MATEMÁTICA
BÁSICA

1.ª Edición Digital

2020

J. ARMANDO VENERO B.

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS (U.N.I.)

EDICIONES GEMAR

LIMA **PERÚ**

MATEMÁTICA BÁSICA

Autor: JESÚS ARMANDO VENERO BALDEÓN
Estudios de Magíster en **MATEMÁTICAS (P.U.C.P.)**

Dpto. de tipeo, diagramación y diseño
Ana María Vargas Loayza de Venero,
Lic. en Educación (U.N.M.S.M.)

1.ª Edición digital, SETIEMBRE 2020

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 202005376
ISBN IMPRESA : 978-603-45216-0-5
ISBN DIGITAL : 978-612-45216-8-3 **PDF** 978-612-48340-3-5 **EPUB**

Editado por:

Calle Río Vilcanota 168. COO 27 de abril, Ate - Lima
Teléfono: 446-6176
rep_gemar09@hotmail.com
https://www.facebook.com/veneromath/

PRÓLOGO

Este texto titulado MATEMÁTICA BÁSICA ha sido escrito en base a los temas que son tratados en los primeros cursos de Matemáticas Universitarias en las carreras de Ingeniería, Ciencias, Economía, Administración, de modo que va dirigido a los estudiantes de estas disciplinas, en las Universidades y los Institutos Superiores.

La forma en que se presentan los conceptos matemáticos resulta ser una prolongación natural del enfoque moderno de las matemáticas y que está siendo estudiado en los colegios secundarios. En este texto, tal como se ha podido comprobar en la práctica, se ha logrado combinar un nivel adecuado de rigor con la presentación y el consecuente manejo de las técnicas y artificios de cálculo, lo que permite que el estudiante pueda proceder a la resolución de los problemas y ejercicios propuestos casi inmediatamente después de haber estudiado la teoría correspondiente y los ejemplos que la ilustran gradual y adecuadamente.

Para lograr este objetivo, se ha apelado a nuestra experiencia en la enseñanza de las matemáticas a este nivel, así como en lo que respecta a la didáctica presentación y diagramación de todos los temas tratados.

Las definiciones importantes, teoremas y propiedades, están remarcados y explicados en una forma clara y amena con una esmerada graduación de los ejemplos resueltos y de los problemas propuestos. Y como se podrá apreciar en el desarrollo del libro, se utiliza cada nueva idea y notación tan frecuentemente como es posible con el fin de promover su aplicación inteligente por parte del estudiante.

En los Capítulos 1 y 2 de LÓGICA y CONJUNTOS se estudian sus conceptos y sus principales propiedades, los cuales vienen precisamente a conformar el lenguaje de las matemáticas modernas.

El Capítulo 3 trata de los NÚMEROS REALES, sus axiomas y propiedades, con los cuales se establecen las bases fundamentales para los siguientes capítulos.

Es así que a continuación se estudian los conceptos y técnicas relativas a las ECUACIONES e INECUACIONES POLINÓMICAS Y RACIONA-

LES, a las ECUACIONES e INECUACIONES CON RADICALES, y a las ECUACIONES e INECUACIONES EXPONENCIALES. Asimismo, se estudian también los conceptos importantes del VALOR ABSOLUTO y del MÁXIMO ENTERO de un número real.

En los capítulos 10, 11 y 12 se tratan los temas de las RELACIONES y de las FUNCIONES, así como sus gráficas. Aquí se estudia el tema de la FUNCIÓN INVERSA, que será de mucha utilidad en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, correspondientes a ciclos posteriores.

También se estudian las FUNCIONES LOGARÍTMICAS y los fundamentos necesarios para la resolución de ECUACIONES e INECUACIONES LOGARÍTMICAS.

En esta edición, se incluyen los capítulos referentes a las OPERACIONES BINARIAS y al ANÁLISIS COMBINATORIO.

Todos los capítulos contienen una o varias Series de Ejercicios Propuestos, seguidos de sus correspondientes Clave de Respuestas, que permiten aclarar las dudas del estudiante y afianzar su aprendizaje.

Con estas palabras finales, deseo agradecer al equipo académico y técnico de EDICIONES GEMAR, por las mejoras llevadas a cabo en esta segunda edición.

J. ARMANDO VENERO BALDEÓN

CONTENIDO

4 ECUACIONES POLINÓMICAS

5 INECUACIONES

6 LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

7 INECUACIONES CON RADICALES

8 VALOR ABSOLUTO Y MÁXIMO ENTERO

9 INECUACIONES EXPONENCIALES

10 RELACIONES

11 GRÁFICAS DE RELACIONES

12 FUNCIONES

13 OPERACIONES BINARIAS

14 ANÁLISIS COMBINATORIO

De la semilla de una naranja no brota
una manzana. Es así que, según las
semillas que siembres, así
serán tus cosechas.

L.U.N.

