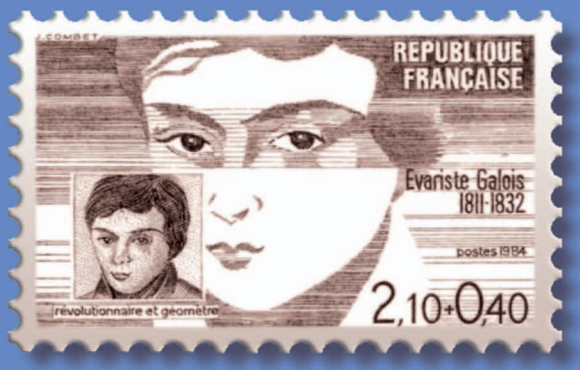
colección notas de clase

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

notas notas notas notas notas notas notas

Fernando Zalamea



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE CIENCIAS

Facultad de Ciencias
Saber más y formar mejor

Fundamentos de Matemáticas

Fernando Zalamea

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

Fundamentos de Matemáticas

© Fernando Zalamea

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia

© Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

ISBN 978-958-701-831-8

Diagramación en LaTeX : Fernando Zalamea, con el soporte de Gustavo Rubiano
Gráficas interiores: Margoth Hernández y el autor
Diseño de carátula: Andrea Kratzer

x, 164 p. : 78 il.
ISBN 978-958-701-831-8

1. Teoría básica de conjuntos
2. Conjuntos de números
Fernando Zalamea

Mathematics Subject Classification 2000: 03-01.

Índice general

Prólogo v

1. El mundo de las matemáticas: sorpresa, invención, rigor 1

1.1. La sorpresa 2

1.2. La invención 4

1.3. El rigor 7

1.4. Ejercicios 12

2. Conjuntos finitos y proposiciones 14

2.1. Conjuntos, pertenencia e inclusión 15

2.2. Proposiciones 19

2.3. Ejercicios 24

3. Conjuntos infinitos y cuantificadores 27

3.1. Conjuntos de números 27

3.2. Cuantificadores 31

3.3. Ejercicios 33

4. Relaciones y funciones 36

4.1. Relaciones 37

4.2. Funciones 42

4.3. Teoremas de Cantor 47

4.4. Ejercicios 50

5. Operaciones entre conjuntos **54**

5.1. Complemento, unión, intersección, partes 55

5.2. Imágenes directa e inversa 57

5.3. Ejercicios 60

6. Tamaños de infinitud **62**

6.1. Inyecciones entre conjuntos infinitos 62

6.2. Ejercicios 67

7. Números naturales **68**

7.1. Axiomas y principio de inducción 68

7.2. Pruebas por inducción 70

7.3. Buen orden 74

7.4. Ejercicios 76

8. Números enteros y racionales **78**

8.1. Construcción de los números enteros 79

8.2. Más sobre divisibilidad en $\mathbb{Z}$ 86

8.3. Números racionales 89

8.4. Ejercicios 92

9. Números reales **94**

9.1. Sucesiones de racionales 94

9.2. Vecindades fundamentales 96

9.3. Completamiento de los racionales 98

9.4. Propiedades fundamentales de los reales 99

9.5. Ejercicios 103

10. Recapitulación sobre conjuntos de números **104**

10.1. Los conjuntos de números 105
10.2. El universo conjuntista 107
10.3. Ejercicios 109

11. Más sobre reales **112**
11.1. Gráficas de funciones 113
11.2. Algebraicidad y trascendencia 122
11.3. Ejercicios 125

12. Polinomios y fracciones racionales **128**
12.1. Polinomios 128
12.2. Irreducibilidad 136
12.3. Fracciones racionales 138
12.4. Ejercicios 140

13. Números complejos **142**
13.1. Números complejos 143
13.2. Representaciones geométricas 144
13.3. Exponencial compleja 147
13.4. Ejercicios 151

