CIME Summer Schools

36

G. Grioli · C. Truesdell (Eds.)

Non-linear Continuum Theories

Bressanone, Italy 1965

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

G. Grioli • C. Truesdell (Eds.)

Non-linear Continuum Theories

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Bressanone (Bolzano), Italy,
May 31-June 9, 1965

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-11032-0 e-ISBN: 978-3-642-11033-7
DOI:10.1007/978-3-642-11033-7
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1966
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

1° Ciclo - Bressanone - dal 31 maggio al 9 giugno 1965

"NON-LINEAR CONTINUUM THEORIES"

Coordinatori : Prof. C. Truesdell
Prof. G. Grioli

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

B. COLEMAN

M.E. GURTIN

THERMODYNAMICS AND WAVE PROPAGATION IN ELASTIC AND VISCOELASTIC MEDIA

Corso tenuto a Bressanone dal 31 maggio al 9 giugno 1965

THERMODYNAMICS AND WAVE PROPAGATION IN ELASTIC AND VISCOELASTIC MEDIA

by

Bernadrd D. Coleman

Mellon Institute, Pittsburgh

Morton E. Gurtin

Brown University Providence

In continuum physics the word wave is used with several distinct meanings. To some a wave is a sinusoidal disturbance, to some it is any member of a certain class of solutions to a hyperbolic equation, and to others it is a propagating singular surface. Here we follow (Christoffel, Hugoniot, Hadamard, and Duhem and use the word in the last sense; thus, we define a wave to be a surface , moving with respect to the material , across which some kinematical variable, such as the acceleration or the velocity, suffers a jump discontinuity. In the present age of sonic booms and nuclear explosions , even the layman is familiar with "shock waves" . To find, however, applications for a general theory of propagating singular surfaces, one does not have to turn to the latest accomplishments of physics ; it suffices to think carefully of the motion of an object struck with a hammer.

Here we review some aspects of the classical theory of wave propagation in elastic materials and discuss recent extensions of the classical theory to materials with memory.

Let $x_i(X_j, t)$ give the spatial position at time t of the material point which occupies the position X_j in the reference configuration.

---

*We use Cartesian tensor notation.

According to the Duhem-Hadamard classification scheme, a surface $\Sigma = \Sigma(t)$ is a wave of order N if the N' th-order derivatives of $x_i(X_j, t)$ exhibit jump discontinuities at Σ, but all lower derivatives are continuous across Σ. A shock is a wave of order 1; that is, $x_i(X_j, t)$ is continuous, but the velocity $\dot{x}_i = \frac{\partial}{\partial t} x_i(X_j, t)$ and the deformation gradient $F_{ij} = \frac{\partial}{\partial X_j} x_i(X_k, t)$ show jumps across Σ. At an acceleration wave second derivatives, such as the acceleration $\ddot{x}_i = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i(X_j, t)$, are the first to suffer jumps; hence, an acceleration wave is a singular surface of order two. Our interest here is in waves with $N \geq 2$.

In the terminology of Truesdell and Toupin [1960, 2] and Truesdell [1961, 2], the speed of propagation V of a wave Σ is the rate of advance of Σ along its unit normal relative to the particles instantaneously situated on Σ. A convenient measure of the amplitude of wave of order N is a vector s_i defined by

$$(1) \qquad (-V)^N s_i = [\overset{(N)}{x}_i]$$

where $[\overset{(N)}{x}_i]$ is the jump in $\overset{(N)}{x}_i = \frac{\partial^N}{\partial t^N} x_i(X_k, t)$ across Σ. for an acceleration, $V^2 s_i = [\ddot{x}_i]$.

Let the Piola - Kirchhoff stress tensor S_{ij} be defined by the formula*.

* Whenever an index is repeated in a product of two terms, summation over that index is understood.

(2) $$\rho\, S_{ik} F_{jk} = T_{ij}$$

where T_{ij} is the familiar stress tensor of Cauchy and ρ is the present mass density. For an elastic material, when thermodynamic influences are ignored, S_{ij} is a function of the deformation gradient :

(3) $$S_{ij} = S_{ij}(F_{k\ell})$$

The classical Fresnel-Hadamard theorem asserts that for any material obeying (2) the amplitude s_i and speed of propagation V of an acceleration wave traveling in the direction n_k must obey the propagation condition

(4) $$Q_{ij}(n_k)s_j = V^2 s_i \;,$$

where the tensor $Q_{ij}(n_k)$, called the acoustic tensor, is given by**

(5) $$Q_{ij}(n_k) = F_{am} F_{b\ell}\, n_a n_b \frac{\partial}{\partial F_{jm}} S_{i\ell}(F_{pq}).$$

Ericksen [1953 , 1] , working in the theory of isotropic incompressible hyperelastic materials, and Truesdell [1961, 2] , working in the theory of compressible elastic materials, have shown that all elastic waves of order $N > 2$ must also obey the propagation condition (4) with $Q_{ij}(n_k)$ given by (5) .