1

LÓGICA

En la actualidad, el estudio serio de cualquier tema tanto en el campo de las Humanidades como en el de las Ciencias y la Técnica requiere conocer los fundamentos y métodos del razonamiento Lógico preciso que permita al estudiante o al profesional extraer y depurar sus conclusiones evitando el riesgo de modificar en forma equivocada la información que posee. Esto es aún más evidente en esta era de la Computación, herramienta que es empleada en todos los campos del desarrollo de una sociedad, y que por la velocidad a la cual se procesan los datos cualquier error de LÓGICA puede originar problemas técnicos y por lo tanto sociales y económicos.

En este primer capítulo presentaremos la teoría mínima necesaria de la LÓGICA FORMAL que será de suma utilidad para tales fines.

1. PROPOSICIONES LÓGICAS

Son aquellas expresiones u oraciones que pueden ser calificadas bien como ***verdaderas*** o bien como ***falsas***, sin ambigüedades. Las proposiciones lógicas serán denotadas con letras minúsculas generalmente:

p , q , r , . . . , etc.

A la veracidad o falsedad de un enunciado (proposición) se le denomina ***valor veritativo o valor de verdad***.

1.1 EJEMPLOS DE PROPOSICIONES LÓGICAS

p :	$17 - 6 = 11$	...	VERDADERA	(V)
q :	Viena es la capital de Austria	...	VERDADERA	(V)
r :	$117 + 319 = 426$	...	FALSA	(F)

1.2 EJEMPLOS DE EXPRESIONES QUE NO SON PROPOSICIONES LÓGICAS

" Buenos días " , " No faltes " , "¿Quién llamó por teléfono? "

Estas expresiones no son proposiciones lógicas debido a que no es posible asignarles un valor definido de verdad o de falsedad.

1.3 NOTA En resumen, las Proposiciones Lógicas son expresiones de las que tiene sentido decir que son ***verdaderas*** o que son ***falsas***. También se les denomina simplemente PROPOSICIONES.

1.4 DEFINICIÓN Se llaman VALORES VERITATIVOS o VALORES DE VERDAD de una Proposición a sus dos valores posibles: verdadero o falso. Estos posibles valores se pueden esquematizar en una TABLA DE VERDAD como sigue:

p
V
F

1.5 CLASES DE PROPOSICIONES LÓGICAS

a) PROPOSICIONES SIMPLES o ATÓMICAS.- Son aquellas que se pueden representar por una sola variable, es decir, por una sola letra como

$$p: \quad 1 + 4 = 5$$

b) PROPOSICIONES COMPUESTAS o MOLECULARES.- Son aquellas que se pueden representar por lo menos por una variable y algún o algunos de los símbolos que representan a las palabras siguientes:

no , ***implica*** , ***o*** , ***y*** , ***si y sólo si***

como veremos a continuación.

2 PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

2.1 LA NEGACIÓN

Dada una proposición p, se denomina **LA NEGACIÓN** de p, a otra proposición denotada por: $\sim p$, y que le asigna el valor veritativo opuesto al de p. Su tabla de verdad es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Esta proposición $\sim p$ es también leída como:
"no p"
"no es cierto que p".

EJEMPLO.- Sean las proposiciones

p : $3 \times 4 = 12$ (V)
q : Helsinki es la capital de Polonia (F)

sus negaciones son:

$\sim p$: No es cierto que $3 \times 4 = 12$ [o sino, $3 \times 4 \neq 12$] (F)
$\sim q$: Helsinki no es la capital de Polonia (V)

La última negación $\sim q$ es VERDADERA pues la ciudad de Helsinki es la capital de Finlandia.

2.2 LA DISYUNCIÓN

Se le denota "$p \vee q$" y se lee "p o q". Es una proposición compuesta por la proposición p y la proposición q, ambas relacionadas por la palabra "o", en el sentido inclusivo de y/o, y está definida por la siguiente condición:

"La proposición $p \vee q$ es ***falsa*** únicamente en el caso en que p y q son ***ambas falsas***; en cualquier otro caso es verdadera."

En su tabla de verdad se anotan sus valores para todas las posibles combinaciones de valores veritativos de p y de q como sigue:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V (∗)
F	F	F

Por ejemplo, correspondiente a la combinación (∗) de la tercera fila:

p : 8 es menor que 5 ... (F)
q : 6 es mayor que 3 ... (V)
$p \vee q$: 8 es menor que 5 o 6 es mayor que 3 ... (V)

A continuación presentamos otra nueva proposición compuesta fundamental.

2.3 LA CONJUNCIÓN

Se le simboliza "$p \wedge q$", y se lee como "p y q". Se le define como una nueva proposición que resulta ***verdadera*** (V) en el único caso en que las proposiciones componentes p y q son ***ambas verdaderas*** (V). En todos los demás casos es **falsa** (F).

