

Peter Geiss / Roland Ißler / Rainer Kaenders (Hg.)

Fachkulturen in der Lehrerbildung

Bonn University Press



V&R Academic

Wissenschaft und Lehrerbildung

Band 1

Herausgegeben von

Peter Geiss und Roland Ißler

Peter Geiss / Roland Ißler /
Rainer Kaenders (Hg.)

Fachkulturen in der Lehrerbildung

Unter Mitarbeit von Victor Henri Jaeschke

V&R unipress

Bonn University Press



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-8471-0559-6

ISBN 978-3-8470-0559-9 (E-Book)

ISBN 978-3-7370-0559-3 (V&R eLibrary)

Weitere Ausgaben und Online-Angebote sind erhältlich unter: www.v-r.de

Gedruckt mit freundlicher Unterstützung des Bonner Zentrums für Lehrerbildung.

Rechtlicher Hinweis:

Die Herausgeber distanzieren sich von den Inhalten, die auf den in diesem Band zitierten Internetseiten eingestellt sind, und machen sich diese nicht zu eigen.

© 2016, V&R unipress GmbH, Robert-Bosch-Breite 6, D-37079 Göttingen / www.v-r.de

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt.

Jede Verwertung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

Printed in Germany.

Titelbild: © Rainer Kaenders

Druck und Bindung: CPI buchbuecher.de GmbH, Zum Alten Berg 24, D-96158 Birkach

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier.

Inhalt

Robert Glaum	
Grußwort	7
Peter Geiss, Roland Ißler und Rainer Kaenders	
Fachkulturen in der Lehrerbildung. Einleitung	11
Stephan Berendonk	
Mathematik als Prozess – am Beispiel des Pythagoras	19
Reinhold Boschki	
Religionsdidaktik in Theorie und Praxis. Exemplarische aktuelle Entwürfe	39
Peter Geiss	
»Wozu brauche ich das alles im Unterricht?« – Geschichtswissenschaft in der Lehrerbildung	61
Roland W. Henke	
Die Entwicklung philosophischer Urteilskompetenz durch kognitive Konflikte	95
Roland Ißler	
Mehrsprachigkeit und kulturelle Vielfalt. Ein bildungsorientierter Ansatz für die romanischen Fremdsprachendidaktiken	107
Ursula Jünger	
Grundpositionen zur Ausbildung von Deutschlehrerinnen und -lehrern am Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung Bonn	155
Rainer Kaenders	
Die Ableitung von $f(x) = x^n$ in Schulbüchern dreier Zeitphasen	161

Uwe Küchler Fremdsprachendidaktik als interdisziplinäre Wissenschaft: Ökologie, Umwelt und die Inhaltsfrage	179
Volker Ladenthin Zum Verhältnis von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Bildungswissenschaft	195
Ulrike Mess Das Leitziel der interkulturellen kommunikativen Handlungskompetenz und seine Konsequenzen für die Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern im Fach Englisch	213
Florian Radvan Texttheater. Literarische Edition und Bühne im Deutschunterricht	221
Annette Scheersoi Lebewesen erforschen – biologiedidaktische Ansätze in der Lehrerbildung	241
Werner Schumann Raumkonzepte als Leitlinien fachdidaktischer Ansätze	251
Hiltrud Stärk-Lemaire »Perspektivenwechsel« und »Unterscheidungskunst«. Überlegungen zu den Spezifika einer Fachkultur evangelischer Religion anhand einer Umfrage unter Studenten	257
Barbara Utz Bedeutung von fachdidaktischen und fachwissenschaftlichen Vorkenntnissen für die zweite Phase der Lehrerbildung. Perspektive einer Seminarausbilderin	263
Vera Wethkamp, Thomas Hildebrand und Ulrich Blum Lehramtsstudium Physik an der Universität Bonn. Praxisorientierte und fachdidaktische Begleitung vom Lernenden zum Lehrenden	281
Abbildungsverzeichnis	301
Autorenverzeichnis	303

Grußwort

Die Lehrerbildung an der Universität Bonn erfolgt unter besonderen Rahmenbedingungen. Der Zusammenarbeit der verschiedenen Fachdidaktiken über Fakultätsgrenzen hinweg, mit der Bildungswissenschaft und mit allen anderen Akteuren der Lehrerbildung in der Region Bonn, allen voran dem Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung (ZfsL) Bonn, kommt dabei zentrale Bedeutung zu. Als Plattform für den Austausch zwischen den verschiedenen Beteiligten wurde die AG Fachdidaktiken am Bonner Zentrum für Lehrerbildung (BZL) ins Leben gerufen. Der vorliegende Band enthält eine Zusammenstellung von Beiträgen zur ersten Tagung der Arbeitsgemeinschaft am 5. und 6. Juni 2014. Dabei spiegeln bereits die Institutionen der Autoren die enge und vertrauensvolle, über die Grenzen der Universität hinausgehende Zusammenarbeit in der Lehrerbildung innerhalb der Region Bonn wider.

Ich möchte die Möglichkeit nutzen, zur Veranschaulichung der Besonderheiten der Lehrerbildung an der Universität Bonn und zur Bedeutung der AG Fachdidaktiken einige Erläuterungen zu geben. Seit 2011 bietet die Universität Bonn wieder Studiengänge für das Lehramt an Gymnasien, Gesamtschulen und Berufskollegs an und setzt damit eine 200-jährige Tradition in Bonn fort, die für ein Jahrzehnt unterbrochen war. Maßgeblich für die Entscheidung zur Wiederaufnahme der Lehrerbildung war und ist die Überzeugung, dass sich eine Universität, die sich als international kooperierende Forschungseinrichtung versteht, in der Lehrerbildung engagieren und damit einen weiteren Beitrag zu einem forschungsgeleiteten Bildungssystem erbringen sollte. Die enge Verzahnung der Universität mit den Schulen der Region Bonn und die sich daraus ergebenden Entwicklungsmöglichkeiten stellten einen weiteren Beweggrund dar, die Lehrerbildung – im Spannungsfeld zwischen Praxisbezug und Wissenschaftsnähe – wieder aufzunehmen. Mit dem Neubeginn erfolgt die Lehrerbildung im gestuften System mit den Abschlüssen *Bachelor of Arts* bzw. *Bachelor of Science* und *Master of Education*. Die Konzentration auf zwei Lehramtstypen bei jährlich knapp 400 Studienanfängern im Bachelor ermöglicht

eine intensive Einbindung der Studierenden in ihre Fächer und die Bildungswissenschaft wie auch in die Schullandschaft der Ausbildungsregion.