Even in elasticity theory one should include thermodynamic incluences and allow S_{ij} to depend not only on $F_{k\ell}$ but also

** For the most general statement of the Fresnel-Hadamard Theorem, and for a detailed discussion of its consequences, see Trusdell [1961, 2] on a thermodynamic variable such as the temperature θ or the specific entropy η. In the thermodynamic theory of acceleration waves, $\dot{x}_i$, F_{ij}, θ, and η are taken to be continuous across the wave:

$$(6) \qquad [\dot{x}_i] = [F_{jk}] = [\theta] = [\eta] = 0.$$

An acceleration wave is said to be <u>homothermal</u> if, in addition to to (6), one has

$$(7) \qquad [\dot{\theta}] = [\frac{\partial \theta}{\partial X_j}] = 0.$$

On the other hand, if, in place of (7),

$$(8) \qquad [\dot{\eta}] = [\frac{\partial \eta}{\partial X_j}] = 0,$$

then the wave is called <u>homentropic</u>. It is the content of the <u>first theorem of Duhem</u>, that homothermal (homentropic) acceleration waves in elastic materials obey (4), proveded that the derivative $\frac{\partial}{\partial F_{jm}}$ in (5) is taken at constant temperature (entropy). The <u>second theorem of Duhem</u> gives the physical circumstances in which acceleration waves are homothermal or homentropic : Every acceleration wave in an elastic material obeying Fourier's law of heat conduction with positive-definite thermal conductivity is homothermal: every acceleration wave in an elastic material which does not conduct heat is homentropic*.

---

* The two theorems of Duhem are explained and given modern proofs by Truesdell [1961, 2].

An elastic material is said to be <u>hyperelastic</u> if the stress-strain function of (3) is obtained by differentiating a stored energy function Φ ; i.e., if

$$S_{ij}(F_{k\ell}) = \frac{\partial}{\partial F_{ij}} \Phi(F_{k\ell}). \tag{9}$$

It is a familiar assertion of classical thermodynamics that every elastic material is hyperelastic in the sense that

$$S_{ij}(F_{k\ell}, \theta) = \frac{\partial}{\partial F_{ij}} \psi(F_{k\ell}, \theta), \tag{10}$$

$$S_{ij}(F_{k\ell}, \eta) = \frac{\partial}{\partial F_{ij}} (F_{k\ell}, \eta), \tag{11}$$

where ψ is the specific Helmoltz free energy $\psi = \epsilon - \theta\eta$, and ϵ the specific internal energy .

A <u>theorem of Hadamard</u> asserts that for a hyperelastic material the acoustic tensor (5) must be symmetric :

$$Q_{ij}(n_k) = Q_{ji}(n_k) . \tag{12}$$

It follows from this result , then first theorem of Duhem, and the classical equations (10) and (11), that the acoustic tensor of an elastic material must be symmetric in homothermal and homentropic waves.

The recent years have seen the development of general theories of non-linear materials with memory*. In these studies it is assumed that the present stress depends not only on the present value of the strain but also on the past history of the strain, and one attempts to solve problems without specializing the functional expressing this dependence. Let us define a function $F^{(t)}_{kl}$ over the half-closed interval $[0, \infty)$ as follows;

$$F^{(t)}_{k\ell}(s) = F_{k\ell}(t-s) \quad , \qquad 0 \leq s < \infty. \tag{13}$$

This function is called the history up to time t of the deformation gradient. The past history $F^{(t)}_{(r)k\ell}$ of the deformation gradient is just the restriction of $F^{(t)}_{k\ell}$ to the open interval $(0,\infty)$; i.e., $F^{(t)}_{(r)k\ell}(s)$ agrees with $F^{(t)}_{k\ell}(s)$ for all $s > 0$ but is left undefined for $s=0$. Obviously, a knowledge of the history $F^{(t)}_{k\ell}$ is equivalent to a knowledge of the present value $F_{k\ell}(t) = F^{(t)}_{k\ell}(0)$ and the past history $F^{(t)}_{(r)k\ell}$. Following Noll [1958, 1], we define a simple material to be a material for which the stress is determined when $F^{(t)}_{k\ell}$ is given. For such a material we can write

$$S_{ij} = \underset{=}{S}_{ij}(F^{(t)}_{k\ell}) \ . \tag{14}$$

---

*See , for example, rhe works of Green and Rivlin [1957, 1], Noll [1958, 1,] Coleman and Noll [1960, 1] [1961, 1], and Wang [1965, 7], which are summarized and extended in the exposition of Truesdell and Noll [1965, 6].

Here $\underset{=}{S}_{ij}$ is a <u>functional</u> ; i.e., a function whose argument is a function, $F^{(t)}_{kl}$, and whose value is a tensor, S_{ij}. When we wish to emphasize that for a general simple material S_{ij} depends on both the present value and the past history of the deformation gradient, we write (14) in the form*

$$(15) \qquad S_{ij} = \underset{=}{S}_{ij}\,(F^{(t)}_{(r)k\ell}\,;F_{k\ell}\,) ,$$

where, for short, we put $F_{kl} = F^{(t)}_{kl}\,(0)$. On comparing (3) and (15), we see that the elastic materials considered in the previous section are those simple materials for which the dependence of $\underset{=}{S}_{ij}(F^{(t)}_{(r)k\ell};\, F_{k\ell}\,)$ on the past history $F^{(t)}_{(r)ij}$ is negligible. Here we do not assume that influence of $F^{(t)}_{(r)}$ on S_{ij} can be neglected; we assume merely that this influence is compatible with the principle of fading memory; i.e., with a smoothness postulate used by Coleman and Noll [1960, 1] [1961, 1] to render mathematical the intuitive idea that strains which occurred in the very distant past should have a smaller influence on the present stress than strains which occurred in the recent past.

Let us denote by $D_{F_{mn}}\,\underset{=}{S}_{ij}(F^{(t)}_{k\ell}\,)$ the fourth-order tensor obtained by differentiating the stress with respect to the present value of deformation gradient holding fixed the past history :

$$(16) \qquad D_{F_{mn}}\underset{=}{S}_{ij}(F^{(t)}_{k\ell}\,) = \frac{\partial}{\partial F_{mn}}\,\underset{=}{S}_{ij}(F^{(t)}_{(r)k\ell}\,;\, F_{k\ell}).$$

*There is no summation over k and l in equations (15) and (16).