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F (∗)
F	V	F
F	F	F

Por ejemplo, si p : 15012 es múltiplo de 3 ... (V)
q : $4 + 7 = 12$ ... (F)

$p \wedge q$: 15012 es múltiplo de 3 y $4 + 7 = 12$ ... (F)

2.4 LA CONDICIONAL

Se le simboliza " $p \rightarrow q$ " y se lee " ***si*** p ***entonces*** q ". Es una nueva proposición compuesta que es ***falsa*** únicamente en el caso en que la proposición p es ***verdadera*** y la proposición q es ***falsa*** . Su tabla de verdad es

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La proposición p es llamada **ANTECEDENTE** y la proposición q **CONSECUENTE**

2.5 OBSERVACIONES

1) Según las dos últimas filas de la tabla de verdad, basta que el antecedente p sea falso para que toda la condicional sea verdadera, independientemente del valor del consecuente q .

2) De las filas 1ra. y 3ra. se concluye que es suficiente que el consecuente q sea verdadero para que la condicional resulte verdadera.

3) Según la última fila, en el caso en que p y q sean ambas falsas, la condicional resulta verdadera.

En resumen, el único caso en que un procedimiento de deducción es incorrecto ocurre cuando a partir de una información verdadera se concluye una falsedad. Esta proposición $p \rightarrow q$ también se lee de las siguientes maneras:

“ p implica q ” , “ p es una condición suficiente para que q ” ,
“ q a menos que $\sim p$ ” , “ q es una condición necesaria para que p ” ,
“ Es suficiente que p para que q ”.

2.6 EJEMPLOS Explique por qué las condicionales siguientes tienen los valores veritativos indicados:

a) $2 + 3 = 8 \rightarrow 5 < 6$ (V)
b) $3 - 1 = 4 \rightarrow 2^4 < 2^3$ (V)
c) Si 5 es primo entonces 51 es un número par (F)

Estas condicionales tienen los valores de verdad indicados debido a que

a) p es falsa y q verdadera : condicional verdadera
b) p es falsa y q falsa : condicional verdadera
c) p es verdadera y q falsa : condicional falsa

2.7 PROBLEMA Utilizar las palabras "Si ... entonces ... ", para expresar de otra manera equivalente la proposición "Yo no me presento al examen de Química mañana a menos que lo posterguen una semana."

SOLUCIÓN. Sean q : Yo no me presento al examen de Química mañana
p : No postergarán el examen una semana,
entonces la proposición dada corresponde a: "q a menos que $\sim p$", la cual precisamente se simboliza por: "$p \rightarrow q$". Así tenemos el enunciado equivalente:

"SI no postergan el examen de Química una semana ENTONCES yo no me presento a dicho examen mañana."

2.8 LA BICONDICIONAL

Se denota "$p \leftrightarrow q$", y se lee "p si y sólo si q".

Es aquella proposición compuesta que es ***verdadera*** en los casos en que ambas p y q tengan valores veritativos iguales (***ambas verdaderas o ambas falsas***); y es ***falsa*** en los casos en p y q tengan valores veritativos ***opuestos***.
Su tabla de verdad es como sigue:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

También se lee como:
"p si y sólo si q"
"p es una condición necesaria y suficiente para q".

Por ejemplo, p : $2 < 4$ ... (V)
q : $2 + 6 < 4 + 6$ ... (V)
$p \leftrightarrow q$: $2 < 4$ si y solamente si $2 + 6 < 4 + 6$ ... (V)

2.9 LA DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

Se le denota "$p \,\Delta\, q$", y se lee:
"O bien p *o* bien q".

Es aquella proposición que es verdadera en los casos en que ambas proposiciones p y q tengan valores veritativos opuestos, y es falsa si ambas tienen idénticos valores de verdad. Su tabla de verdad es

p	q	$p \,\Delta\, q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

También recibe el nombre de
DIFERENCIA SIMÉTRICA

2.10 CONECTIVOS LÓGICOS

Se llaman así a los símbolos:

$\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\sim$, Δ .

3. PROPOSICIONES COMPUESTAS

Utilizando los conectivos lógicos se puede combinar cualquier cantidad finita de proposiciones compuestas básicas para obtener otras cuyos valores de verdad pueden ser conocidos construyendo sus tablas de verdad.

En tales tablas se indican los valores resultantes de estas proposiciones compuestas para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de las proposiciones componentes.
Así tenemos la tabla de verdad de la proposición compuesta:

$$[(\sim p) \vee q] \rightarrow (r \wedge p) \quad :$$

p	q	r	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$	$r \wedge p$	$[(\sim p) \vee q] \rightarrow (r \wedge p)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F

3.1 EJERCICIO Sean p : 8 es un número par,
q : 8 es el producto de dos enteros.
Traduzca en símbolos cada una de las siguientes proposiciones:

a) 8 es un número par *o* es un producto de dos enteros.
b) 8 es impar y es un producto de dos enteros.
c) 8 es par y un producto de dos enteros *o* es un número impar y no un producto de dos enteros.

RPTA: a) $p \vee q$, b) $(\sim p) \wedge q$, c) $(p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge \sim q]$.