Für das Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen bietet die Universität Bonn 18 Fächer an, für das Lehramt an Berufskollegs zwei Große berufliche Fachrichtungen (Agrarwissenschaft, Ernährungs- und Hauswirtschaftswissenschaft, beide in Nordrhein-Westfalen an Universitäten exklusiv). Im Bereich der Bildungswissenschaft stehen für das lehramtsbezogene Studienangebot drei Professuren zur Verfügung, die dem Bonner Zentrum für Lehrerbildung zugeordnet sind. Seit Wiedereinführung der Lehrerbildung ist die Zahl der fachdidaktischen Professuren auf zehn gestiegen. In einer Reihe von Fächern erfolgt die fachdidaktische Qualifizierung der Studierenden durch abgeordnete Lehrer. Die fachdidaktischen Professuren und die Abordnungslehrer sind den Fakultäten zugeordnet, um so dem Anspruch enger wechselseitiger Bezugnahme von Fachwissenschaften und Fachdidaktiken gerecht zu werden.

In den Jahren 2011 bis 2014 sind die Lehramtsstudiengänge komplett akkreditiert worden. Trotzdem befindet sich die Lehrerbildung an der Universität Bonn vier Jahre nach ihrer Wiederaufnahme noch in der Aufbauphase. Dabei ist die innovative Verbindung von Praxisbezug und Wissenschaftsnähe in der Lehrerbildung zugleich Leitbild wie permanente Herausforderung, deren Ziel darin besteht, die Lehramtsstudierenden umfassend mit den Herausforderungen einer komplexen Berufspraxis vertraut zu machen. Gleichzeitig soll das Lehramtsstudium an der Universität Bonn in Bildungswissenschaft, Fachdidaktiken und Fachwissenschaften forschungs- und wissenschaftsnah erfolgen und so dem Selbstverständnis einer Forschungsuniversität und den Herausforderungen moderner und global agierender Wissensgesellschaften entsprechen. Das impliziert die Integration des Lehramtsstudiums in das fachwissenschaftliche Studium, bei der den Fachdidaktiken eine wichtige Mittlerposition zukommt, aber auch die kontinuierliche wissenschaftliche Begleitung und Reflexion von Lehrerbildung und Praxisphasen, die wesentlich von Bildungswissenschaft und Fachdidaktiken getragen wird. Ziel ist es, die Absolventen des Lehramtsstudiums als »reflective practitioner« (Donald A. Schön) für Referendariat und Berufstätigkeit qualifiziert zu haben.

Es ist sicher eine Stärke der Lehrerbildung an der Universität Bonn, dass sich durch zehnjährige Unterbrechung und Neustart zum Wintersemester 2011/12 besondere Gestaltungsmöglichkeiten ergeben haben. Dazu gehört die vollständige Umsetzung der Strukturvorgaben des Lehrerausbildungsgesetzes 2009: Polyvalenz des Bachelorabschlusses bei Einbettung berufsbezogener Praktika, Ausrichtung des *Master of Education* auf das Berufsziel Lehramt mit den Pflichtmodulen »Deutsch für Schülerinnen und Schüler mit Zuwanderungsgeschichte« sowie »Diagnose und Förderung« (Stichwort: Heterogenität) und das Praxissemester.

Eine Besonderheit innerhalb der Lehrerbildung in Nordrhein-Westfalen ist der Zuschnitt der Ausbildungsregion Bonn: Dem BZL ist genau ein ZfsL zugeordnet. Zudem ermöglicht die räumliche Nähe einen sehr engen Austausch mit den 42 Ausbildungsschulen der Region. Diese enge Verzahnung der verschiedenen Bereiche der Lehrerbildung, wie sie die Region Bonn aufweist, ist in Nordrhein-Westfalen einzigartig. Sie hat bisher bereits ihren Ausdruck in der gemeinsamen Vorbereitung des Praxissemesters gefunden, bei der in fächer-spezifischen Arbeitsgruppen Fachdidaktiker, die Fachleiter des ZfsL Bonn und Lehrer der Ausbildungsschulen eng kooperierten und aufeinander abgestimmte Curricula für die Lernorte Universität, ZfsL und Schule entwickelten. Wie die ersten Reaktionen von Lehrenden und Studierenden im seit September 2015 laufenden ersten Durchgang des Praxissemesters zeigen, war die Einführung des Praxissemesters im Rahmen des Studiengangs *Master of Education* sehr erfolgreich.

Trotz der mehrjährigen Unterbrechung kann die Lehrerbildung an bestehende intensive Kontakte zu den Schulen der Region, etwa über das Fördern-Fordern-Forschen-Programm¹ anknüpfen. Zudem bestehen mit sechs Gymnasien in der Region (davon eines mit einem Schwerpunkt in der Hochbegabtenförderung, hinzu kommt eine Kooperationsschule in Spanien) feste Kooperationsvereinbarungen. Zahlreiche Fächer bieten seit Jahren Maßnahmen zur Fortbildung von Lehrern an. Bewährte Kontakte bestehen auch zu außerschulischen Bildungseinrichtungen, insbesondere zum Deutschen Museum Bonn, zum Forschungsmuseum Alexander Koenig, zum Haus der Geschichte und zum Rheinischen Landesmuseum.

In dem nun vorliegenden Band mit den Beiträgen zur ersten Tagung der AG Fachdidaktiken unter dem Motto »Fachkulturen in der Lehrerbildung« wird die vorstehend skizzierte Situation der Lehrerbildung an der Universität Bonn und der Region widergespiegelt. Dazu gehören die Herausarbeitung der Unterschiede und Gemeinsamkeiten der verschiedenen Fachdidaktiken ebenso wie der intensive Austausch mit dem ZfsL und den Schulen der Region. Ich freue mich sehr, dass diese Bedeutung auch vom Ministerium für Innovation, Wissenschaft und Forschung Nordrhein-Westfalen anerkannt wird, was sich in der expliziten Zusage von Mitteln für die Durchführung von Nachfolgetagungen in den nächsten Jahren manifestiert. Die nachfolgenden Beiträge enthalten Beobachtungen, Erfahrungen, Analysen, Schlussfolgerungen und Ausblicke vieler Kolleginnen und Kollegen aus Universität und ZfsL zum gegenwärtigen Stand der Lehrerbildung. Mit den dabei beleuchteten sehr unterschiedlichen Facetten der Lehrerbildung und der Fachdidaktiken gibt der Band zugleich eine Standortbestimmung und sehr anregende Ausblicke zur weiteren Entwicklung. In

1 Nähere Informationen hierzu unter URL: www.fff.uni-bonn.de [19.12.2015].

diesem Sinn wünsche ich den Herausgebern viel Erfolg und gute Resonanz mit der nun begonnenen Reihe.