This tensor [1964, 1, 2] gives the moduli for instantaneous response to small strain impulses superimposed on $F^{(t)}_{k\ell}$ at time t.

Equation (16) defines a linear differential operator $D_{F_{mn}}$ mapping functionals into functionals ; this operator plays a central role in the theory of wave propagation [1965, 1-4] and in the thermodynamics of materials with memory [1964, 1, 2] .

The theory of singular surfaces propagating in materials with memory is not an empty subject. Among the materials subsumed under the class of simple materials with fading memory are the materials of the theory of linear viscoelasticity. In that theory, Sips [1951, 1] , Lee and Kanter [1953, 2] , and Chu [1962, 1] have exhibited explicit solutions of the dynamical equations showing shock waves. It is an elementary exercise to construct from these solutions others showing acceleration waves. Further, Pipkin [1966, 1] has obtained exact solutions showing shock and acceleration waves for a special simple fluid with fading memory that gives rise to nonlinear field equations .

Recently [1965, 1-4], we have been able to extend to general non-linear materials with memory the classical propagation theorems given in the previous section. For example, we have the following extension [1965, 4] of the Fresnel-Hadamard and Ericksen - Truesdell theorems. Consider a wave of order 2 or greater traveling in the direction n_k in a general simple material with fading memory ; such a wave obeys the propagation condition (4)*, and the tensor $Q_{ij}(n_k)$, now called the instantaneous acoustic tensor, is given by the following remarkably simple generalization of (5):

$$Q_{ij}(n_k) = F_{am} F_{b\ell} n_a n_b D_{F_{jm}} \underset{=}{S}_{i\ell}(F^{(t)}_{pq}) \quad (17)$$

For the validity of this theorem the past history of the material just in front of the wave may be arbitrary, subject only to certain natural tameness hypotheses.

Of course, we know that the stress in a general material with memory depends not only on the history of the deformation gradient but also on the history of a thermodynamic variable. Hence, (14) should be replaced by either

$$S_{ij} = \bar{\underset{=}{S}}_{ij}(F^{(t)}_{k\ell}, \theta^{(t)}) \quad (18)$$

or

$$S_{ij} = \hat{\underset{=}{S}}_{ij}(F^{(t)}_{k\ell}, \eta^{(t)}), \quad (19)$$

where the function $\theta^{(t)}$ is the <u>history of the temperature</u> and the function $\eta^{(t)}$ the <u>history of the specific entropy</u>

$$\theta^{(t)}(s) = \theta(t-s), \qquad \eta^{(t)}(s) = \eta(t-s) \qquad 0 \leq s < \infty. \quad (20)$$

* Propagation conditions of the type (4) are known for acceleration waves in several special materials; for elastic materials (2.18) was derived by Hadamard [1901, 1] and for the theory of linear viscoelasticity by Herrera and Gurtin [1965, 5]. We have recently seen a manuscript by Varley [1965, 7] in which he arrives at (4) for acceleration waves in materials of integral type.

When (18) is assumed , it is also reasonable to assume that the specific Helmholtz free energy ψ is given by a functional $\underset{=}{p}$ of the histories $F_{k\ell}^{(t)}$, and $\theta^{(t)}$,

$$\psi = \underset{=}{p}\,(F_{k\ell}^{(t)}, \theta^{(t)}) , \tag{21}$$

and that the heat flux vector q_i depends not only on the present temperature gradient $g_m = \frac{\partial}{\partial x_m}\theta$ but also on $F_{kl}^{(t)}$ and $\theta^{(t)}$,

$$q_i = \underset{=}{q}_i(F_{k\ell}^{(t)} , \theta^{(t)} ; g_m) \tag{22}$$

When (19) is assumed, it is reasonable to postulate that the specific internal energy is given by a functional of $F_{k\ell}^{(t)}$ and $\eta^{(t)}$;

$$\epsilon = \underset{=}{e}\,(F_{k\ell}^{(t)} , \eta^{(t)}) . \tag{23}$$

Starting from assumptions somewhat more general than these, Coleman [1964, 1] has shown that the functionals $\bar{\underset{=}{S}}_{ij}$ and $\hat{\underset{=}{S}}_{ij}$ are compatible with the principle of fading memory and the second law of thermodynamics only if these functionals are determined by $\underset{=}{p}$ and $\underset{=}{e}$ through the relations,

$$\bar{\underset{=}{S}}_{ij}(F_{k\ell}^{(t)} , \theta^{(t)}) = D_{F_{ij}}\ \underset{=}{p}(F_{k\ell}^{(t)} , \theta^{(t)}), \tag{24a}$$

$$\hat{\underset{=}{S}}_{ij}(F_{k\ell}^{(t)}, \eta^{(t)}) = D_{F_{ij}}\ \underset{=}{e}(F_{k\ell}^{(t)} , \eta^{(t)}) , \tag{24b}$$

where $D_{F_{ij}}$ is the operator defined in (16). These relations generalize to materials with memory the classical relations (10) and

and (11) for elastic materials.