3.2 PROBLEMA Sean p , q y r tres proposiciones tales que p es verdadera, q es falsa y r es falsa . Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

a) $(p \vee q) \vee r$, b) $(\sim p) \vee (q \wedge r)$
c) $[(p \wedge q) \vee ((\sim p) \wedge \sim q)] \wedge [((\sim p) \wedge q) \vee ((\sim q) \wedge p)]$
d) $[(\sim p) \vee \sim q] \wedge (p \vee \sim r) \wedge (q \vee p)]$

SOLUCIÓN.

a) Verdadera, pues

$$\begin{array}{ccccccc} (\,p & \vee & q\,) & \vee & r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\,V & \vee & F\,) & \vee & F \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ & V & & \vee & F \\ & & & \downarrow & \\ & & & V & \end{array}$$

, verdadera

b) Esta proposición es FALSA, pues:

$$\begin{array}{ccc} (\sim p\,) & \vee & (q \wedge r) \\ F & \vee & F \\ & F & \end{array}$$

c) Como esta proposición está constituida por proposiciones compuestas entre dos corchetes unidos por una conjunción $\wedge$, y como el primero de tales corchetes es FALSO (¿por qué?) entonces toda la proposición (b) será FALSA , independientemente del valor de la proposición compuesta del segundo corchete.

d) Esta proposición también es FALSA, en forma análoga a (c) , puesto que $(q \vee r)$ es falsa.

3.3 PROBLEMA Halle el valor de verdad de la proposición:

$$(\sqrt[4]{4} > \sqrt{2} \wedge 1 > 0) \rightarrow \left[\sqrt{2} \geq \sqrt[4]{4} \vee \left(1/\sqrt[4]{4} < 1/\sqrt{2} \leftrightarrow -1 < 0\right)\right]$$

SOLUCIÓN. De $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{2/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$, se tiene que $\sqrt[4]{4} > \sqrt{2}$ y $1/\sqrt[4]{4} < 1/\sqrt{2}$ son ambas falsas. Sin embargo, $\sqrt{2} \geq \sqrt[4]{4}$ es ***verdadera*** pues $\geq$ quiere decir $>$ o $=$.

Así se tiene que la proposición dada tiene el valor siguiente:

$$\begin{array}{ccc} (F \wedge V) & \rightarrow & [\,V \vee (F \leftrightarrow V)\,] \\ F & \rightarrow & [\,V \vee (F \leftrightarrow V)\,] \end{array}$$

y según una de las OBSERVACIONES (2.5), es suficiente que el antecedente sea falso para que toda la condicional sea VERDADERA, lo cual puede ser verificado completando lo del corchete.

3.4 JERARQUÍA DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS

Cuando en una proposición compuesta se tiene varios conectivos lógicos, las operaciones se realizan luego de colocar los paréntesis adecuadamente comenzando con las proposiciones que se encuentran dentro de los paréntesis interiores. Siguen todas las negaciones y luego se avanza de izquierda a derecha. Los corchetes son considerados como paréntesis.

3.5 PROBLEMA Sean p , q , r , s y n cinco proposiciones lógicas. Si el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes (a) y (b) es FALSA:

a) $[\sim(p \to q) \to r] \to (s \wedge r)$, b) $\sim p \vee q$,

¿cuál es el valor de verdad de (c) y (d) ? :

c) $[(n \to p) \wedge \sim r] \to p$, d) $s \to (p \leftrightarrow r)$

SOLUCIÓN. Que la condicional (a) sea FALSA quiere decir que

$$\begin{cases} \sim(p \to q) \to r & \text{es } V \quad (*) \quad , \quad \text{y} \\ s \wedge r & \text{es } F \quad (**) \end{cases}$$

Como $\sim p \vee q$ es F por hipótesis, entonces ambas $\sim p$ y q son F es decir, p es V y q es F, de donde resulta que $\sim(p \to q)$ es V y por lo tanto, r es V. Luego, de $(**)$ resulta que s es F. Así, la condicional (c) resulta V, pues el antecedente es F, ya que $\sim r$ es F, independientemente de los valores de n y p.
Asimismo, la condicional (d) resulta también ***verdadera*** (V), pues su antecedente s es **falso** (F).

4. TAUTOLOGÍA Y CONTRADICCIÓN

A toda proposición simple o compuesta cuyo valor es siempre **VERDADERO** para cualquier combinación de valores veritativos de sus componentes se le llama **TAUTOLOGÍA** y se le denota simplemente por $\mathbf{V}$.

A toda proposición que es siempre **FALSA** para todas las combinaciones de valores veritativos de sus componentes se le llama **CONTRADICCIÓN**, y se le denota simplemente por $\mathbf{F}$.

Una proposición cuya tabla de verdad contiene al menos un V y al menos un F recibe el nombre de **CONTINGENCIA**.

