A:
Mi madre Yudis,
mi esposa Maku, mis hijos Wilson y Caro, mi padre y a Dios.

CÁLCULO INTEGRAL

LA INTEGRAL INDEFINIDA Y MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

WILSON VELÁSQUEZ BASTIDAS
UNIVERSIDAD DEL MAGDALENA

EDITORIAL
UNIMAGDALENA

CÁLCULO INTEGRAL. LA INTEGRAL INDEFINIDA Y MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Autor: Wilson Velásquez Bastidas
Edición: Primera - Diciembre de 2014. Santa Marta D.T.C.H. - Colombia
ISBN: 978-958-746-064-3
Revisión de Estilo: Álvaro González Uribe
Diagramación: Jorge Cañas
Diseño de portada: Luis Felipe Marquez Lora
Impresión: Digiprint Editores S.A.S. Calle 63 Bis No. 70 - 49. Bogotá D.C. - Colombia

Catalogación en la fuente - Martha Lucia Ruiz Arango, P.E. Grupo Biblioteca Germán Bula Meyer.

Velásquez Bastidas, Wilson
Cálculo integral : la integral indefinida y métodos de integración / Wilson Velásquez Bastidas. – 1a. ed. -- Santa Marta, Universidad del Magdalena, 2014.
200 p. : il.
Incluye bibliografía
ISBN: 978-958-746-064-3

1.Cálculo integral. 2. Sucesiones (Matemáticas). 3. Sustituciones (Matemáticas).
4. Algebra. 5. Trigonometría. I. Título

CDD 515.43 ed 20

Depósito Legal: Se cumplió con la reglamentación existente.

Servicio de Canje:
canjebiblioteca@unimagdalena.edu.co
biblioteca@unimagdalena.edu.co

Índice general

Presentación

Para la Universidad del Magdalena, u otra institución de educación, es importante contar con docentes capacitados y decididos a elaborar materiales de apoyo para el quehacer pedagógico, los cuales se podrían convertir en herramientas útiles para el aprendizaje del estudiante. Las notas de clases "La integral indefinida y métodos de integración", es un ejemplo de ello. Este documento le guiará, a través de la comprensión, de manera práctica y didáctica, conceptos y destrezas del Cálculo, como son: la diferencial de una función, la antiderivada de una función, la integral indefinida, ecuaciones diferenciales con variables separables y sus aplicaciones y los métodos de integración más relevantes.

El texto presenta una cantidad de ejemplos resueltos en su totalidad que servirán de modelo para el desarrollo de otros ejercicios propuestos; además, cuenta con una sección de autoevaluación al final de cada capítulo, la cual ayudará a valorar los progresos alcanzados durante el estudio y a reforzar la incursión en el mundo del cálculo.

Por otro lado, también ofrece un resumen de algunos temas de Álgebra y Trigonometría con el propósito de recordar aspectos fundamentales de los mismos y aplicarlos en el proceso de nuevos aprendizajes.

"La integral indefinida y métodos de integración" es fruto de muchos años de experiencia docente, teniendo en cuenta como principal incentivo la vocación por la enseñanza y el impulso al desarrollo educativo de nuestra comunidad universitaria.

Está elaborado de acuerdo con algunas temáticas del programa vigente de la asignatura Cálculo Integral que se imparte en la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Magdalena.

Además de la obtención de los conocimientos en cada semestre, este trabajo titulado: "La integral indefinida y métodos de integración", le servirá de consulta al estudiante aún después de haber adquirido los conocimientos. Por ello, le invito a que lea, comprenda y practique al máximo cada uno de los capítulos que componen este texto que ha sido fruto del trabajo y experiencias del autor.

Esperando que esta herramienta sea funcional como complemento para seguir cultivando su aprendizaje, sin pretender, claro está, que este documento sea una innovación pedagógica en el ámbito de la enseñanza del Cálculo ni en la temática tratada.

El Autor

Reconocimientos

Expreso especiales agradecimientos a las directivas de la Universidad del Magdalena y de la Facultad de Ingeniería, por su efectivo apoyo institucional. A mis estudiantes de la asignatura de Cálculo Integral por sus valiosos aportes y colaboración permanente para hacer realidad esta obra. A mis colegas del área de Matemáticas por sus significativos comentarios y sugerencias, además por adoptar y referenciar esta propuesta académica para el curso de Cálculo Integral. A Diana Rojas Alfonso por el aporte de sus valiosas notas y datos que contribuyeron a la concepción de este libro, Ana María Díazlara Benavides, Karen Barcinilla De la Rosa y Énika Pinto Moya, por su importante colaboración en la transcripción y diseño del documento. Y a los revisores de estilo Martiniano Acosta Acosta y Rebeca González Sanjuán, por la cuidadosa lectura del documento y las muy útiles sugerencias que se consideraron en este trabajo.