Bonn, im Dezember 2015
Prof. Dr. Robert Glaum, Vorsitzender des Vorstands des
Bonner Zentrums für Lehrerbildung (BZL)

Fachkulturen in der Lehrerbildung

Einleitung

»Lehrer sollen Schüler unterrichten, nicht Fächer!«¹ – Wer hat ihn nicht irgendwann gehört, diesen beliebten und scheinbar so richtigen Satz? Aber auch wenn er gerade am Übergang von der Wissenschaftswelt der Universität in die schulische Praxis überzeugend wirken mag, so ist er doch bei näherer Betrachtung absurd. Was bedeutet »unterrichten«, wenn es nicht um einen Gegenstand geht, der unterrichtet werden soll? Will die Schule sich nicht mit reinen Erziehungsfunktionen begnügen, so kann Unterricht nicht anders legitimiert werden als durch die Vermittlung von Inhalten in Fächern. Es müsste daher heißen: »Lehrer sollen Schüler unterrichten, und zwar durchaus und nicht zuletzt in Fächern.«²

Zwar trifft es zu, dass die gesellschaftliche Wirklichkeit heute eine Vielzahl von Anforderungen an Lehrkräfte stellt, die mit den von ihnen studierten Disziplinen nicht viel zu tun haben. Da gilt es etwa, schwierige Gespräche mit Eltern zu führen, die sich durch die Erziehung ihrer Kinder überfordert sehen, Schüler zu schützen, die sich im Internet der Anprangerung durch Gleichaltrige ausgesetzt sehen; es gilt, soziale Leistungen von Einzelnen und Gruppen durch ermutigendes Lob zu würdigen, und es gehört zu den grundlegenden Notwendigkeiten des Lehrberufs, der Vielfalt der Schüler in einer Klasse täglich aufs Neue gerecht zu werden. Gefragt sind Persönlichkeiten, die durch Humor und vielleicht sogar eine Portion Selbstironie deutlich machen, dass Lehrer auch nur Menschen sind – und eben nicht enzyklopädische Wissensvermittler und unfehlbare Richter über die Leistung anderer.³ All dies sind Herausforderungen, die wenig mit den universitären Wissenschaftsdisziplinen zusammenhängen

1 Hier zit. nach Gertraud Eibl, Lehrer sollen Schüler unterrichten, nicht Fächer. Über den Erfolg alternativer Bildungskonzepte, in: Die Zeit, 24.01.2004, zit. nach URL: <http://www.zeit.de/2004/27/alternbildung> [16.10.2015].

2 Bei auf Personen bezogenen Begriffen wie »Schüler«, »Lehrer« etc. steht die grammatisch männliche Form immer für beide Geschlechter.

3 Vgl. dazu z.B. Hermann Giesecke, Was Lehrer leisten. Porträt eines schwierigen Berufes, Weinheim / München 2001.

und auf die man sich überdies auch durch noch so ausgefeilte Lehrangebote und ›Trockenübungen‹ schlecht vorbereiten kann, weil sie nicht mit vermittelbaren Techniken, sondern zentral mit dem zusammenhängen, was man mit den zu Unrecht im Ruch des Altmodischen stehenden Begriffen ›Persönlichkeit‹ und ›Erfahrung‹ bezeichnen kann.⁴

Ein Denkfehler mancher Teilnehmer an aktuellen Bildungsdebatten besteht darin, pädagogische Fähigkeiten gegen fachspezifische Qualifikationen auszuspielen und so fast den Eindruck zu vermitteln, es sei für Erfolg im Lehrberuf nicht so wichtig, ob man nun Ahnung vom eigenen Fach habe oder nicht, solange man nur ›mit Menschen umgehen‹ könne. Dieses Auseinanderdividieren fachlicher und pädagogischer beziehungsweise allgemein menschlicher Voraussetzungen untergräbt die Professionalität des Lehramts. Spätestens wenn Referendare in der gymnasialen Oberstufe innovativen Geschichtsunterricht zu so komplexen Längsschnitt-Reihen wie »Friedensschlüsse und Ordnungen des Friedens in der Moderne« konzipieren und dabei mit ihren Schülern einmal eben »die Stabilität der Friedensordnungen von 1815 und 1919« im Vergleich »beurteilen« müssen, stellen sie fest, dass fachliches Wissen und die Beherrschung fachwissenschaftlicher Methoden alles andere als praxisfern und unwichtig sind.⁵ Ähnliches gilt für die modale Verwendung von Tempora in den romanischen Schulsprachen oder für komplexe gesellschaftliche und politische Einschätzungen im Kontext des Fremdsprachenunterrichts, etwa zur Unabhängigkeit Kataloniens, zum Laizismus in Frankreich oder zum italienischen Parteiensystem. Mathematiklehrer sollen ihre Schüler dazu bringen, dass sie »mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern, als geistige Schöpfungen verstehen und weiterentwickeln.«⁶ Sie unterrichten griechische Geometrie und modernen Zahlbegriff, wozu sie den Unterschied zwischen Inkommensurabilität und Irrationalität kennen und dann beispielsweise in der Lage sein sollten, schriftliche Division, den euklidischen Algorithmus der Wechselwagnahme, die Irrationalität von

4 Zur Lehrerpersönlichkeit und zur Bedeutung von Humor jüngst der ehemalige Schulleiter und Beschwerdemanager Dirk Stötzer im Interview mit Julia Schaaß: Die Lehrerpersönlichkeit kann man nicht lernen, in: Frankfurter Allgemeine Sonntagszeitung, 23.08.2015, zit. nach dem Digitalisat, erreichbar unter URL: http://faz-archiv-approved.faz.net/intranet/biblionet/r_suche/FAZ.ein [16.12.2015]; vgl. zur Rolle der Persönlichkeit auch im Kontext der schulpraktischen Lehrerbildung den Beitrag von Barbara Utz im vorliegenden Band.

5 Inhaltsfeld 7 in: Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.), Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Geschichte, Düsseldorf 2014, S. 33, zit. nach URL: http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/ge/KLP_GOST_Geschichte.pdf [16.10.2015].

6 Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.), Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik, Frechen 2007, S. 11, zit. nach URL: http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf [16.10.2015].

Zahlen, das Schubfachprinzip, den kleinen Satz von Fermat und den Satz von Euler oder die Polynomdivision für die langfristige Begriffsentwicklung zu nutzen.