14. Más sobre complejos **152**
14.1. Propiedades del conjunto de los complejos 152
14.2. Ejemplos de funciones de variable compleja 154
14.3. El teorema fundamental del álgebra 157
14.4. Ejercicios 160

Bibliografía anotada **163**

Prólogo

Quien se sumerge en la Carrera de Matemáticas[1] debe ser consciente de su entrada en un mundo inagotable, en un aprendizaje de por vida, que nunca cesará, pero que le impulsará a explorar territorios cada vez más sorprendentes del conocimiento. Las etapas en ese camino son largas y difíciles, a menudo ingratas y decepcionantes, pero también, en ciertos momentos privilegiados, fascinantes y totalmente reveladoras. Una vez consiga percibir la extraordinaria complejidad del mundo matemático, el *incauto* difícilmente podrá volver a salir de él. A lo largo de la Carrera de Matemáticas, habrá para cada quien momentos diferenciados de revelación, aunque usualmente esas *epifanías* se darán de forma más natural al acercarse a las obras de aquellos grandes matemáticos del siglo XIX que han cambiado de manera permanente nuestra forma de ver el mundo: un Galois, un Riemann, un Cantor. Antes de abrirse a ese más allá de la imaginación matemática avanzada, el estudiante debe sin embargo ir sentando algunas bases mínimas para que pueda luego ampliarse su *visión* y darse la revelación.

En esa edificación del saber, la matemática se distingue de muchas otras ramas de la cultura (y aún de la física), en el sentido de que el edificio es acumulativo. El curso de FUNDAMENTOS, situado en el primer semestre de la Carrera de Matemáticas, empieza a preparar esa acumulación del conocimiento. Ahora bien, esa acumulación no es definitiva y va reajustándose progresivamente. Aquí se proveen unas primeras bases *intuitivas* para el manejo básico de algunos de los pilares esenciales de la matemática: los procesos

[1] Entenderemos a lo largo de todo este texto «Carrera de Matemáticas» por cualquier Carrera de Matemáticas o Carrera afín (como Estadística), ya sea dentro del país, o, más generalmente, dentro del ámbito latinoamericano, puesto que cualquiera de estas Carreras debe apuntar al control inicial de los procesos de la razón matemática descritos en este texto. Desde el punto de vista muy global aquí adoptado, la Estadística, como la Geometría o el Álgebra, si tales subcampos pudiesen aislarse como tales (algo que, veremos, combatimos en el texto), son partes integrales de la Matemática.

de demostración, los manejos relacionales entre conceptos, la comprensión adecuada de los primeros conjuntos infinitos de números. Sólo más adelante, en cursos de la Carrera como LÓGICA o TEORÍA DE CONJUNTOS, estas bases ofrecidas en primer semestre pasarán a consolidarse *axiomáticamente* y a servir de mejores cimientos para el edificio. Pero la *práctica* del conocimiento matemático no procede mediante el establecimiento de un fundamento rígido y estable en el tiempo, sino mediante la incesante *re-visión* de ese fundamento, consiguiéndose cada vez más elementos de rigor a medida que avanzan los estudios (por supuesto, estudios que no deben ser sólo de pregrado, sino de postgrado: el estudiante debe ser consciente, desde un comienzo, que sólo podrá vislumbrar una parte *realmente representativa* del edificio si se acerca a superar un Doctorado en matemáticas).