Capítulo 1

1. Incremento y diferencial de una función

En este capítulo se analizará el concepto de incremento y diferencial de una función. El concepto de diferencial es uno de los más importantes del Cálculo y, sin lugar a dudas, uno de los que tiene mayor diversidad de aplicaciones, tanto en la formulación de modelos como en el análisis de errores, basado en la linealización de funciones. Además, aquí se reserva también su uso en la integración.

En este aparte se presenta un paquete de ejemplos resueltos que le servirán de modelos para el desarrollo de un listado de ejercicios propuestos (todos con su respuesta), también se agrega al final una sección de autoevaluación que le ayudará a valorar los progresos alcanzados durante tu estudio.

1.1 Incremento de una función

Definición: El incremento de una función $y = f(x)$ denotado por Δy, es el cambio que sufre ésta cuando la variable independiente x cambia una cantidad Δx, pasando de x a $x + \Delta x$, y está dado por:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Si x varía de x_1 a x_2 y Δx es el incremento de x entonces, $x_2 = x_1 + \Delta x$

Ejemplo 1.1

Calcule Δy cuando x cambia de 1,0 a 1,1; si $y = 3x^2 + 1$

Solución

Tenemos que $x = 1$ y $\Delta x = 1,1 - 1 = 0,1$ luego

Aplicando la definición anterior se tiene:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 1 - (3x^2 + 1)$$
$$\Delta y = 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 + 1 - 3x^2 - 1$$
$$\Delta y = 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$$

$$\Delta y = 6(1)(0,1) + 3(0,1)^2$$

$$\Delta y = 0{,}63$$

1.2 Diferencial de una función

El concepto de diferencial da significado propio tanto a dx como a dy en tal forma que $\frac{dy}{dx}$ puede ser vista como un cociente de dy sobre dx.

Definición: Sea $y = f(x)$ donde f es una función derivable, y sea Δx un incremento de x.

I. La **diferencial** dx de la variable independiente es $dx = \Delta x$ cuando Δx tiende a cero.

II. **La diferencial** dy **o** df de la variable dependiente y es: $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$, es decir, la diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.

1.2.1 Interpretación geométrica de la diferencial

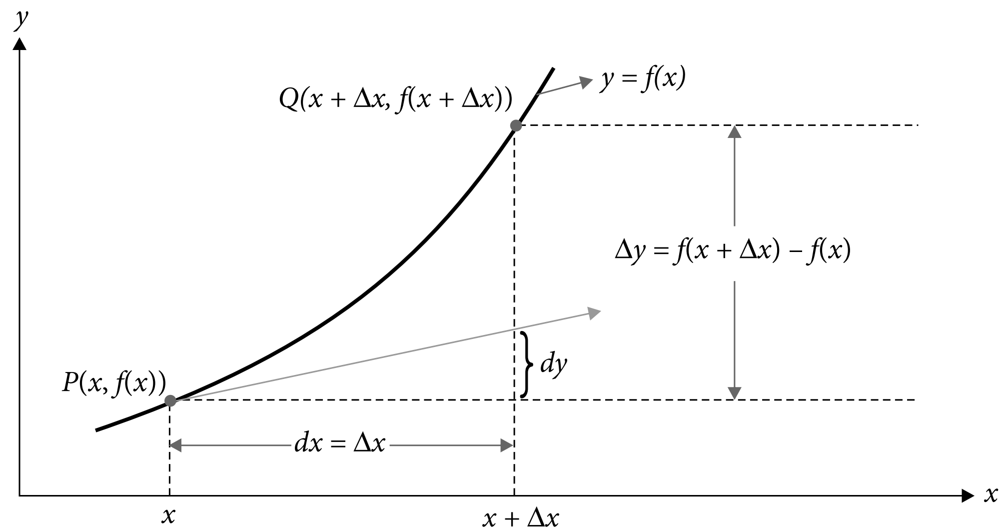

Figura 1.1 Interpretación geométrica de la diferencial.

La figura 1.1 muestra que el incremento se puede aproximar con la diferencial, es decir $\Delta y \approx dy$ (Δy es aproximadamente igual a dy) cuando Δx es más cercano a cero ($\Delta x \approx 0$).

1.2.2 Fórmulas de la diferencial

Sean u y v dos funciones derivables de x, donde c es una constante.