Even when the history of a thermodynamic variable is brought in, the propagation condition (4) still holds for homothermal and homentropic acceleration waves [1965, 3, 4]. For homothermal waves the instantaneous acoustic thensor Q_{ij} is given by (17) with $\underset{=}{S}_{ij}(F^{(t)}_{pq})$ replaced by $\bar{\underset{=}{S}}_{ij}(F^{(t)}_{pq}, \theta^{(t)})$, and the function $\theta^{(t)}$, the history of the temperature up to the moment of arrival of the wave, is held fixed in the computation of the derivative (16). For homentropic acceleration waves $D_{F_{pq}}$ is applied to $\hat{\underset{=}{S}}_{ij}(F^{(t)}_{pq}, \eta^{(t)})$ and the function $\eta^{(t)}$, the history of the entropy at the wave, is held fixed in (16) and (17). These observations extend to materials with memory the first theorem of Duhem. The second theorem of Duhem also has a direct generalization [1965, 3, 4]: In a definite conductor of heat, every acceleration wave is homothermal ; in a non-conductor, every acceleration wave is homentropic. Here, by a definite conductor, we mean a material for which $-\dfrac{\partial q_i}{\partial g_m}$, computed using (22), is always a positive - definite tensor. The proof of the theorem is straightforward for a definite conductor , the proof for a non-conductor, i.e., a material with $q_i \equiv 0$, uses a generalization [1964, 1] of the relations (24).

We should like to bring to the attention of experimenters the following extension [1965, 4] of the classical symmetry condition (12) : <u>The relations (24) imply that, even in a material with memory , the instantaneous acoustic tensors for both homothermal and homentropic waves are always symmetric tensors in the sense</u>

of equation (12) . This theorem appears to supply a method of testing the physical appropriateness of the relations (24). Fortunately, Truesdell [1961, 2] [1964, 3,] working in the theory of elastic materials, has found situations in which measurements of wave velocity can test the symmetry of the acoustic tensor. His analyses can be applied with small modifications to the theory of acceleration waves entering a general material with memory which previous to arrival of the wave had always been at rest in a fixed configuration.

REFERENCES

1901 1 J. Hadamard, Bull. Soc. Math. France 29, 50-60.

1951 1 R. Sips, J. Polymer Sci. 6 , 285-293.

1953 1 J. L. Ericksen, J. Rational Mech. Anal. 2, 329-337.

2. E. H. Lee & L. Kanter, J. Appl. Phys. 24, 1115-1122.

1957 1 A. E. Green & R. S. Rivlin, Arch. Rational Mech. Anal. 1, 1-21.

1958 1 W. Noll, Arch. Rational Mech . Anal. 2, 197-226 .

1960 1 B. D. Coleman & W. Noll 6, 355-370.

2 C. Truesdell & R. A. Toupin, The classical field theories . In : Flügge's Encyclopedia of Physics, 3/1, 225-793.

1961 1 B.D. Coleman & W. Noll, Rev. Mod. Phys. 33, 239-249.

2 C. Truesdell, Arch. Rational Mech. Anal. 8, 263-296.

1962 1 B.-T. Chu, March 1962, ARPA report from the Division of Engineering, Brown University.

1964 1 B. D. Coleman, Arch. Rational Mech. Anal. 17, 1-46.

2 B. D. Coleman , Arch. Rational Mech. Anal. 17, 23`-254

3 C. Truesdell, Internat. Sympos. Second-Order Effects, Haifa, 1962, pp. 187-199.

1965 1 B. D. Coleman, & M.E. Gurtin, I. Herrera, R., Arch. Rational Mech. Anal. 19, 1, 1-19 .

2 B.D. Coleman, & M.E. Gurtin, Arch. Rational Mech. Anal . 19, 4

3 B.D. Coleman M.E. Gurtin , Arch. Rational Mech. Anal. 19.5

1965 4 B. D. Coleman & M. E. Gurtin, Arch. Rational Mech. Anal. **19**, 5 .

5 I. Herrera, R. & M.E. Gurtin, Quart. Appl. Math. **22**, 360-364.

6 C. Truesdell & W. Noll, The non-linear field theories of mechanics, In : <u>Flügge's Encyclopedia of Physics</u>, **3/3**, in press.

7 E. Varley, Arch. Rational Mech. Anal. **19**, 3, 215-225.

8 C.-C. Wang, Arch. Rational Mech. Anal. **18**, 117-126.

1966 1 A.C. Pipkin, Quart. Appl. Math. , in press.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

L. DE VITO

SUI FONDAMENTI DELLA MECCANICA DEI SISTEMI CONTINUI (II)

Corso tenuto a Bressanone dal 31 maggio al 9 giugno 1965

SUI FONDAMENTI DELLA MECCANICA DEI SISTEMI CONTINUI (II)

di

Luciano De Vito

Università-Roma

In un recente lavoro, in collaborazione tra il dott. Innocente Mazzaroli e lo scrivente, [1] si è cominciato a sviluppare un ordine di idee, proposto dal Prof. Gaetano Fichera già alcuni anni fa - in uno dei Suoi corsi all'Istituto Nazionale di Alta Matematica - relativo all'introduzione di un punto di vista "globale" nella teoria della "Meccanica dei sistemi continui", in luogo del punto di vista "puntuale" che più spesso viene adottato. Secondo tale punto di vista "globale", le forze di volume e di superficie non saranno più rappresentate da integrali (in senso ordinario) di funzioni continue, bensì da funzioni di insieme affatto arbitrarie purchè numerabilmente additive. Nel sucitato lavoro si è pervenuti all'impostazione ed allo studio delle equazioni cardinali della "Statica dei sist‑mi continui", per il caso dei corpi indefinitamente estesi. Verrà ora qui esposto il caso dei corpi limitati (includendovi anche il caso dei corpi "fluidi").

Strumento essenziale per tale studio è la nozione di "vettore dotato di divergenza in senso debole (o in senso integrale)", che rientra, come caso particolarissimo, nella più generale nozione di " k-misura dotata di differenziale in senso debole" introdotta

---

[1] L. De Vito e I. Mazzaroli: "Sui fondamenti della Meccanica dei sistemi continui", Memorie Acc. Naz. Lincei, v. VII, 1965.

da G. Fichera [2]. Alla considerazione delle equazioni cardinali della "Statica" per corpi limitati - secondo l'attuale punto di vista - conviene quindi premettere lo studio dei vettori a divergenza debole e quello (strettamente connesso) delle funzioni a gradiente debole. A tale studio sono, appunto, dedicati i primi paragrafi.