La apertura del *mundo de los posibles*, la libertad imaginativa que acerca al matemático creador y al artista, van acompañadas en el ámbito de la matemática de otros movimientos *pendulares* complementarios que enriquecen la actividad matemática. Si el matemático tiende a pensar en *hipótesis*, en espacios de la invención, esas hipótesis son luego cuidadosamente analizadas por medio de *definiciones, teoremas, ejemplos* que permiten ir decantando la riqueza de las ideas originales. La *alianza* de la imaginación y del rigor le proporciona al matemático una fortaleza sobradamente reconocida en nuestra sociedad. El matemático es lo suficientemente hábil para escapar de prejuicios y preconcepciones rígidas, pero, a su vez, es lo suficientemente preciso para escapar de la vaguedad y de la palabrería. En un enlace fascinante entre la *plasticidad* y la *precisión*, el matemático debe ayudar a *fraguar y criticar* una época tan desorientada como la nuestra, donde se exacerba un uso acrítico y poco riguroso de las variedades del saber. En un curso como FUNDAMENTOS, el estudiante tiene la posibilidad no sólo de ir preparando las bases técnicas de un camino, sino la oportunidad, el *regalo ético*, de empezar a convertirse en un *guardián de la razón*, no una razón anquilosada, sino una razón amplia y movible, donde caben *al tiempo* las imágenes y las demostraciones, las intuiciones generales y las definiciones particulares, lo universal y lo concreto.

Dos principios ubicuos gobiernan el desarrollo orgánico del texto. Por un lado, su *motivo* básico (en la acepción musical del término) se centra en la experiencia de ***transgredir los límites***: estudiar sistemáticamente, para una serie de conceptos, sus fronteras y sus limitantes, hasta abrirse al «más allá», al «no» que esos conceptos no alcanzan a cubrir. De esta manera, por ejemplo, revisamos en una primera instancia intuitiva los conjuntos finitos y sus limitantes (capítulo 2), y nos abrimos a los conjuntos infinitos (capítulo

3); pero, a su vez, observamos que no contamos con las herramientas necesarias para el manejo del infinito, y nos abrimos a la relacionalidad y a la funcionalidad (capítulo 4); en otras instancias sucesivas, ya con esas herramientas en mano, aprendemos a *educar* nuestra frágil intuición infinitaria (capítulos 6 y 10). En forma similar, observamos cómo, «más allá» de las proposiciones (capítulo 2), requerimos cuantificadores (capítulo 3) para los manejos conjuntistas. Las diversas limitantes de los conjuntos de números dan lugar a las construcciones arquitectónicas de los enteros (capítulo 8), los racionales (capítulo 8), los reales (capítulo 9) y los complejos (capítulo 13), con las cuales se pueden ir *subsanando progresivamente* las diversas obstrucciones encontradas en cada piso del edificio numérico. Finalmente, se revisan algunas de las múltiples fronteras algebraicas que pueden explorarse gracias a manejos polinomiales (capítulo 12), hasta llegar a la «mejor resolución posible» de esas limitantes, con el teorema fundamental del álgebra para los números complejos (capítulo 14). A lo largo del texto, en el momento de introducir conceptos, pruebas o ejemplos, se enfatizará a menudo ese primer *motivo* fundamental, alrededor de las *limitantes del saber*, donde el proceder matemático tiene muchísimo para ofrecernos.

El segundo principio básico alrededor del cual evoluciona el texto consiste en manejar pragmáticamente las ***fronteras de la noción de demostración***. La *pragmática* consiste aquí en *ir y venir* alrededor de los supuestos bagajes previos del estudiante, sin nunca asumir del todo ni una determinada carencia, ni un determinado logro, sino *aumentando* a lo largo del texto su capacidad para manejar conceptos y para escribir pruebas ligadas a esos conceptos. La *evolución* de las pruebas es patente, empezando desde argumentos sencillos y bloqueos esperados (capítulo 1), pasando por pruebas más sofisticadas (teoremas de Cantor, capítulo 4; buen orden, capítulo 7; identidad de Bézout, capítulo 8), y llegando a la magnífica prueba de Gauss del teorema fundamental del álgebra (capítulo 14). En todo este proceso, *nunca* se alcanza un rigor formal (o «fundamentalista») de prueba, un rigor al que se irá acercando poco a poco el estudiante en su Carrera. Una supuesta «fundamentación definitiva» del saber matemático no es más que una *quimera*, y el estudiante deberá ir incesantemente revisando y reacondicionando la adquisición de sus conocimientos a lo largo de la Carrera. Sin embargo, luego de este primer acercamiento a la noción de demostración, se confía en que el estudiante será capaz de detectar *niveles de dificultad* en las pruebas, y de manejar cada nivel de acuerdo con los *problemas, conceptos, ejemplos y métodos* que se le provean.