Beispiele aus anderen Fächern ließen sich mühelos finden. Schon in der Sekundarstufe I und selbst im Primarstufenunterricht wird sich schnell die Erfahrung machen lassen, dass fachwissenschaftliche und – untrennbar damit verbunden – fachdidaktische Qualifikationen für das Meistern alltäglicher Unterrichtsherausforderungen unabdingbar sind.⁷ Wie soll ein fachlicher Inhalt denn kindgerecht aufbereitet und perspektiviert werden, wenn er zuvor nicht wenigstens ansatzweise in seinem wissenschaftlichen Gehalt erfasst wurde? Der Chemiedidaktiker David S. Di Fuccia hat dazu im Rekurs auf die COACTIV-Studie eine ebenso schlichte wie treffende Einsicht formuliert: »Was man nicht weiß, kann man nicht verstehen[,] und was man nicht verstanden hat, kann man nicht erklären.«⁸

Kinder sind Forscher – und zwar oft schon lange bevor sie erstmals im Leben die Schwelle eines Schulgebäudes überschreiten. Es ist ein Irrtum, zu glauben, guter Unterricht müsse sie gewissermaßen vor der Wissenschaft schützen, und daraus die Forderung abzuleiten, schon Lehramtsanwärtern Fragen, Methoden und Erträge fachwissenschaftlicher Forschung nach Möglichkeit nur in homöopathischen Dosen zu verabreichen. Wer an der Schule unterrichtet, erlebt vielfach, dass Kinder den Dingen auf den Grund gehen wollen und fachlich fundierte Antworten auf ihre Fragen erwarten.⁹ Schon ein Fünfjähriger kann nach der Unendlichkeit der Zahlen fragen oder sich dafür interessieren, wie sich

7 Auf einen Zusammenhang zwischen fachlichem und fachdidaktischem Wissen weisen Krauss u. a. mit Blick auf gymnasiale Lehrkräfte hin, sehen ihn aber weniger für Lehrkräfte anderer Schulformen: Stefan Krauss u. a., Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie, in: Journal für Mathematikdidaktik (JMD) 29, 3/4 (2008), S. 223–258, hier S. 251, zit. nach URL: http://www.mathematik.uni-regensburg.de/Didaktik/studium_krauss_downloads_art1_COACTIV.pdf [02.10.2015].

8 David S. Di Fuccia, Fachlichkeit als wichtiger Baustein der Lehrerbildung: Blick in die verschiedenen Bundesländer, Rede im Rahmen der Fachtagung »Lehrerbildung in Bayern. Professionalität und Qualität«, 20. November 2010, ausgerichtet von der Arbeitsgemeinschaft Bayerischer Lehrerverbände, S. 3, zit. nach URL: <http://www.abl-lehrerverbaende.de/mobile/smartphone/downloads/vortrag-prof-di-fuccia.pdf> [02.10.2015].

9 Vgl. etwa die von der Deutschen Kinder- und Jugendstiftung herausgegebene Broschüre »Kinder entdecken die Welt. Forschendes Lernen in Lernwerkstätten von Kitas und Grundschulen«, Berlin o. J., verfügbar unter URL: https://www.dkjs.de/fileadmin/Redaktion/user_upload/Broschuere_Kinder_entdecken_die_Welt.pdf [16.10.2015]. Auf Forschungsinteressen von Kindern und Jugendlichen reagiert die Universität Bonn u. a. mit folgenden Angeboten: »Kinderuni«, Information unter URL: <http://www3.uni-bonn.de/studium/junge-uni/kinderuni> [20.10.2015]; »Fördern, Fordern, Forschen. Frühstudium für Schüler«, koordiniert von Thoralf Räscher, Information unter URL: <http://www.fff.uni-bonn.de/projekt> [20.10.2015].

Vulkanausbrüche vorhersagen lassen, warum Ebbe und Flut einander in bestimmten Zeiträumen abwechseln, welche Akkorde dissonant klingen, wo das Weltall endet und wann es entstanden ist oder warum die Menschen gegeneinander Krieg führen. Damit betritt ein Kind zweifellos von sich aus das weite und abenteuerliche Land der Forschung. Warum sollte man ihm durch vermeintlich ›kindgerechte‹ Wissenschaftsferne in Erziehung und Unterricht die Suche nach Antworten verweigern?

Mit Blick auf eine motivierende Gestaltung schulischer Lernprozesse ist die in einem wissenschaftlichen Studium erworbene Fachkompetenz ebenso unabdingbar wie die Identifikation mit der eigenen Disziplin bzw. den Disziplinen. Für ein Fach begeistern kann bekanntlich nur, wer selbst Feuer und Flamme dafür ist – und dies setzt eine Vertrautheit mit disziplinären Fragen, Gegenständen und Methoden voraus, die sich ohne ein dezidiert wissenschaftlich ausgerichtetes Studium wohl kaum erreichen lässt.¹⁰ Nur die sichere Kenntnis fachwissenschaftlicher Inhalte ermöglicht auch die richtige Einschätzung ihres didaktischen Potenzials, ihrer Komplikationen und Grenzen.¹¹ Fachliche Talente kann nur ein Lehrer entdecken, der mit beiden Beinen auf dem Boden des Faches steht. Auch die pädagogische Autorität ist zwar nicht ausschließlich, aber doch wesentlich davon abhängig, dass Lehrkräfte über ein solides fachwissenschaftliches Fundament verfügen. Wenig unterminiert diese Autorität im Schulalltag stärker, als von anderen Leistungen zu verlangen, die man selbst nicht erbringen und bei ehrlicher Betrachtung auch nicht beurteilen kann. Wer dagegen insgesamt über ein hohes fachwissenschaftliches Kompetenzniveau verfügt, wird Wissenslücken ohne Angst vor einem Gesichtsverlust einräumen können und so auch deutlich machen, dass der Prozess des fachlichen Lernens mit dem Universitätsabschluss keineswegs endet.

Ausgehend von der Annahme, dass gerade ein in hohem Maße praxisorientiertes Lehramtsstudium wesentlich aus den universitären Disziplinen heraus zu entwickeln ist, haben das Bonner Zentrum für Lehrerbildung (BZL) und die Herausgeber des vorliegenden Bandes gemeinsam Kollegen aus Universität und schulpraktischer Lehrerbildung dazu eingeladen, sich Gedanken über die Rolle der Fachkulturen¹² in der Lehrerbildung zu machen.

10 Vgl. Krauss u. a., Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer, S. 228; für den Geschichtsunterricht: Horst Gies, Geschichtsunterricht. Ein Handbuch zur Unterrichtsplanung, in Zusammenarbeit mit Michele Barricelli und Matthias Toepfer, Köln u. a. 2004 (UTB 2619), S. 27, zit. nach dem Digitalisat unter URL: <http://www.utb-studi-e-book.de/> [17. 10. 2015].