1. Notazioni

In tutto quel che segue, ci riferiremo sempre allo spazio euclideo E^3 nel quale penseremo introdotto un arbitrario sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Se con x (con ξ) indicheremo il punto generico di E^3, con x^1, x^2, x^3, (con ξ^1, ξ^2, ξ^3) denoteremo le coordinate del detto punto, nel riferimento cartesiano introdotto. Denoteremo poi con I gli intervalli (superiormente aperti) di E^3 in relazione al fissato sistema cartesiano x^1, x^2, x^3, con I_{y^i} la proiezione ortogonale di I sul piano $x^i = 0$ (avendo indicato con y^i la coppia x^{i+1}, x^{i+2}, ove gli indici si intendono definiti a meno dell'aggiunzione di un multiplo di 3), con (a, b) l'intervallo $a \leq t < b$ dell'asse reale. Con il termine funzione, intenderemo sempre una funzione scalare, reale, di x, oppure, sottintendendo "vettoriale", un vettore a tre componenti reali pensato come funzione del punto x; invece di "funzione vettoriale" useremo spesso semplicemente il termine "vettore". Se con u indichiamo un vettore, con u_1, u_2, u_3 indicheremo sempre le sue componenti rispetto al sistema cartesiano introdotto in E^3. Con i simboli $\mu \equiv \mu(B)$, $\alpha \equiv \alpha(B)$ denoteremo sempre una misura (cioè una funzione definita sui boreliani B

---

(2) G. Fichera: "Spazi di k-misure e di forme differenziali". Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem 1960, Israel Ac. of Sciences & Humanities, Pergamon Press, 1961.

numerabilmente additiva) scalare o vettoriale ; in questo secondo caso sottintenderemo sempre che essa sia a tre componenti (le componenti cartesiane di μ , rispetto al sistema x^1, x^2, x^3 saranno indicate con μ_1, μ_2, μ_3) . Con il termine dominio - che denoteremo con il simbolo D - intenderemo sempre un dominio "propriamente regolare" (nel senso di Fichera[3]) ; con ciò intendiamo che D è un dominio regolare, avente la frontiera $\mathcal{F}D$ composta di una unica superficie regolare semplice e chiusa, tale inoltre che sia possibile definire un versore $\lambda(x)$ per ogni $x \in \mathcal{F}D$, sempre "penetrante" nell'interno di D , continuo al variare di x su $\mathcal{F}D$, di classe 1 su ciascuna delle porzioni di superficie regolare delle quali si compone $\mathcal{F}D$ [4] ; inoltre deve esistere un numero positivo $\varrho_0 < 1$ tale che , per ogni fissato $\varrho \in (0, \varrho_0)$, l'insieme descritto dal punto $x = \xi + \varrho\lambda(\xi)$ al variare di ξ su $\mathcal{F}D$ sia una superficie regolare semplice e chiusa, che costituisce la completa frontiera di un dominio regolare, che indichiamo con D_ϱ ; infine, la trasformazione che ad ogni $\xi \in \mathcal{F}D$ e ad ogni $\varrho \in (0, \varrho_0)$ associa il punto $x = \xi + \varrho\lambda(\xi)$ deve essere invertibile. Si potrà allora ricoprire $\mathcal{F}D$ con un numero finito di dominii T_K in guisa tale che ciascun punto di $\mathcal{F}D$ sia interno ad uno almeno di essi ed inoltre, per ogni K , l'insieme

---

[3] Cfr. G. Fichera: "Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali" , Corsi Ist. Naz. Alta Mat. , 1958, pag. 52.

[4] Le nozioni di "dominio regolare", "porzione di superficie regolare" etc. sono qui intese nel senso precisato in : Picone-Fichera , "Trattato di Analisi Matematica" , Tumminelli editore , 1956 , Roma .

T_K sia rappresentabile, con una trasformazione continua e "di classe 1 a pezzi", sul rettangolo R_K dello spazio cartesiano X^3, definito da $0\leq t^i\leq 1;\ i=1,2;\ -1\leq t^3\leq 2;$ possiamo supporre anche che, nella detta trasformazione, l'immagine di $T_K\cap D$ sia $Q\equiv$ $\equiv(0\leq t^i\leq 1;\ i=1,2;\ 0\leq t^3\leq 2)$ e l'immagine di $T_K\cap\mathcal{F}D$ sia $S\equiv$ $\equiv(0\leq t^i\leq 1;\ i=1,2;\ t^3=0)$. Per ogni h tale che $0<h<1$ e per ogni $j=1,2$, denoteremo con S_j^h la porzione di S definita da: $0\leq t^i\leq 1;\ 0\leq t^j\leq 1-h;\ t^3=0;\ i\neq j;\ i,j=1,2$. Se u è una funzione definita sui punti di $\mathcal{F}D$, e quindi, in particolare, in punti di T_K, con $u_K(t^1,t^2)$ indicheremo la u pensata come funzione del punto (t^1,t^2) variabile in S. Se poi $u_K(t^1,t^2)$ è "di classe 1 a pezzi" su S, in corrispondenza ad ongi K, il vettore che, nella rappresentazione detta, per ogni K, coincide con il vettore di componenti $\frac{\partial u_K}{\partial t^1}$, $\frac{\partial u_K}{\partial t^2}$, sarà indicato con il simbolo $\mathrm{grad}_{\mathcal{F}D}\, u$.