`Organización del curso`. El material está diseñado para ser dictado en un semestre, en 14 semanas correspondientes a cada uno de los 14 capítulos, más un par de semanas adicionales para revisiones, o para ampliar con mayor comodidad el tiempo dedicado a alguno de los capítulos, a juicio del instructor. La organización de cada semana puede estructurarse alrededor de: (i) cuatro horas presenciales de clase magistral, donde el instructor presenta el material teórico, con abundantes ejemplos; (ii) dos horas presenciales de ejercicios con el instructor, ya sea en grupos o en forma individualizada; (iii) dos horas opcionales de ejercicios con el monitor. El estudiante promedio debe tener sin embargo *muy claro* que sin un número importante de horas *diarias* adicionales de estudio, por fuera del horario presencial de clase, no tendrá ningún éxito en un curso como FUNDAMENTOS. El estudiar eficiente y concienzudamente por fuera de clase resulta ser algo imprescindible, que el estudiante tendrá que saber sortear en los estudios universitarios *desde el primer semestre*.

El texto incluye un número muy amplio de ejercicios para trabajar en forma autocontenida, pero es también recomendable contar al tiempo con otros libros de precálculo o de teoría elemental de conjuntos (ver bibliografía anotada). Los ejercicios son parte *imprescindible* del texto, y constituyen el complemento natural, la extensión necesaria, de los desarrollos avanzados en el cuerpo expositivo principal. Debe señalarse aquí que los ejercicios del texto deben acompañarse de una importante cantidad adicional de cálculos particulares con objetos concretos. Ejemplos de esas situaciones aparecen en las tablas incluidas en el trabajo, pero deben completarse con diversos ejercicios adicionales de cálculo concreto. Cada instructor del curso debe ser *responsable* de esos ejemplos calculatorios e instrumentales, fundamentales para el estudiante. Éste, por su parte, siguiendo los ejemplos concretos del texto, y aquellos adicionales presentados en el tablero, puede (y debe) repetir situaciones similares con ligeras variaciones.

El uso repetido de expresiones *en cursiva* y de expresiones «entre corchetes» responde a los siguientes criterios precisos que debe tener en cuenta el estudiante: las cursivas enfatizan la importancia de una idea o un concepto, mientras que, en cambio, los corchetes se usan alrededor de ideas y conceptos que en el momento de su aparición aún no han sido definidos, y que, en la gran mayoría de los casos, no resultarán siquiera definibles en el curso completo de FUNDAMENTOS. Las palabras y los términos entre corchetes deben quedar sin embargo *resonando* para cursos superiores (pues, al fin y al cabo, la matemática constituye un entramado de *contraposiciones armónicas* en el ámbito de la inteligencia).

Otra recomendación importante consiste en leer, paralelamente, algunos libros de historia de la matemática. Sólo al descubrir y *ver* la matemática *encarnada* en las figuras de sus grandes inventores y gestores, puede empezar a sentirse la rica viveza y la extraordinaria ingeniosidad del pensamiento matemático. A lo largo del texto, el estudiante encontrará algunas notas a pie de página con brevísimos resúmenes de vida y obra de matemáticos que han cambiado los rumbos de la disciplina. Las notas sólo aparecen como una *incitación* a imprescindibles lecturas complementarias en historia de las matemáticas, que debe realizar el estudiante.

Como el estudiante observará repetidamente a lo largo del texto, estaremos delineando un panorama *esencialmente incompleto*, que sólo se irá precisando mejor a medida que el estudiante recorra la Carrera de Matemáticas. En muchos momentos del texto, *proyectamos* situaciones que habrán de entenderse plenamente sólo en ciertos cursos posteriores. Hemos intentado dejar claramente *explícitos* esos lugares de apertura hacia el futuro, ayudando así, en lo posible, a construir una ***guía*** que le pueda servir al estudiante para orientarse dentro de un relieve complejo, que a menudo no le permite ver sino infranqueables montañas en derredor.

