (0 \leq x \leq a) ,$$

<u>riuscendo</u> $\varphi(x)\equiv 0$ <u>se la prima delle (3) sussiste col segno d'uguaglianza</u>.

<u>Dim</u>. - Posto infatti $\varphi'(x)+p(x)\varphi(x)=q(x)$ con $q(x)\geqslant 0$, si ricava

$$\varphi(x) = \int_0^x q(s)\, e^{-\int_s^x p(t)dt}\, ds$$

e quindi immediatamente la tesi.

<u>L'ipotesi II richiede che</u> $f(x,u)$, $f_u(x,u)$, $f_{uu}(x,u)$ <u>siano continue per</u> $0\leq x\leq \alpha$(*), $|u|\leq\beta$ <u>e che risulti</u>

(4) $$f_{uu}(x,u) > 0 \quad .$$

Tenendo conto di (2), <u>l'ipotesi III richiede infine che sia</u>

(5) $$a\leq \frac{\beta}{M+2\beta M_1} \qquad \text{(oltre che } a\leq\alpha\text{)}.$$

Soddisfatte queste due ipotesi, valgono i quattro teoremi del § 2 . Osservato che, in questo caso particolare, il problema lineare associato

(6) $$w' = f(x,z)+(w-z)f_u(x,z), \qquad w(0)=0$$

ha la soluzione esplicita

(*) Si sceglierà il numero a del problema (1) in modo che $a\leq\alpha$.

$$(7) \quad w(x)=\int_0^x \left\{ f[s, z(s)] - z(s)\, f_u[s, z(s)] \right\} e^{\int_s^x f_u[t,\, z(t)]\, dt}\, ds \; ,$$

possiamo conglobare i predetti teoremi nell'unico enunciato:

Teorema - Supposte verificate la (4) e la (5), la soluzione $u(x)$ del problema (1) può esprimersi con la

$$(8) \qquad u(x) = \max_{z(x)} \; w\,[x;\, z(x)] \quad ,$$

ove $w[x;\, z(x)]$ indica il secondo membro di (7). Partendo da una $z(x)$ e costruendo in $[0 \, , \, a]$ le approssimazioni newtoniane $w_n(x)$ secondo lo schema

$$(9) \quad w_1(x)=w\,[x;\, z(x)] \;\; ; \quad w_{n+1}(x)=w[x;\, w_n(x)] \, ,$$

$$(n = 1,\, 2,\, 3, \ldots\ldots),$$

la successione ottenuta $\{w_n(x)\}$ è non decrescente e converge uniformemente verso $u(x)$, con convergenza quadratica.

Il procedimento descritto può essere applicato al calcolo numerico di $u(x)$.
Naturalmente, per il calcolo delle $w_n(x)$ non si applicherà la (7), ma ci si servirà di un procedimento di integrazione numerica p.es. di Runge-Kutta, applicato alla (6).

Un esempio interessante, che mette in evidenza la rapidità della convergenza è dato in R.Kalaba [6]. Viene considerato il problema $u' = u^2+1$, $u(0) = 0$ che ha la soluzione $u = \mathrm{tg}\, x$ per $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

3.2 - Il precedente teorema può in particolare applicarsi all'<u>equazione di Riccati</u>

(10) $u'=p(x)\,u^2+q(x)\,u+r(x)$, $u(0)=0$, $(0\le x\le a)$,

la condizione (4) riducendosi allora alla

(11) $$p(x) > 0 \quad .$$

Si suppongono $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ continue in un certo intervallo $[0\ ,\alpha]$ (e sarà $a\le\alpha$) e poichè il secondo membro dell'equazione (10) ha senso qualunque sia u , si può fissare per il numero positivo β introdotto nel § 2 un valore qualsiasi.

Posto $\|p\| = P > 0$, $\|q\| = Q$, $\|r\| = R > 0$ (*) nell'intervallo $[0\ ,\alpha]$, si può assumere $M=P\beta^2+Q\beta + R$, $M_1 = 2P\beta +Q$; con ciò la condizione (5) diventa

$$a\le\frac{\beta}{5\ P\beta^2+3\ Q\beta + R} \quad \text{(oltre che } a\le\alpha\text{).}$$

Conviene assumere $\beta=\sqrt{\dfrac{R}{5\ P}}$ (che rende massima la funzione $\dfrac{\beta}{5\ P\beta^2+ 3\ Q\beta+R}$) e scrivere la (5) nella forma

(12) $$a\le\frac{1}{3Q\ +2\sqrt{5PR}} \qquad \text{(oltre che } a\le\alpha\text{).}$$

<u>Sotto le condizioni (11), (12) valgono per il problema (10) la proprietà espresse dal precedente teorema</u>. Si noti che in questo caso la (7) diventa

---

(*) Supponiamo $r(x)$ non identicamente nulla, per non cadere nel caso elementare dell'equazione di Bernouilli.