Con ν indicheremo sempre la normale interna a $\mathcal{F}D$; talora useremo anche il simbolo $\nu_{\mathcal{F}D}$. Diremo poi che il dominio propriamente regolare D è di classe m se la sua frontiera è una superficie di classe m.

Con $C^m(D)$ si indicherà l'insieme delle funzioni di classe m in D; con $\overset{0}{C}{}^m(D)$ quello delle funzioni di $C^m(D)$ che hanno supporto contenuto in $D-\mathcal{F}D$; con $\mathcal{L}^p(D)$ l'insieme delle funzioni di modulo di potenza p-esima sommabile in D secondo Lebesgue, $1\leq p\leq+\infty$[5], con $\mathcal{H}^p(D)$ l'insieme delle funzioni di $\mathcal{L}^p(D)$ che posseggono derivate prime (in senso generalizzato) in

---

(5) Se $p=+\infty$ e se f è una funzione lebseguiana in un insieme L lebesguiano, dicendo che $|f|^p$ è sommabile in L, intendiamo che $|f|$ è quasi ovunque limitata in L o, come anche si dice, pseudolimitata in L. Converremo poi che, per $p=+\infty$, il simbolo $\left(\int_L |f|^p dx\right)^{1/p}$ significhi $\underset{L}{\text{pseudo estr. sup.}}\,|f|$.

D, di modulo di potenza p-esima sommabile in D, con $\mathcal{H}^{p',p}(D)$ l'insieme delle funzioni di $\mathcal{L}^{p'}(D)$ che posseggono derivate parziali prime (in senso generalizzato) in D, di modulo di potenza p- esima sommabile in D, $1 \leq p' \leq +\infty, 1 \leq p \leq +\infty$; con $\Lambda^{p',p}(\mathcal{F}D)$ l'insieme delle funzioni u definite su $\mathcal{F}D$, aventi modulo di potenza p'-esima sommabile su $\mathcal{F}D$ e, se $p > 1$, tali che, per ogni K, risultino sommabili in $(0,1)$ le funzioni di h:

$$\int_{S_1^h} \left| \frac{u_K(t^1+h, t^2) - u_K(t^1, t^2)}{h} \right|^p dt^1 dt^2 \quad , \int_{S_2^h} \left| \frac{u_K(t^1, t^2+h) - u_K(t^1, t^2)}{h} \right|^p dt^1 dt^2$$

$p \leq +\infty$;

con $V(B)$ l'insieme delle misure reali (scalari o vettoriali) definite sulla famiglia di tutti i boreliani contenuti nel boreliano B di E^3; analogamente, se B è un boreliano di $\mathcal{F}D$, con $V(B)$ intenderemo la totalità delle misure reali (scalari o vettoriali) definite sui boreliani di $\mathcal{F}D$ contenuti in B. Porremo inoltre :

$$\| u \|_{\mathcal{L}^p(D)} = \left| \int_D |u|^p dx \right|^{1/p} \quad , \| u \|_{\mathcal{L}^p(\mathcal{F}D)} = \left| \int_{\mathcal{F}D} |u|^p d\sigma \right|^{1/p}$$

$$\| u \|_{\mathcal{H}^p(D)} = \| u \|_{\mathcal{L}^p(D)} + \| \operatorname{grad} u \|_{\mathcal{L}^p(D)} \quad , \quad \| u \|_{\mathcal{H}^{p',p}(D)} = \| u \|_{\mathcal{L}^{p'}(D)} +$$

$$+ \| \operatorname{grad} u \|_{\mathcal{L}^p(D)} \quad , \quad 1 \leq p \leq +\infty ; \quad \| u \|_{\Lambda^{p',p}(\mathcal{F}D)} = \| u \|_{\mathcal{L}^{p'}(\mathcal{F}D)} +$$

$$+ \sum_K \left[\int_0^1 dh \int_{S_1^h} \left| \frac{u_K(t^1+h, t^2) - u_K(t^1, t^2)}{h} \right|^p dt^1 dt^2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 dh \int_{S_2^h} \left| \frac{u_K(t^1, t^2+h) - u_K(t^1, t^2)}{h} \right|^p dt^1 dt^2 \right]^{1/p} , \quad 1 < p \leq +\infty ;$$

$$\| u \|_{\Lambda^{p',1}(\mathcal{F}D)} = \| u \|_{\mathcal{L}^{p'}(\mathcal{F}D)} \quad , \quad \| u \|_{C^0(D)} = \max_{x \in D} |u(x)| .$$

Se μ è una misura appartenente a $V(B)$, porremo :

$$\| \mu \|_{V(B)} = V_\mu(B)$$

ove $V_\mu(B)$ è la variazione totale di μ su B[6] .

Le norme testè definite introducono, come è noto, una struttura di spazio normato rispettivamente negli insiemi $\mathcal{L}^p(D)$, $\mathcal{L}^p(\partial D)$ etc . Seguiteremo a indicare i detti spazi normati con i medesimi simboli $\mathcal{L}^p(D)$, $\mathcal{L}^p(\partial D)$ etc.[7] . Lo spazio duale di uno spazio normato S sarà denotato con S^* e la norma in S^* con $\| \ \|_{S^*}$.

Converremo poi sempre di indicare con q, q', q'' etc. il duale rispettivamente di p, p', p'' etc. (cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$, $\frac{1}{p''} + \frac{1}{q''} = 1$) con la convenzione che il duale di 1 è $+\infty$ e viceversa.