4.1 EJEMPLO La proposición: $[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \to \sim p$, es una **TAUTOLOGÍA**. En efecto,

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee q$	$[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q]$	$\to$	$\sim p$
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

4.2 EJEMPLO. La proposición: $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$, es una CONTRADICCIÓN. En efecto,

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee q$	$[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$
V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F

5. IMPLICACIÓN LÓGICA Y EQUIVALENCIA LÓGICA

Se llama **IMPLICACIÓN LÓGICA** (o simplemente **IMPLICACIÓN**) a toda condicional $p \to q$ que sea ***TAUTOLOGÍA***; en tal caso, a la condicional se le denota $p \Rightarrow q$.
Como ejemplo de **IMPLICACIÓN** se tiene $[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$, cuya tabla de verdad está mostrada en el Ejemplo 4.1 .

Se llama **EQUIVALENCIA LÓGICA** (o simplemente **EQUIVALENCIA**) a toda bicondicional $p \leftrightarrow q$ que sea ***TAUTOLOGÍA***, denotándose en tal caso $p \Leftrightarrow q$.
Un ejemplo de Equivalencia Lógica es:

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$\leftrightarrow$	p
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

6. PROPOSICIONES LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

Dos proposiciones p y q se llaman **EQUIVALENTES** (o **Lógicamente Equivalentes**) si sus tablas de verdad son idénticas, en cuyo caso se simboliza

$$p \equiv q$$

6.1 EJEMPLO Las proposiciones $(p \to q)$ y $[(\sim q) \to \sim p]$ son **EQUIVALENTES** pues sus tablas de verdad resultantes son idénticas, como se puede ver en el cuadro de la siguiente página.

Por lo tanto, $(p \to q) \equiv [(\sim q) \to (\sim p)]$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Idénticas

6.2 NOTA Esta última Equivalencia de (6.1) es muy importante en lo que a demostraciones de teoremas o resultados en general respecta, pues viene a ser la base del llamado MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN POR **REDUCCIÓN AL ABSURDO** que es una forma indirecta de un proceso de demostración, y que ilustraremos varías veces en el desarrollo del libro.

6.3 NOTA Un par de Proposiciones Equivalentes $p \equiv q$ producen siempre una Equivalencia Lógica $p \Leftrightarrow q$ y viceversa. Por esta razón cuando hay una Equivalencia Lógica entre p y q también se dice que: $p \equiv q$.

7. LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Son ciertas Equivalencias Lógicas que las representaremos a continuación y cuya demostración es fácil de realizar exhibiendo sus tablas veritativas correspondientes.

1a. $p \vee p \equiv p$
2a. $p \vee q \equiv q \vee p$
3a. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
4a. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5a. $p \vee F \equiv p$
6a. $p \vee V \equiv V$
7a. $p \vee (\sim p) \equiv V$
8a. $\sim(\sim p) \equiv p$

1b. $p \wedge p \equiv p$
2b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3b. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
4b. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5b. $p \wedge F \equiv F$
6b. $p \wedge V \equiv p$
7b. $p \wedge (\sim p) \equiv F$
8b. $\sim V \equiv F$; $\sim F \equiv V$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{9a.} & \sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q) \\ \text{9b.} & \sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q) \end{array}\right\} \text{Leyes de DE MORGAN}$$

Como es válido reemplazar una proposición por su equivalente sin alterar el resultado, estas leyes son muy útiles para simplificar los problemas.
Con este fin presentamos una LISTA ADICIONAL , muy útil, de Equivalencias Lógicas.

7.1 LISTA ADICIONAL DE PROPOSICIONES EQUIVALENTES

1A.	$p \to q$	$\equiv$	$(\sim p) \vee q$
2A.	$p \to q$	$\equiv$	$(\sim q) \to (\sim p)$
3A.	$p \wedge (p \vee q)$	$\equiv$	p
4A.	$p \vee (p \wedge q)$	$\equiv$	p
5A.	$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
6A.	$p \leftrightarrow q$	$\equiv$	$(p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]$
7A.	$p \,\Delta\, q$	$\equiv$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

7.2 PROBLEMA Simplifique las siguientes proposiciones utilizando las Leyes del Álgebra Proposicional o la Lista Adicional:

a) $\sim[\sim(p \wedge q) \to \sim q] \vee q$, b) $[((\sim p) \wedge q) \to (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

SOLUCIÓN

a) $\sim[\sim(p \wedge q) \to \sim q] \vee q$

$\equiv \sim[\sim(\sim(p \wedge q)) \vee \sim q] \vee q$	1A.
$\equiv \sim[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee q$	8a.
$\equiv [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim q)] \vee q$	9a.
$\equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \vee q$	9b.
$\equiv q \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)]$	2a , 2b.
$\equiv q$	4A.

b) $[((\sim p) \wedge q) \to (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

$\equiv [((\sim p) \wedge q) \to F] \wedge \sim q$	7b.
$\equiv [(\sim((\sim p) \wedge q)) \vee F] \wedge \sim q$	1A.
$\equiv [(p \vee \sim q) \vee F] \wedge \sim q$	9b.
$\equiv [(p \vee \sim q)] \wedge \sim q$	5a.
$\equiv \sim q$	2b , 3a.