11 Vgl. Lieselotte Steinbrügge, Didaktische Transformationen. Fremdsprachendidaktik zwischen Unterrichtspraxis und philologischer Wissenschaft, in: Adelheid Schumann / Dies. (Hg.), Didaktische Transformation und Konstruktion. Zum Verhältnis von Fachwissenschaft und Fremdsprachendidaktik, Frankfurt a.M. 2008, S. 13–21, hier S. 19.

12 Vgl. Ludwig Huber, Fachkulturen: Über die Mühen der Verständigung zwischen den Dis-

Hieraus sind Vorträge einer Tagung der Bonner Fachdidaktiken am 5. und 6. Juni 2014 – der ersten seit Wiedereinführung des Lehramtsstudiums an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität – hervorgegangen, die der vorliegende Band in teilweise erweiterten und überarbeiteten Aufsatzfassungen dokumentiert. Sehr gefreut haben wir uns darüber, dass mehrere Vertreter des Bonner Zentrums für schulpraktische Lehrerausbildung (ZfsL) die Tagung durch Statements um eine unmittelbare Praxisperspektive bereichert haben. Ihren Beitrag möchten wir auch deshalb mit besonderer Dankbarkeit hervorheben, weil dies nicht zu ihrem Alltagsgeschäft gehört. Die unter dem Rubrum »Praxisperspektiven« versammelten Beiträge rekurrieren unmittelbar auf unterrichtspraktische Erfahrungen und aktuelle Ausbildungsdiskurse der schulpraktischen Lehrerausbildung.

Besonders in den hier leider nicht zu dokumentierenden Diskussionen zwischen den fachbezogenen Vorträgen wurde deutlich, dass die Bonner Lehrerbildung interdisziplinäre Brückenschläge unterstützt, die in einem so weiten Fächerspektrum wohl sonst nur in wenigen Bereichen der Universität möglich sind. Vielleicht können sie über das Feld der Didaktiken hinaus dabei helfen, das Gespräch zwischen Disziplinen zu fördern, die für gewöhnlich nicht so häufig miteinander in Kontakt kommen. Ludwig Huber ging davon aus, dass »Hochschulkultur« als Resultat enger und nicht nur oberflächlicher interdisziplinärer Vernetzung dann entstehen kann, wenn aus den Horizonten der verschiedenen Fachkulturen heraus gemeinsam an einer »Dritten Sache« gearbeitet wird.¹³ Möglicherweise kann die Lehrerbildung genau die Funktion einer solchen nicht in den Einzeldisziplinen aufgehenden »Sache« übernehmen, sofern sie – wie in Bonn glücklicherweise der Fall – in den Fächern verankert ist und nicht unverbunden neben ihnen steht. Zur interdisziplinären kommt die interinstitutionelle Dimension: Das Praxissemester, dessen erste Durchführung ausgesprochen wie unausgesprochen einen wesentlichen perspektivischen Fluchtpunkt der Tagung bildete, führte bereits in seiner Planungsphase zu einer in dieser Form zuvor wohl kaum erreichten Intensität des didaktischen Dialogs und der Zusammenarbeit zwischen den Institutionen der Schule bzw. schulpraktischen Lehrerausbildung und der Universität.

ziplinen, in: Neue Sammlung 31, 1 (1991), S. 3–24, zit. nach URL: <http://pub.uni-bielefeld.de/luur/download?func=downloadFile&recordId=1781659&fileId=2313403> [02. 10. 2015].

¹³ Ebd., S. 21 (im Rekurs auf Brecht).

Dank

An der Tagung »Fachkulturen in der Lehrerbildung« und der aus ihr hervorgegangenen Publikation haben zahlreiche Akteure mitgewirkt, denen wir an dieser Stelle herzlich danken möchten. Unser besonderer Dank gilt selbstverständlich den Autoren der in diesem Band versammelten Beiträge sowie Herrn Professor Dr. Robert Glaum als dem Vorsitzenden des BZL für sein Grußwort. Zu großem Dank verpflichtet sind wir auch Herrn Dr. Robert Steegers, dem Geschäftsführer des BZL, der nach gemeinsamen konzeptionellen Überlegungen im Vorfeld die Leitung der Tagungsorganisation übernommen hat. Dankende Erwähnung verdient überdies die großzügige Übernahme des Druckkostenzuschusses durch das BZL, die das Erscheinen des vorliegenden Bandes ermöglicht hat. Unser herzlicher Dank gilt nicht zuletzt Herrn Victor Henri Jaeschke, der uns als studentische Hilfskraft beim Korrekturlesen maßgeblich unterstützt, immer wieder sinnvolle Verbesserungsvorschläge gemacht und die formale Vereinheitlichung der Manuskripte mit einem Höchstmaß an Präzision übernommen hat. Für die routinierte Mitwirkung an der Korrespondenz mit den Beteiligten danken wir Frau Kerrin Peschke, für die professionelle Betreuung der Publikation dem Verlag, insbesondere Herrn Oliver Kätsch und Frau Anke Moseberg.

Die Herausgeber

Literatur und weitere Informationsquellen

- Deutsche Kinder- und Jugendstiftung (Hg.), Kinder entdecken die Welt. Forschendes Lernen in Lernwerkstätten von Kitas und Grundschulen, Berlin o. J., verfügbar unter URL: https://www.dkjs.de/fileadmin/Redaktion/user_upload/Broschuere_Kinder_entdecken_die_Welt.pdf [16. 10. 2015].
- Di Fuccia, David S., Fachlichkeit als wichtiger Baustein der Lehrerbildung: Blick in die verschiedenen Bundesländer, Rede im Rahmen der Fachtagung »Lehrerbildung in Bayern. Professionalität und Qualität«, 20. November 2010, ausgerichtet von der Arbeitsgemeinschaft Bayerischer Lehrerverbände, zit. nach URL: <http://www.abl-lehrerverbaende.de/mobile/smartphone/downloads/vortrag-prof-di-fuccia.pdf> [02. 10. 2015].
- Eibl, Gertraud, Lehrer sollen Schüler unterrichten, nicht Fächer. Über den Erfolg alternativer Bildungskonzepte, in: Die Zeit, 24. 01. 2004, zit. nach URL: <http://www.zeit.de/2004/27/alternbildung> [16. 10. 2015].
- Gies, Horst, Geschichtsunterricht. Ein Handbuch zur Unterrichtsplanung, in Zusammenarbeit mit Michele Barricelli und Matthias Toepfer, Köln u. a. 2004 (UTB 2619), zit. nach dem Digitalisat unter URL: <http://www.utb-studi-e-book.de/> [17. 10. 2015].