2. Divergenza debole di un vettore

Sia u un vettore di $\mathcal{L}^1(D)$. Si dice che u è dotato di divergenza debole su $D-\partial D$ (rappresentata da una misura) se esiste $\mu \in V(D-\partial D)$ tale che :

$$\int_D u \times \operatorname{grad} v \, dx = - \int_{D-\partial D} v \, d\mu \tag{1}$$

per ogni $v \in C^1(D)$, e la misura μ , univocamente determinata da questa condizione , chiamasi divergenza debole di u su $D-\partial D$.

Si diche che u è dotato di divergenza debole su D (rappresentata da una misura) se esiste $\mu \in V(D)$ tale che :

---

(6) Cfr. loc. cit. in[1] p. 214 .

(7) Gli spazi $\Lambda^{p',p}(\partial D)$ sono stati introdotti da E. Gagliardo (per $p'=p$) cfr. E. Gagliardo, "Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili" , Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova , 1957 .

(2) $$\int_D u \times \operatorname{grad} v \, dx = -\int_D v \, d\mu$$

per ogni $v \in C^1(D)$.

E' ovvio che :

I. Se $u \in \mathcal{L}^1(D)$ è dotato di divergenza debole $\mu \in V(D)$ su D, e di divergenza debole $\tilde{\mu} \in V(D-\mathcal{F}D)$ su $D-\mathcal{F}D$, risulta $\tilde{\mu}(B) = \mu(B)$ per ogni boreliano $B \subset D-\mathcal{F}D$.

II. Se $u \in \mathcal{L}^1(D)$ è dotato di divergenza debole $\mu \in V(D)$ su D allora u è anche dotato di divergenza debole $\tilde{\mu} \in V(D-\mathcal{F}D)$ su $D-\mathcal{F}D$ e riesce : $\tilde{\mu}(B) = \mu(B)$ per ogni boreliano $B \subset D-\mathcal{F}D$

In generale, invece, non è vero che, dall'essere $u \in \mathcal{L}^1(D)$ dotato di divergenza debole su $D-\mathcal{F}D$, segua che u è dotato di divergenza debole su D . Si ha però che ;

III. Se $u \in \mathcal{L}^1(D)$ è dotato di divergenza debole $\mu \in V(D-\mathcal{F}D)$ su $D-\mathcal{F}D$, esiste un vettore $u_0 \in \mathcal{L}^1(D)$ dotato di divergenza debole su $D-\mathcal{F}D$ identicamente nulla, tale che $u+u_0$ sia dotato di divergenza debole $\in V(D)$ su D .

Sia infatti $\alpha \in V(\mathcal{F}D)$ tale che $\alpha(\mathcal{F}D) = -\mu(D-\mathcal{F}D)$ e si consideri la $\tilde{\mu} \in V(D)$ così definita : $\tilde{\mu}(B) = \mu[B \cap (D-\mathcal{F}D)] + \alpha(B \cap \mathcal{F}D)$.
Si ha : $\tilde{\mu}(D) = 0$. Esiste allora $\tilde{u} \in \mathcal{L}^1(D)$ che ha per divergenza debole su D la $\tilde{\mu}$ (come segue da un principio esistenziale di G. Fichera[8] e dalla diseguaglianza di Poincarè :

$$\inf_{\text{cost.}} \| v + \text{cost} \|_{C^0(D)} \leq K \, \| \operatorname{grad} v \|_{\mathcal{L}^p(D)} \quad , \; p > 3 \;)$$

[8] Cfr. G. Fichera: "Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali", Atti Convegno Internaz. sulle equazioni a deriv. parziali , Trieste , 1954 .

Il vettore $\tilde{u}$ ha per divergenza debole su $D-\partial D$ la μ e quindi differisce da u per un vettore $u_0 \in \mathcal{L}^1(D)$ che ha divergenza debole su $D-\partial D$ nulla.

Se u è dotato di divergenza debole μ su D o su $D-\partial D$, e se la misura μ è assolutamente continua sui boreliani contenuti in $D-\partial D$, con "densità" $f \in \mathcal{L}^1(D)$, la f dicesi la <u>divergenza generalizzata</u> (locale) di u e si indicherà con $\operatorname{div} u$; si dirà anche, in tal caso, che u ha divergenza debole rappresentata, nei punti di $D-\partial D$, dalla funzione $f = \operatorname{div} u$. Dicendo che $u \in \mathcal{L}^q(D)$ ha come divergenza debole su $D-\partial D$ (su D) la funzione $f \in \mathcal{L}^{q'}(D)$ intendiamo che ha come divergenza debole su $D-\partial D$ (su D) una misura assolutamente continua con densità $f \in \mathcal{L}^{q'}(D)$.

3. <u>Gradiente debole</u>

Sia u una funzione di $\mathcal{L}^1(D)$. Si dice che u <u>è dotata di gradiente debole su</u> $D-\partial D$ (rappresentato da una misura vettoriale) se esiste $\mu \in V(D-\partial D)$ tale che:

$$\int_D u \operatorname{div} v \, dx = -\int_{D-\partial D} v \, d\mu \tag{3}$$

per ogni $v \in \overset{\circ}{C}{}^1(D)$ e μ è il <u>gradiente debole su</u> $D-\partial D$ <u>di</u> u. Si dice che u <u>è dotata di gradiente debole su</u> D (rappresentata da una misura) se esiste $\mu \in V(D)$ tale che:

$$\int_D u \operatorname{div} v \, dx = -\int_D v \, d\mu \tag{4}$$

per ogni $v \in C^1(D)$; μ <u>è il gradiente debole di</u> u <u>su</u> D.

E' ovvio che:

IV. <u>Se</u> $u \in \mathcal{L}^1(D)$ <u>è dotata di gradiente debole</u> $\mu \in V(D)$ <u>su</u> D

e di gradiente debole $\tilde{\mu} \in D - \mathcal{F}D$ su $D - \mathcal{F}D$, risulta $\mu(B) = \tilde{\mu}(B)$ per ogni boreliano $B \subset D - \mathcal{F}D$.