7.3 PROBLEMA. Demuestre que la siguiente proposición es una Tautología

$$[(p \vee \sim q) \wedge q] \to p$$

SOLUCIÓN.

$\equiv \sim[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee p$	1A.
$\equiv [\sim(p \vee \sim q)] \vee p \vee (\sim q)$	9b , 2a.
$\equiv ((\sim p) \wedge q) \vee p \vee (\sim q)$	9a.
$\equiv (\sim p \wedge q) \vee [\sim(\sim p \wedge q)]$	9b
$\equiv$ V Tautología	7a.

NOTA .- En muchos casos este método es más práctico que el de las tablas de verdad.

7.4 PROBLEMA Determine si (a) y (b) son proposiciones equivalentes:

a) $p \to (r \vee \sim q)$

b) $(q \to \sim p) \vee (\sim r \to \sim p)$

SOLUCIÓN

MÉTODO 1 Mediante las tablas de verdad:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$p \to (r \vee \sim q)$		$(q \to \sim p) \vee (\sim r \to \sim p)$		
V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

idénticas

MÉTODO 2 Simplificando:

a) $p \to (r \vee \sim q) \quad \equiv \quad (\sim p) \vee (r \vee \sim q) \qquad \ldots (1)$

b) $(q \to \sim p) \vee (\sim r \to \sim p)$

$$\begin{aligned}
&\equiv [\sim q \vee \sim p] \vee [(\sim\sim r) \vee \sim p] \\
&\equiv \sim q \vee \sim p \vee (r \vee \sim p) \\
&\equiv \sim q \vee (\sim p \vee \sim p) \vee r \\
&\equiv (\sim q) \vee (\sim p) \vee r \\
&\equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q) \qquad \ldots (2)
\end{aligned}$$

Siendo (1) y (2) iguales, entonces $a \equiv b$.

7.5 PROBLEMA.- Dadas $t:\ (r \leftrightarrow s)\ \Delta \sim r$, $u:\ (r \to \sim s) \to r$, si t es falsa y u es verdadera, determine el valor de verdad de: $[(r \leftrightarrow u) \wedge (t\ \Delta\ s)]\ \Delta \sim t$.

SOLUCIÓN.- DATOS: $t: F$, $u: V$. Sólo puede ocurrir (a) o (b) :

a) Si $r: V$, **a1)** $s: V$, entonces $t:\ V\ \Delta\ F \equiv V$ (contradicción)

a2) $s: F$, entonces $\left.\begin{array}{l} t:\ F\ \Delta\ F \equiv F \\ u:\ V \to V \equiv V \end{array}\right\}$ (válidos)

b) Si $r: F$, entonces $u: V \rightarrow F \equiv F$ (contradicción) y por lo tanto, $r: V$ y $s: F$, y en consecuencia el valor de verdad de la proposición

$$[(r \leftrightarrow u) \wedge (t \,\Delta\, s)] \,\Delta\, \sim t$$

es:

$$[(V \leftrightarrow V) \wedge (F \,\Delta\, F)] \,\Delta\, V$$
$$[\;V \wedge F\;] \,\Delta\, V$$
$$[\;F\;] \,\Delta\, V \equiv V \quad \therefore \text{VERDADERA}$$

7.6 EJERCICIO.- Pruebe que $[(\sim r) \wedge (p \vee s)] \rightarrow (q \vee s)$ tiene el valor verdadero si es que $p \leftrightarrow \sim(q \wedge r)$ y $p \,\Delta\, r$ son ambas falsas.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Demuestre las Leyes del Álgebra de Proposiciones.
2. Demuestre las Equivalencias de la Lista Adicional.
3. Demuestre que las condicionales siguientes son IMPLICACIONES:
   a) $p \Rightarrow p$
   b) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$: LEY TRANSITIVA
   c) $(\sim p) \Rightarrow (p \rightarrow q)$
   d) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$,
   e) $p \Rightarrow (p \vee q)$
   f) $(p \wedge q) \Rightarrow p$
   g) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
   h) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)$
   f) $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \rightarrow q)$

4. Demuestre que las bicondicionales siguientes son **EQUIVALENCIAS LÓGICAS**:
   a) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$
   b) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
   c) $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$
   d) $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$
   e) $\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

5. Demuestre que
   a) $(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \rightarrow F$ (Reducción al absurdo)
   b) $(F \rightarrow p) \equiv V$; $(p \rightarrow V) \equiv V$;
   $(p \rightarrow F) \equiv \sim p$; $\sim(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$
   c) $(p \rightarrow q) \equiv [(p \vee q) \leftrightarrow q]$
   d) $(p \rightarrow q) \equiv [(p \wedge q) \leftrightarrow p]$
   e) $p \,\Delta\, q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q) \equiv \sim(p \leftrightarrow q)$

6. Dadas las proposiciones:
   I) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
   II) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
   III) $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

   indique cuál (o cuáles) es una contradicción (F).