Diferencial de una constante	$d(c) = 0$	**Diferencial de un producto**	$d(uv) = udv + vdu$
Diferencial de un múltiplo por una constante	$d(cu) = cdu$	**Diferencial de un cociente**	$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
Diferencial de una suma o resta	$d(u \pm v) = du \pm dv$	**Diferencial de una potencia**	$d(u^n) = nu^{n-1}du$

Ejemplo 1.2

Determine la diferencial de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^3 - 1$

b) $u = t^2 e^{-t^2}$

c) $z = \ln^2(\operatorname{sen} 3u) = [\ln(\operatorname{sen} 3u)]^2$

d) $v = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}$

Solución

Para calcular la diferencial de las funciones, solo basta con hallar la derivada y multiplicarla por el diferencial de la variable independiente.

a) Para $y = 5x^3 - 1$, entonces $dy = 15x^2 dx$

b) Para $u = t^2 e^{-t^2}$, entonces $du = (2te^{-t^2} - 2t^3 e^{-t^2})dt \Rightarrow 2te^{-t^2}(1 - t^2)dt$

c) Para $z = \ln^2(\operatorname{sen} 3u)$, entonces $dz = 2 \cdot \ln(\operatorname{sen} 3u) \cdot \dfrac{1}{\operatorname{sen} 3u} \cdot \cos 3u \cdot 3du = 6\ln(\operatorname{sen} 3u) \cdot \cot 3u \cdot du$

d) Para $v = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}$, entonces $dv = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x - x^2}}$

Ejemplo 1.3

Sea $y = x^2 + 1$. Halle Δy y dy cuando x cambia de 1 a 1,01.

Solución

Aplicando la fórmula $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ se tiene que:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 1 - (x^2 + 1)$$

$$\Delta y = x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1$$
$$\Delta y = 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2$$

Pero $\Delta x = 1,01 - 1 = 0,01$, además $x = 1$, entonces:

$$\Delta y = 2(1)(0,01) + (0,01)^2 = 0,0201$$

Aplicando la fórmula $dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$, se tiene que:

$dy = 2xdx$, pero $dx = \Delta x = 0,01$; entonces

$$dy = 2(1)(0,01) = 0,02$$

En consecuencia, el incremento se puede aproximar con la diferencial, es decir, $\Delta y \approx dy$ (Δy es aproximadamente igual a dy)

Ejemplo 1.4

Dada la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 6$. Calcule Δy y dy, si $\Delta x = 0,1; 0,01; 0,001;$ $0,0001$ y $x = 3$. Interprete los resultados obtenidos.

Solución

De la definición de incremento de una función tenemos:

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3)$$

$$\Delta y = [(3 + \Delta x)^3 + 4(3 + \Delta x)^2 - 5(3 + \Delta x) + 6] - 54$$

Desarrollando,

$$\Delta y = (\Delta x)^3 + 13(\Delta x)^2 + 46\Delta x$$

Por otro lado, como $f'(x) = 3x^2 + 8x - 5$ se tiene de la definición de diferencial, que:

$$dy = f'(3)dx = 46dx$$

Sustituyendo $\Delta x = 0,1$ en las dos expresiones anteriores, incremento y diferencial se obtiene que:

$$\Delta y = 4,731 \quad \text{y} \quad dy = 4,6$$

Para el caso $\Delta x = 0,01$ resulta:

$$\Delta y = 0,461301 \quad \text{y} \quad dy = 0,46$$

En la tabla 1.1 se presentan los incrementos de la variable independiente, los valores de Δy y de dy y las diferencias entre estas dos cantidades.

Tabla 1.1 Incrementos y diferenciales

0	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
3	0,1	4,731	4,6	0,131
3	0,01	0,461301	0,46	0,001301
3	0,001	0,046013	0,046	0,000013
3	0,0001	0,00460013	0,0046	0,00000013

Observe que la función es derivable en $x = 3$ y que entre más cercano esté Δx a cero, más próxima a cero estará la diferencia $\Delta y - dy$.

Por tanto, dy será una mejor aproximación de Δy en la medida en la que Δx esté más cercana a cero.

Ejemplo 1.5

El radio r de un círculo se incrementa de $10cm$ a $10,1cm$. Estima el incremento en el área del círculo, calculando dA. Compare el resultado con el cambio real ΔA.

Solución

El área A del círculo está dada por $A = \pi r^2$, donde r = radio del círculo.

Tenemos $r = 10cm$ y $\Delta r = dr = 10,1 - 10 = 0,1cm$.