- Giesecke, Hermann, Was Lehrer leisten. Porträt eines schwierigen Berufes, Weinheim / München 2001.
- Huber, Ludwig, Fachkulturen: Über die Mühen der Verständigung zwischen den Disziplinen, in: Neue Sammlung 31, 1 (1991), S. 3–24, zit. nach URL: <http://pub.uni-bielefeld.de/luur/download?func=downloadFile&recordId=1781659&fileId=2313403> [02.10.2015].
- Krauss, Stefan u. a., Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie, in: Journal für Mathematikdidaktik (JMD) 29, 3/4 (2008), S. 223–258, zit. nach URL: http://www.mathematik.uni-regensburg.de/Didaktik/studium_krauss_downloads_art1_COACTIV.pdf [02.10.2015].
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hg.), Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Geschichte, Düsseldorf 2014, zit. nach URL: http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/ge/KLP_GOST_Geschichte.pdf [16.10.2015].
- Dass. (Hg.), Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik, Frechen 2007, zit. nach URL: http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf [16.10.2015].
- Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Programm »Kinderuni«, Internetpräsentation unter URL: <http://www3.uni-bonn.de/studium/junge-uni/kinderuni> [20.10.2015].
- Dies., Programm »Fördern, Fordern, Forschen. Frühstudium für Schüler«, koordiniert von Thoralf Räscher, Internetpräsentation unter URL: <http://www.fff.uni-bonn.de/projekt> [20.10.2015].
- Steinbrügge, Lieselotte, Didaktische Transformationen. Fremdsprachendidaktik zwischen Unterrichtspraxis und philologischer Wissenschaft, in: Adelheid Schumann / Dies. (Hg.), Didaktische Transformation und Konstruktion. Zum Verhältnis von Fachwissenschaft und Fremdsprachendidaktik, Frankfurt a.M. 2008, S. 13–21.
- Stötzer, Dirk, im Interview mit Julia Schaaf: Die Lehrerpersönlichkeit kann man nicht lernen, in: Frankfurter Allgemeine Sonntagszeitung, 23.08.2015, zit. nach dem Digitalisat, erreichbar unter URL: http://faz-archiv-approved.faz.net/intranet/biblionet/r_suche/FAZ.ein [16.12.2015].

Diese Einleitung bindet ausschließlich die Herausgeber des vorliegenden Bandes.

Mathematik als Prozess – am Beispiel des Pythagoras

1. Rhetorisches (aus der Mathematikdidaktik)

»Vom Künstler hatte man schon lange gefordert, daß er ein Schöpfer sei, aber wer Wissenschaft betrieb, hieß ein Gelehrter, *savant*, *learned man*, einer, der gelernt hatte, der wusste. Heute heißt er Forscher. Man lernt nicht Wissenschaft, sondern man erschafft sie, wiedererschaffend oder neuschaffend. Auf den Höhen des Wissenschaftsbetriebs ist uns das heute geläufig; aber bedeutet das auch etwas in den Niederungen? [...] Ist dies Wiedererschaffendürfen ein Vorrecht erwachsener Mathematiker oder haben Heranwachsende – Studenten und Schüler – auch das Recht, sich die Mathematik wiedererschaffend zu assimilieren? [...] Worte wie »Sprache« oder »Mathematik« haben eine Doppelbedeutung. Sie können eine Tätigkeit bezeichnen oder auch das Resultat dieser Tätigkeit. Nach diesen zwei Gesichtspunkten kann man sie auch unterrichten, als ein Fertigprodukt oder als etwas neu zu Entdeckendes, zu Erfindendes. Das erste ist die traditionelle Methode, zum zweiten streben heute die Erzieher.«¹

Diese Worte stammen von Hans Freudenthal aus dem Jahr 1963. Wie ist die Situation heute? Streben die Erzieher noch immer an, Mathematik als etwas zu Entdeckendes zu unterrichten? Bevor wir dieser Frage nachgehen, werden wir uns selbst in die »Niederungen« der Schulmathematik begeben und schauen, ob wir dort erfolgreich wiedererschaffend tätig sein können.

Der Traum vom *Entdeckenden Lernen* im Mathematikunterricht, der durch Hans Freudenthal so wortgewaltig propagiert und im deutschsprachigen Raum beispielsweise von Heinrich Winter und Erich Wittmann gelebt und konkretisiert wurde, ist auch heute noch Teil mathematikdidaktischer Forschung. In seinem Beitrag »Entdeckendes Lernen – Produktives Üben«² weiß Timo Leuders

1 Hans Freudenthal, Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben?, in: Der Mathematikunterricht, Heft 4 (1963), S. 5–29, hier S. 11 f.

2 Timo Leuders, Entdeckendes Lernen – Produktives Üben, in: Helmut Linneweber-Lammerskitten, Fachdidaktik Mathematik – Grundbildung und Kompetenzaufbau im Unterricht der Sek. I und II, Seelze 2014, S. 236–263.

inzwischen vier verschiedene Formen des Entdeckenden Lernens zu unterscheiden. Über eine dieser Varianten, das *problemgenetische Lernen*, schreibt er:

»Genetisches Lernen wird aufgefasst als der durch Probleme angestoßene individuelle, aktive Vollzug eines Prozesses der Konstruktion eines mathematischen Begriffes oder Zusammenhangs, der sich schließlich als Lösung des Ausgangsproblems erweist. [...] Damit lässt sich genetisches Lernen sowohl als Form des problembasierten Lernens verstehen, mitunter auch als ›learning by design‹. [...] Eine besondere Qualität des problemgenetischen Lernens besteht darin, dass Lernende hier ›Mathematik in statu nascendi‹ erleben. [...] Schülerinnen und Schüler werden nicht mit ›fertiger Mathematik‹ konfrontiert, sondern nähern sich den mathematischen Inhalten über deren ›Kernideen‹ aus der Vorschauerspektive. [...] Ein genetischer Lernweg trägt so zur Sinnstiftung für das schulische Mathematiklernen bei.«³

Freudenthal, dem wir hier durch die Wahl des einleitenden Zitats die Hauptrolle im Bemühen um das *Entdeckende Lernen* zugespielt haben, ist jedoch keineswegs der Erste, der das Entdecken, nicht das schließlich Entdeckte, als wichtigstes Unterrichtsziel sieht. Zeitgleich mit Freudenthal fordert beispielsweise Alexander Wittenberg einen Unterricht, der die

»Gestaltung des Unterrichtsstoffes ausnützt, um an ihm den Prozeß der Wiederentdeckung Wirklichkeit werden zu lassen. Die geschilderten Grundsätze der Stoffgestaltung laufen ja darauf hinaus: die Gegenstände des Unterrichts so zu organisieren, wie sie tatsächlich in einer sachgemäß fortschreitenden Untersuchung ursprünglich hätten erschlossen werden können. Damit ist die Voraussetzung geschaffen, um den Unterricht tatsächlich als eine solche Untersuchung durchzuführen, und das soll nun wirklich geschehen. Der Schüler soll in folgerichtiger, verhältnismäßig vielseitiger und tiefeschürfender Weise in einige wenige und interessante Themenkreise eindringen, deren Gehalt sich allmählich seinem staunenden Blick erschließt. Es soll ein Stück ›lebendiger Mathematik‹ in der Schule erstehen.«⁴