Los procesos de aprendizaje, como irá descubriendo el estudiante, necesitan de una *permanente revisión* de los conceptos, definiciones, demostraciones y ejemplos en juego. El entendimiento no surge de una vez por todas, en forma absoluta o emanada de alguna iluminación superior, sino a través de una tarea paciente de *reelaboración constante*, producida por la dura *tenacidad* de los seres humanos. El edificio del saber va asentándose poco a poco, a partir de ideas intuitivas que van refinándose progresivamente. El hecho de contar con ejemplos intuitivos de reales en los primeros capítulos, por ejemplo, *no riñe* con que esos ejemplos vuelvan a ser reentendidos sobre *nuevas bases*, y con un rigor mayor, en los capítulos posteriores. El estudiante debe rehacer las demostraciones, primero observándolas, luego dejando de lado sus apuntes, y situándose sin más ayudas ante un papel en blanco. De la misma manera, los ejemplos y ejercicios que proveen los instructores en el tablero deben incesantemente reescribirse. *Escribir correctamente* (no sólo matemáticamente, sino *en español*) es un bagaje imprescindible en una *carrera de precisión* como la que emprende el estudiante (tanto una carrera contra el tiempo, como una Carrera disciplinar exigente). Un sabio manejo de las jornadas diarias de estudio y una dedicación plena a las labores universitarias son aquí primordiales. Muchos sacrificios son finalmente recompensados por la amplitud de miras, el rigor de pensamiento y la fluidez metodológica que consigue el matemático.

`Agradecimientos`. Estas notas de clase hubiesen sido imposibles sin la extraordinaria generosidad del Profesor Gustavo Rubiano. Gustavo puso a mi disposición todo su extenso conocimiento y su incesante ejercicio práctico del LaTeX, sin los cuales elaborar estas notas me habría tomado muchos semestres más. Sin el menor reparo, Gustavo me instaló los paquetes necesarios, me ayudó en los primeros pasos (mi conocimiento del LaTeX era, si se puede decir, antediluviano, habiendo realizado mi tesis doctoral en las primeras versiones del TeX, plagadas de comandos y sin interfaces gráficas), y, sobre todo, me ofreció los archivos completos correspondientes a sus libros, así como los macros que ha estado utilizando para sus propias publicaciones: una *inaudita amplitud* que nunca sabré agradecerle lo suficiente.

En segundo término, agradezco las extensas lecturas de este material por las Profesoras Myriam Acevedo, Margarita Ospina y Clara Helena Sánchez. Su conocimiento del curso, su amplia experiencia y sus enfoques pedagógicos orientaron muchas correcciones, numerosos esclarecimientos y algunas adiciones en el material. Las atentas lecturas de los Profesores Alexander Cruz, Arnold Oostra y Andrés Villaveces mejoraron también los ejemplos y la precisión del texto. Su extensa visión me permitió explicitar mejor los desarrollos y los eventuales aportes del trabajo. Es claro, sin embargo, que el encadenamiento de este material, así como todos los errores no vislumbrados y los énfasis adoptados quedan bajo mi única responsabilidad. Como consecuencia de las diversas miradas de mis colegas, se puede concluir que tal vez necesitemos renovar nuestro *curriculum* en las Carreras de Matemáticas a nivel colombiano (o latinoamericano). Ojalá este texto pueda situarse en esa dirección.

Agradezco aquí también a mis estudiantes del curso FUNDAMENTOS 2005-II, quienes supieron encarnar con humildad y trabajo el espíritu de este texto, así como a mis estudiantes del curso FUNDAMENTOS 2007-I, quienes ayudaron a enmendar una gran cantidad de erratas diversas, y pudieron responder a las exigencias filosóficas y conceptuales del texto, no fáciles para un primer semestre.