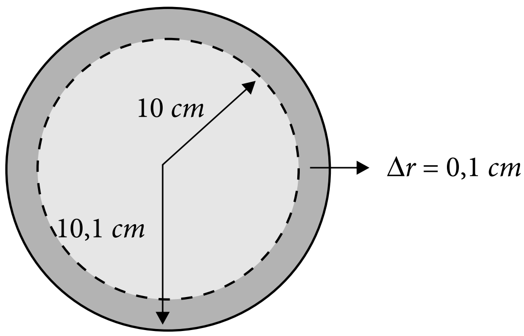

Figura 1.2 Círculo de radio r asociado al ejemplo 1.5.

Hallemos dA

$dA = 2\pi r \cdot dr$ Reemplazando los valores de r y dr se tiene:

$$dA = 2\pi(10cm)(0,1cm)$$

$$dA = 2\pi cm^2$$

Ahora, hallamos el cambio real ΔA

$$\begin{aligned}\Delta A =& A(r + \Delta r) - A(r)\\ =& \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2\\ =& \pi r^2 + 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2 - \pi r^2\\ =& 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2\\ =& 2\pi(10)(0,1) + \pi(0,1)^2 = 2,01\pi cm^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Delta A - dA = 0,01\pi cm^2$

Esto muestra que la aproximación dA es muy precisa cuando Δr es más cercano a cero.

Ejemplo 1.6

¿En cuánto aumenta aproximadamente el lado de un cuadrado si su área aumenta de $9cm^2$ a $9,1cm^2$?

Solución

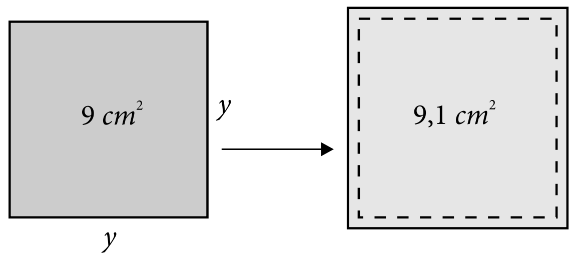

Figura 1.3 Cuadrado de lado y asociado al ejemplo 1.6.

Sea $x =$ área del cuadrado
$y =$ Lado del cuadrado
Luego $x = y^2$ es el área del cuadrado

Expresemos y en función de x, entonces $y = \sqrt{x}$, además $\Delta x = dx = 9,1 - 9 = 0,1$ y $x = 9$.
Para encontrar el aumento aproximado del lado del cuadrado se halla dy.

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(0,1)$$
$$dy = 0,016m$$

Ejemplo 1.7

La arena que se escapa de un recipiente va formando un montículo cónico cuya altura siempre es igual a su radio. Use diferenciales para estimar el incremento del radio correspondiente a un aumento de $2cm^3$ en el volumen del montículo, cuando el radio mide $10cm$.

Solución

El volumen del montículo cónico viene dado por la ecuación $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, donde $r = 10$ radio del cono y $h =$ altura del cono.

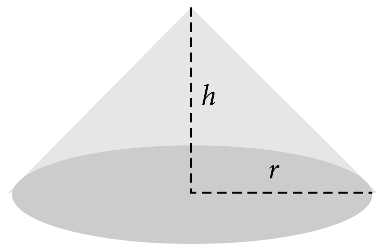

Figura 1.4 Montículo cónico de altura h y radio r ejemplo 1.7.

Pero $r = h$, luego queda que $V = \frac{1}{3}\pi r^3$
Debemos estimar el incremento del radio $\Delta r = dr =?$
Conocemos el incremento en el volumen $\Delta V = dV = 2cm^3$
Tenemos que $V = \frac{1}{3}\pi r^3$. Hallando dV se tiene que,

$$dV = \pi r^2 dr, \text{ entonces}$$

$$dr = \frac{dV}{\pi r^2} = \frac{2cm^3}{\pi(10cm)^2} = \frac{1}{50\pi}cm$$

Por tanto $dr = \frac{1}{50\pi}cm$ incremento del radio.

1.3 Error relativo y porcentual

Definición: Sea x una medida con un error máximo $|\Delta x|$. Por definición

i. Error relativo $= \frac{|\Delta x|}{x}$
ii. Error porcentual = (error relativo)$\cdot$(100 %)

Ejemplo 1.8

El radio de una esfera mide $30cm$ y el error máximo en la medición es de $0,15cm$.

a) Estime el máximo error que se comete al calcular el volumen de la esfera.

b) Estime el error relativo y porcentual para el valor calculado del volumen.