Von Freudenthals Vorgängern sind, zeitlich rückwärtsschreitend, George Pólya, Otto Toeplitz und Felix Klein zu nennen. Pólya forderte, neben demonstrativen Schlussweisen auch Arten des plausiblen Schließens, die beim Mathematiktreiben eine entscheidende Rolle spielen, wie beispielsweise das Bilden von Analogien oder das induktive Schließen zu vermitteln.⁵ Toeplitz versuchte nicht nur einzelne Probleme, sondern eine gesamte mathematische Theorie, die Infinitesimalrechnung, auf eine von ihm sogenannte *genetische* Weise darzustellen, sodass die in der Theorie vorkommenden Begriffe auf eine natürliche Weise aus der Situation heraus entstehen. Klein kämpft gegen die Sichtweise von

3 Ebd., S. 246.

4 Alexander I. Wittenberg, *Bildung und Mathematik*, Stuttgart 1963, S. 145.

5 Vgl. George Pólya, *Mathematik und plausibles Schliessen*, Bd. 1: *Induktion und Analogie in der Mathematik*, Basel 1962.

Mathematik als einem zu konsumierenden *Fertigprodukt*, indem er in seinen Vorlesungen die historische Entwicklung der Mathematik betont.

Felix Klein wäre eine gute Wahl, unsere kleine (subjektive) Zusammenstellung von Personen, die sich um das *Entdeckende Lernen* verdient gemacht haben, abzuschließen. Wir möchten jedoch noch einen in diesem Zusammenhang wenig rezipierten Mann des 18. Jahrhunderts zu Wort kommen lassen, da er uns bei unserem sogleich in Angriff zu nehmenden Unterfangen, den Satz des Pythagoras wiederzuentdecken, behilflich sein wird. Es geht um Alexis-Claude Clairaut. Dieser Mann, der bemerkenswerterweise schon im Alter von achtzehn Jahren in die Französische Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde, veröffentlicht im Jahr 1741 ein Lehrbuch zur Geometrie, das, modern gesprochen, nicht nach der Euklidischen Systematik, sondern nach dem *genetischen Prinzip* konzipiert sein will. Im Vorwort zu diesem Buch, den *Anfangsgründen der Geometrie* (*Éléments de géométrie*), schreibt Clairaut:

»Man kann, wie mich bedünkt, nicht in Abrede sein, daß diese Methode zum mindesten dazu geschickt sei, diejenigen aufzumuntern, die vor der Trockenheit geometrischer Wahrheiten, wenn sie ohne Anwendung erscheinen, einen Ekel bekommen könnten. Ich hoffe aber, dass sie einen noch wichtigeren Nutzen haben werde, ich meine, den Verstand zum Nachforschen und Entdecken zu gewöhnen: denn ich vermeide sorgfältig, einen einzigen Satz unter der Gestalt eines Lehrsatzes vorzubringen, nämlich von derjenigen Beschaffenheit, da bewiesen wird, daß eine Wahrheit ist, ohne zu zeigen, wie man dorthin gelangt ist, sie zu entdecken.«⁶

Nachdem wir uns von den eindrucksvollen Zitaten haben anstecken lassen, müssen wir klären, ob und wie *Entdeckendes Lernen*⁷ im Mathematikunterricht überhaupt zu realisieren ist. Freudenthal denkt hierbei an ein Wiederentdecken unter Führung des Lehrers. Um jedoch geeignet führen zu können, benötigt der Lehrer⁸ wohl ein Repertoire denkbarer Entdeckungswege für das jeweils zu Entdeckende. Wir prüfen nun exemplarisch, ob solche Entdeckungsgeschichten dem Lehrer wenigstens für den populärsten Satz der Schulmathematik, den Satz des Pythagoras, zur Verfügung stehen.

6 Alexis-Claude Clairaut, *Anfangsgründe der Geometrie*, übers. v. F. I. Bierling, Hamburg 1753, S. 4f. (des Vorberichts des Verfassers).

7 Vgl. Heinrich Winter, *Lernen durch Entdecken?*, in: *mathematik lehren* 28 (1988), S. 6–13.

8 Mit Lehrer ist immer auch die Lehrerin gemeint.

2. Heuristisches (zum Satz des Pythagoras)

2.1. Aus Zwei mach Eins

Clairauts Ankündigung, keinen Lehrsatz ohne seine Entdeckung vorzubringen, hat uns neugierig gemacht. Tatsächlich finden wir in seinem Lehrbuch auch den Satz des Pythagoras. Als Ausgangspunkt wählt er ein einfaches und natürliches Problem: Wie kann man aus zwei kongruenten Quadraten durch Zerschneiden und Zusammensetzen ein einziges Quadrat (mit doppeltem Flächeninhalt) herstellen? Eine Antwort auf diese Frage ist schnell gefunden. Man zerschneide die beiden gegebenen Quadrate jeweils entlang einer ihrer Diagonalen und setze die vier so entstandenen rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke, wie in Abbildung 1 jeweils Kathete an Kathete, zu einem Quadrat zusammen.

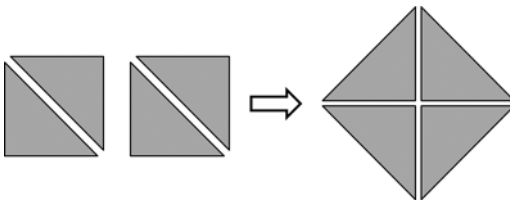


Abbildung 1

Wie nun, wenn die beiden gegebenen Quadrate nicht kongruent sind? Zerschneiden entlang der Diagonalen und Neuzusammensetzen liefert kein Quadrat, sondern eine der folgenden Figuren.

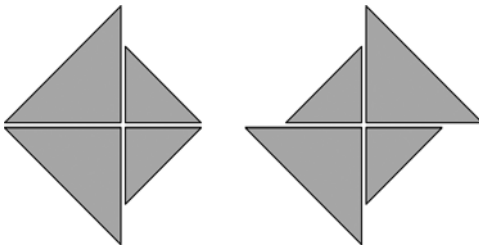


Abbildung 2

Die linke Figur können wir aus zwei rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken zusammengesetzt sehen. Die Katheten des linken Dreiecks sind dabei zu lang, die des rechten Dreiecks zu kurz für das gesuchte Quadrat. Mit einem Schnitt, der nur durch das kleine gegebene Quadrat verläuft, können wir die Seitenlänge des gesuchten Quadrats also gar nicht herstellen, schließlich hat die Diagonale

schon die maximale Schnittlänge. Aufgrund dieser Einsicht kleben wir die beiden gegebenen Quadrate zunächst wie in Abbildung 3 zusammen.