7. La proposición $\sim(p \to q) \wedge (q \to \sim r)$, ¿a cuál (o cuáles) de las siguientes proposiciones es equivalente?
   a) $p \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q)$, b) $p \wedge (\sim q) \wedge \sim(q \wedge r)$
   c) $(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$

8. ¿Alguna de las siguientes proposiciones es una Tautología?
   a) $\sim[(\sim(p \vee q)) \to \sim q] \leftrightarrow (p \to q)$
   b) $\sim[(\sim p) \leftrightarrow q] \leftrightarrow (p \to q)$
   c) $\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \leftrightarrow (p \to \sim q)$

9. Simplifique: $[(\sim p \wedge q) \to (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

10. Simplifique: $[(\sim q \to \sim p) \to (\sim p \to \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$.

11. De las siguientes proposiciones, ¿Cuáles son equivalentes entre sí? :
    a) Es necesario que Juan no vaya al cine para que termine su tarea.
    b) No es cierto que Juan termine su tarea y vaya al cine.
    c) Juan no terminará su tarea y no irá al cine.

12. ¿Cuáles son Tautologías? :
    a) $[(p \vee \sim q) \wedge q] \to p$, b) $[(p \wedge q) \vee q] \leftrightarrow q$
    c) $[\sim p \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee \sim(p \vee r)]$

13. De la falsedad de $(p \to \sim q) \vee (\sim r \to s)$, deducir el valor de
    a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$
    b) $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
    c) $(p \to r) \to [(p \vee q) \wedge \sim q]$

14. Si se sabe que $(p \wedge q)$ y $(q \to t)$ son falsas, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? :
    a) $(\sim p \vee t) \vee s$, b) $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$
    c) $[\sim p \vee (q \wedge \sim t)] \leftrightarrow \{(p \to q) \wedge \sim(q \wedge t)\}$

15. ¿Cuál (es) de las siguientes proposiciones es equivalente a:
    "Es necesario pagar 100 soles y ser socio para ingresar al teatro"?
    a) No ingresar al teatro o pagar 100 soles, y ser socio.
    b) Pagar 100 soles o ser socio, y no ingresar al teatro.
    c) Pagar 100 soles y ser socio, o no ingresar al teatro.

16. Si la proposición $(\sim p \wedge q) \to [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa, halle el valor veritativo de:
    a) $\sim[(\sim p) \vee (\sim q) \to (r \vee \sim t)]$
    b) $(\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$
    c) $(\sim p \to t) \to [\sim q \to r]$

17. Demuestre que las tres proposiciones siguientes son equivalentes:
    a) $\sim[(q \vee \sim p)\ v\ (q \wedge (r \vee \sim p))]$

b) $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (\sim r \vee p)]$
c) $\sim[\sim q \rightarrow \sim p] \wedge [q \rightarrow \sim(p \rightarrow r)]$

18. La proposición $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ es verdadera; teniendo r y s valores veritativos opuestos, se afirma que
a) $[\{(\sim p) \wedge (\sim q)\} \vee (r \wedge s)] \wedge p$ es *verdadera*
b) $[\sim(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\sim p \wedge q)$ es *falsa*
c) $[(\sim r \wedge \sim s) \rightarrow (p \vee r)] \wedge \sim(r \wedge s)$ es *verdadera*
d) $[(\sim r \wedge \sim s) \rightarrow (s \vee p)] \,\boldsymbol{\Delta}\, \sim(r \wedge p)$ es *verdadera*
¿Cuáles son ciertas?

19. ¿Cuáles son Equivalencias Lógicas? :
a) $\sim(q \rightarrow \sim p) \leftrightarrow (q \vee p)$
b) $\{(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q\} \leftrightarrow \sim[(p \vee q) \wedge q]$
c) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

20. Si $p \downarrow q$ se define por $(\sim p) \wedge (\sim q)$, entonces ¿a cuál es equivalente $\sim(p \leftrightarrow q)$? :
a) $[(\sim p) \downarrow q] \vee [q \downarrow p]$
b) $[(\sim p) \downarrow q] \vee [(\sim q) \downarrow p]$
c) $[(\sim p) \downarrow (\sim q)] \vee [p \downarrow q]$

21. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones
a) $\sim[p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)]$, b) $(p \wedge \sim q) \vee r$
c) $(r \vee q) \wedge \sim(\sim r \wedge q)$, d) $(\sim p) \vee q \vee r$
son equivalentes a : $(p \rightarrow q) \rightarrow r$?.

22. Si $p \downarrow q$ significa " ni p y ni q ", ¿cuáles de las siguientes proposiciones son Tautologías (siempre verdaderas) ? :
a) $[(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow p)] \leftrightarrow (p \vee q)$
b) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow [p \downarrow q]$
c) $(p \downarrow q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$
d) $\sim(p \downarrow q) \leftrightarrow p \,\boldsymbol{\Delta}\, q$

23. ¿Cuántas F y cuántas V tiene el resultado de la Tabla de Verdad de:
$\sim[(p \wedge q) \rightarrow \sim r] \wedge (s \vee \sim s)$ después de simplificarla? .