Finalmente, agradezco a Lorenzo Acosta, anterior Director del Departamento de Matemáticas, el que me incitara a acercarme al curso de FUNDAMENTOS, así como a Leonardo Rendón, actual Director del Departamento, por el reconocimiento de un tiempo precioso para elaborar estas NOTAS DE CLASE.

Capítulo 1

El mundo de las matemáticas: sorpresa, invención, rigor

Contenido

1.1. La sorpresa **2**
1.2. La invención **4**
1.3. El rigor **7**
1.4. Ejercicios **12**

En este primer capítulo presentamos algunas de las problemáticas profundas a las que debe abocarse el conocimiento matemático, y las ilustramos con algunos ejemplos clásicos derivados de la matemática griega. El manejo de ciertos razonamientos -en particular, la expansión imaginativa obtenida mediante las pruebas por contradicción- se entrelaza con conceptos, definiciones y ejemplos, alrededor de una idea fundamental que vertebra toda la disciplina: las matemáticas constituyen un instrumentario técnico y conceptual sofisticado para capturar *tránsitos y obstrucciones* entre el mundo físico real y las urdimbres ideales del saber.

1.1. La sorpresa

La matemática se mueve en una incesante oscilación pendular entre reconocer *singularidades y rupturas* dentro de un contexto dado y, luego, tratar de superarlas e integrarlas como *regularidades o continuidades* dentro de otro nuevo contexto ampliado. La fuerza del mundo real, con su enorme complejidad multiforme, donde todo es *mezcla*, subyace en los intentos de delimitación, análisis y conocimiento de esa realidad por diversas comunidades de intérpretes. Mediante múltiples filtros de representación, en el mundo alterno de las ideas se detectan entonces colecciones de estructuras y relaciones generales entre ellas, que dan lugar a valiosos *gérmenes* de orden, simetría y continuidad con los que se intenta comprender el *medio ambiente*, tanto natural como interpretativo, donde circulan los fenómenos y el saber.

Una de las hondas preguntas filosóficas detrás del conocimiento matemático consiste en cuestionarse acerca del irrazonable éxito de las construcciones *ideales* matemáticas en su aplicabilidad al mundo *real*. Aparentemente ajenas a la circunstancia, las matemáticas de los griegos, de los chinos, de los hindúes, de los árabes mantienen aún su vigencia y subsisten aún sus ejemplos, definiciones, teoremas. De forma muy diferente a lo que sucede en otros ámbitos de la cultura, donde no rigen ni la evolución ni la acumulación del saber, en las matemáticas se *avanza* en cambio en la elaboración de un gran edificio, donde a lo largo de la historia se acumulan fragmentos de conocimiento *universal* que trascienden sus acotados cronotopos de origen. Tanto los *acordes* como los *contrastes* entre lo ideal y lo real impulsan los desarrollos de las matemáticas, y una constante sensación de sorpresa nos sumerge al contemplar la *estabilidad* de nociones y conceptos matemáticos que habrían podido estar destinados al deterioro y al olvido.

Uno de los primeros grandes *desajustes* dentro del conocimiento matemático emerge cuando en la escuela de Pitágoras[1] se descubre que la diagonal d de un cuadrado de lado 1 es «inconmensurable» con el lado: no existen «números» a y b (para los griegos, números naturales mayores o iguales que 2) que «conmesuran» d y 1, es decir, tales que $d \cdot b = 1 \cdot a$. Mientras

---

1 Pitágoras (Grecia, siglo VI a.C.) es uno de los fundadores de la matemática como método general del saber. Sabio universal, impulsó las conexiones de la matemática con la filosofía, la música y la cosmología.