Abbildung 3

Wir schneiden nun nicht wieder wie im linken Bild von Abbildung 4 entlang der Diagonalen, sondern wie im rechten Bild ausgehend von einem Punkt P etwas weiter links. Die linke Schnittlinie ist dann kürzer als die Diagonale des großen gegebenen Quadrats, die rechte Schnittlinie länger als die Diagonale des kleinen gegebenen Quadrats.

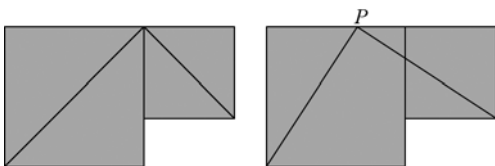


Abbildung 4

Bei passender Wahl des Punkts P sind die beiden Schnittlinien dann sogar gleich lang. Die beiden abzuschneidenden Dreiecke sehen in diesem Fall kongruent aus. Wir wählen den Punkt P daher so, dass die Strecke auf der linken Seite des Punkts genauso lang ist wie die Seite des kleinen Quadrats. Die Strecke auf der rechten Seite des Punkts hat dann die Länge der Seite des großen Quadrats, da ja beide Strecken zusammen die Summe der Kantenlängen ergibt. Beide abzuschneidenden Dreiecke sind rechtwinklig und haben jeweils eine Kathete, die so lang ist wie die Seite des großen Quadrats und eine Kathete, die so lang ist wie die Seite des kleinen Quadrats. Somit sind sie kongruent. Schneiden wir nun wie geplant und legen die beiden abgeschnittenen Dreiecke auf geeignete Weise an die Restfigur an (siehe Abbildung 5), so erhalten wir – was leicht nachzuweisen ist – ein Quadrat.

Die beiden kongruenten abgeschnittenen Dreiecke sind rechtwinklig. Ihre kürzere Kathete ist gleich der Seite des kleineren gegebenen Quadrats, ihre längere Kathete gleich der Seite des größeren gegebenen Quadrats. Ihre Hypotenuse schließlich ist gleich der Seite des gesuchten Quadrats, dessen Flächeninhalt die Summe der Flächeninhalte der gegebenen Quadrate ist. Bezeichnen wir die kürzere Kathete mit a , die längere Kathete mit b und die Hypotenuse mit c , dann gilt also: $c^2 = a^2 + b^2$. Indem wir unsere Lösung auf das abgeschnittene

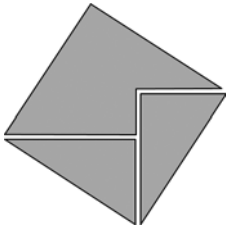


Abbildung 5

Dreieck beziehen, erhalten wir gewissermaßen als ›kostenlosen Bonus‹ den Satz des Pythagoras.

Wir kehren noch einmal zum Ausgangsproblem mit zwei kongruenten Quadraten zurück. Statt beide Quadrate entlang einer Diagonale aufzuschneiden, können wir auch eines der Quadrate ganz lassen, und stattdessen das andere Quadrat entlang beider Diagonalen zerschneiden. Das zweite Quadrat zerfällt dabei in vier Teildreiecke, die wir dem ersten Quadrat als *Hüte* aufsetzen können (siehe Abbildung 6).

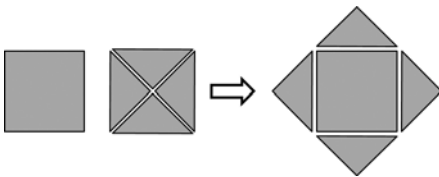


Abbildung 6

Ist das zweite Quadrat größer als das erste Quadrat, so sind die entstehenden Hüte zu groß für das erste Quadrat. Setzen wir sie ihm dennoch auf, so ergibt das die folgende *mühlenartige* Figur.

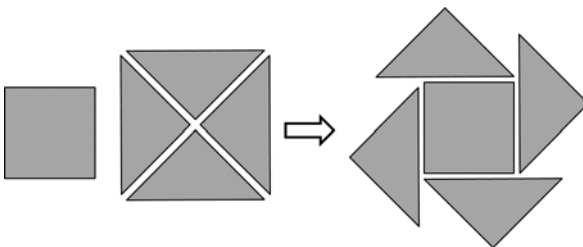


Abbildung 7

Zwar ist die Figur selbst kein Quadrat, doch immerhin bilden die Spitzen der Hüte ein Quadrat. Sollte das etwa schon das gesuchte Quadrat sein? Wir zeichnen das Quadrat in die Figur ein. Es macht den Eindruck, dass die Teile der

Mühlenfigur, die außerhalb des eingezeichneten Quadrats liegen, genau in die noch aufzufüllenden Lücken passen (siehe Abbildung 8). Ist man einmal zu dieser Vermutung gelangt, wird sie mit Hilfe der Kongruenzsätze schnell zur Sicherheit.

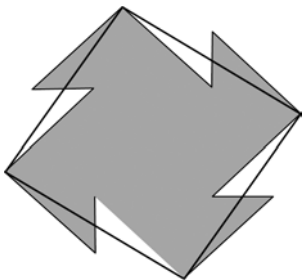


Abbildung 8

2.2. Freudenthals Taschentuch

Den nun folgenden Weg zum Satz des Pythagoras verdanken wir Wolfgang Kroll.⁹ Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist diesmal eine Faltfigur. Wir nehmen eine Serviette (oder ein quadratisches Taschentuch) und falten die Ecken auf ihre Mitte. Dadurch entsteht wieder ein Quadrat, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der Flächeninhalt der noch *ungefalteten* Serviette (siehe Abbildung 9; Die Serviette besitzt eine helle und eine dunkle Seite).

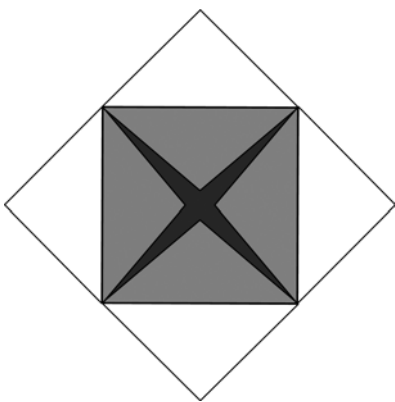


Abbildung 9

⁹ Wolfgang Kroll, Das gefaltete Taschentuch, in: mathematik lehren 28 (1988), S. 48f.