V. Se $u \in \mathcal{L}^1(D)$ è dotata di gradiente debole $\mu \in V(D)$ su D, allora u è dotata anche di gradiente debole $\tilde{\mu} \in V(D - \mathcal{F}D)$ su $D - \mathcal{F}D$ e riesce: $\tilde{\mu}(B) = \mu(B)$ per ogni boreliano $B \subset D - \mathcal{F}D$.

Sussiste anche il seguente teorema:

VI. Se $u \in \mathcal{L}^1(D)$ è dotata di gradiente debole $\mu \in V(D - \mathcal{F}D)$ su $D - \mathcal{F}D$, allora u è anche dotata di gradiente debole $\tilde{\mu} \in V(D)$ su D e riesce: $\tilde{\mu}(B) = \mu(B)$ per ogni boreliano $B \subset D - \mathcal{F}D$.

La dimostrazione di questo teorema seguirà dai risultati dei successivi paragrafi 7 e 8.

4. Gradiente debole su $D - \mathcal{F}D$.

Si ha intanto, come è noto, che:

VII. Condizione necessaria e sufficiente perchè $\mu \in V(D - \mathcal{F}D)$ sia il gradiente debole su $D - \mathcal{F}D$ di una funzione $u \in \mathcal{L}^1(D)$ è che riesca: $\int_{D - \mathcal{F}D} v \, d\mu = 0$ per ogni vettore $v \in \mathring{C}^1(D)$ che abbia divergenza nulla[9].

Se u è dotata di gradiente debole $\mu \in V(D - \mathcal{F}D)$ su $D - \mathcal{F}D$ e se, $\mu(B) = \int_B f \, dx$, allora, come è noto, u è assolutamente continua secondo Tonelli in D e le componenti di f sono le derivate parziali prime, in senso generalizzato, di u[10]. Con le notazioni del paragrafo 1, si avrà allora: $u \in \mathcal{H}^1(D)$. Scriveremo anche $f = \operatorname{grad} u$ (intendendo il gradiente in senso generalizzato). Se inoltre

---

[9] Cfr. L. S. Schwartz: "Théorie des distributions", Act. Sci. Industr. Parigi, 1957, t. I. p. 59..

[10] Cfr. G. Fichera, loc. cit. in[3], cap. III.

si ha : $u \in \mathcal{L}^{p'}(D)$, $f \in \mathcal{L}^{p}(D)$ sarà $u \in \mathcal{H}^{p',p}(D)$. Come è noto, dallo essere $u \in \mathcal{H}^{1,p}(D)$ segue $u \in \mathcal{H}^{p',p}(D)$ e risulta :

$$
(5)_{p',p} \qquad \inf_{\text{cost.}} \| u + \text{cost} \|_{\mathcal{L}^{p'}(D)} \leq K_{p',p}(D) \, \| \operatorname{grad} u \|_{\mathcal{L}^{p}(D)} ,
$$

$$
1 \leq p' \leq \frac{3p}{3-p}, \; 1 \leq p < 3 ; \quad 1 \leq p' < +\infty, \; p = 3 ; \quad 1 \leq p' \leq +\infty, \; 3 < p \leq +\infty
$$

per ogni $u \in \mathcal{H}^{p',p}(D)$[11]; inoltre, se $3 < p \leq +\infty$, si ha, di più, $u \in C^{0}(D)$.

Se poi $u \in \mathcal{H}^{p',p}(D)$, allora u risulta dotata di gradiente debole su $D - \partial D$ rappresentato dalla misura assolutamente continua $\mu(B) = \int_B \operatorname{grad} u \, dx$[10].

VIII. <u>Se</u> $u \in \mathcal{L}^{1}(D)$ <u>è dotata di gradiente debole</u> $\mu \in V(D - \partial D)$ <u>su</u> D <u>si ha</u> : $u \in \mathcal{L}^{p'}(D)$, $1 \leq p' \leq \frac{3}{2}$ <u>e riesce</u> :

$$
(6) \qquad \inf_{\text{cost.}} \| u + \text{cost} \|_{\mathcal{L}^{p'}(D)} \leq K \, V_{\mu}(D - \partial D), \quad 1 \leq p' \leq \frac{3}{2}
$$

Dato che u ha per gradiente debole su $D - \partial D$ una misura $\mu \in V(D - \partial D)$, risulta $u \in \mathcal{L}^{p'}(D)$ per ogni $p' < \frac{3}{2}$[12]. Sia $\chi_{\varepsilon}(x - \xi)$ un nucleo regolarizzatore nel senso di Friedrichs[13] e poniamo

$$
(7) \qquad u_n(x) = \int_D \chi_{1/n}(x - \xi) \, u(\xi) \, d\xi .
$$

Se D' è un dominio propriamente regolare $\subset D - \partial D$ riuscirà :

$$
(8) \qquad \lim_{n \to \infty} \| u_n - u \|_{\mathcal{L}^{p'}(D')} = 0 .
$$

Per ongi $x \in D'$, non appena n è abbastanza grande, si avrà :

---

(11) Cfr. S. L. Sobolev: "Su un teorema di analisi funzionale", Math. Sbornik , 1938 e E. Gagliardo: "Proprietà di alcune classi di funzioni in piu variabili", Ricerche di Mat., 1958 (e bibliografia qui citata). Le limitazioni per p, p', come è noto , sono le migliori possibili.

(12) Cfr. loc. cit. in (9) .

(13) Cfr. loc. cit. in (10) .