que en las matemáticas previas a Pitágoras todo debía ser armonía y razón (como en el caso de las relaciones que el mismo Pitágoras encuentra entre las matemáticas y la música), el descubrimiento de la inconmensurabilidad de d introduce, con un ejemplo irrefutablemente sencillo, aquello que *no* es capturado por la razón. De hecho, si entendemos (con la matemática árabe medieval) los números racionales como primeras coordenadas de la razón, números que se expresan como razones a/b donde a y b son dos enteros ($b \neq 0$), el desajuste de la razón se expresa matemáticamente diciendo que $\sqrt{2}$ (igual a d por el teorema de Pitágoras) no es un número racional. En esas condiciones, emerge una gigantesca sensación de sorpresa en el pensamiento griego, a la vez que se abren los linderos fascinantes de la negación, del *revés* de la razón. Como veremos en la tercera sección de este capítulo, el hecho de que esos linderos de lo *no* dado se abran así al razonamiento y al riguroso control matemático constituye el comienzo de las altas aventuras del pensamiento matemático.

Ante un desajuste, una irregularidad, un desequilibrio, el matemático procede entonces a construir todo un gran andamiaje de conceptos, representaciones, definiciones, deducciones, ejemplos para captar parcialmente aspectos de la singularidad percibida. Esto da lugar a profundos desarrollos matemáticos donde la sorpresa inicial pasa a ser entendida con mayor propiedad, permitiendo explicar en parte los desajustes observados en una primera instancia. Una *ampliación en forma de espiral* es propia entonces del saber matemático: cada vez que se avanza a lo largo de la espiral del conocimiento, se regresa a la problemática inicial desde una nueva perspectiva, con nuevas herramientas que permiten ver más y mejor. En ese proceso, **no existe un fundamento último**, ni una visión superior única que resuelva todos los problemas.

Si la matemática se preocupa por un tipo de sorpresa ligada a lo singular, a lo incomprensible en primera instancia, una fuerte oscilación del péndulo la acerca de manera natural también al estudio de ciertas formas de *equilibrio* y de *simetría* con las que pueden codificarse regularidades profundas, tanto en el mundo real, como en el conjunto de urdimbres ideales con las que se intenta cartografiar esa realidad. La *geometría de los números* en la matemática griega combina de manera vistosa algunos ejemplos elementales de simetría.

Tanto los números cuadrados ($C_n = n^2$) como los números triangulares ($T_n = 1 + 2 + \ldots + n$), construidos gracias a claras representaciones geométricas, se combinan adecuadamente entre sí.

De hecho, una primera constatación recursiva permite observar que $T_n = T_{n-1}+n$, un tipo de enlace aritmético muy primario, que puede ser pronto superado por relaciones geométricas más interesantes. En efecto, un desplazamiento invertido de T_{n-1} sobre T_n muestra inmediatamente que $T_{n-1}+T_n = C_n$, así como otro desplazamiento muestra que $T_n+T_n = n(n+1)$, de donde $T_n = n(n+1)/2$.

La extensión infinita de ciertos conceptos es otra de las fuentes centrales de sorpresa en la matemática griega. La prueba clásica de la infinitud de los números primos (ver sección 3) -una joya de sencillez que se abre tanto al revés del razonamiento (prueba por contradicción) como al análisis estructural de un problema (factores y factorial)- abre compuertas insospechadas en la matemática. La prolongación indefinida, la extra-limitación de lo acotado incitan a la búsqueda prolongada e incesante de aquello que se nos escapa. La imaginación matemática empieza entonces a explorar oquedades, cesuras y fronteras del entendimiento de las que nunca podrá volver a retrotraerse.

1.2. La invención

Los cauces de la invención matemática son multiformes y multifacéticos. Un concepto matemático merece entenderse como un complejo hipercubo n-dimensional, que va siendo capturado progresivamente gracias a diversos cortes transversales. Las perspectivas desde las que se percibe cada corte cambian incesantemente, y es casi imposible entrelazar unitariamente todas las secciones a partir de las cuales podría reconstruirse el concepto completo.

La emergencia de la inventividad matemática estuvo, en los comienzos de la cultura griega, ligada profundamente con la filosofía. Herramientas, ambas, de comprensión general del mundo, buscaron en un mismo tiempo armonías y equilibrios entre el aparente caos circundante. Las *paradojas*