24. Dada $z : \{(p \rightarrow q) \rightarrow [p \vee (q \wedge r)]\} \rightarrow [q \wedge (p \vee r)]$,
a) Indique los valores de p y r de modo que si q es F, entonces z es F.
b) Indique los valores de p y r de modo que si q es V, entonces z es V.

25. Escribir la negación de cada una de las proposiciones siguientes:
a) El no es rico, pero es feliz.
b) El no es pobre ni es feliz.
c) El es bajo pero es muy ágil.

d) Ni Juan ni su papá viajarán a Tarma a fin de mes.
e) El tiene un compás o una regla.
f) Ambos equipos Alianza y la U irán a la Copa Libertadores.
g) Si Juan llega a tiempo con los documentos, entonces ambos, Carlos y Jorge, podrán inscribirse en el ciclo de conferencias.

26. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que
a) $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera,
b) $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa,
halle el valor de verdad de las proposiciones
c) $(p \wedge q) \vee r \vee s$, d) $(s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow (r \vee \sim p)$
e) $[t \rightarrow (w \vee \sim p)] \wedge \sim(p \rightarrow r)$

27. Exprese la proposición $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$ de otra manera, en la que únicamente intervengan los conectivos $(\sim)$ y $(\rightarrow)$.

28. Halle el valor de verdad de la proposición:
$$\left(\sqrt[3]{8} > \sqrt{2} \wedge -8 < 0\right) \rightarrow \left[\sqrt{2} \geq \sqrt[3]{8} \vee \left(\frac{1}{\sqrt[3]{8}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow 8 > 0\right)\right]$$

29. Sin usar tablas de verdad, determinar si las siguientes proposiciones (a) y (b) son Lógicamente Equivalentes:
a) $(\sim s \rightarrow \sim w) \vee (t \rightarrow \sim w)$, b) $w \rightarrow (\sim t \vee s)$

30. Dadas las proposiciones p y q, se define la proposición $p \nabla q$ como: $p \wedge (\sim q)$. ¿A cuál (es) es equivalente $p \rightarrow \sim q$? :
a) $\sim(p \nabla q)$ d) $(\sim p) \nabla q$
b) $(\sim p) \nabla (\sim q)$ e) $p \nabla (\sim q)$
c) $\sim[p \nabla (\sim q)]$

31. a) Utilizando tablas de verdad determinar si la siguiente proposición es una tautología, una contradicción o una contingencia:
$\{[(\sim p \wedge r) \rightarrow q] \leftrightarrow [\sim q \leftrightarrow (p \vee r)]\} \mathbf{\Delta} \{(p \leftrightarrow q) \mathbf{\Delta} (q \vee \sim r)\}$
b) Simplificar: $\sim([p \mathbf{\Delta} (\sim q)] \rightarrow (\sim q))$

32. Dado el circuito lógico definido por la tabla: analice la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

p	q	p * q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

a) $q \equiv V$ es condición necesaria o suficiente para que $(p * q) \equiv V$.
b) $\sim p * [(p \wedge q) * (r \wedge s)] \equiv r \wedge s$.
c) Es falso que $(p \rightarrow q) \equiv F$ sea condición necesaria y suficiente para que $(p * q) \equiv F$.

33. Si la proposición $[(p \mathbf{\Delta} (\sim q)) \wedge (p \vee q)] \rightarrow [r \leftrightarrow s]$ es falsa, cuáles de las siguientes proposiciones son ***necesariamente*** verdaderas ? :

I) $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge s)$, II) $[(\sim p) \vee r] \rightarrow (r \vee s)$;
III) $(r \wedge s) \rightarrow (p \,\Delta\, r)$.

34. Sabiendo que la proposición siguiente es falsa:
$\{\sim[(p \wedge r) \rightarrow q] \wedge [(p \vee q) \,\Delta\, s]\} \rightarrow \{(s \,\Delta\, p) \rightarrow t\}$,
determine el valor de verdad de las proposiciones:
a) $\{[(\sim p \,\Delta\, q) \,\Delta\, r] \rightarrow [\sim(q \rightarrow (u \rightarrow p))]\} \,\Delta\, (p \,\Delta\, q)$
b) $\{\sim(p \rightarrow q) \,\Delta\, [(r \wedge p) \rightarrow \sim(r \vee s)]\} \,\Delta\, t$

35. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera, y $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa, halle el valor de verdad de:
$[t \rightarrow (w \vee \sim p) \wedge \sim(p \rightarrow r)]$.

CLAVE DE RESPUESTAS

6. III , 7. Todas , 8. Sólo (c) , 9. $\sim q$, 10. $\sim q$,
11. Sólo (a) y (b) , 12. Todas , 13. a) F, b) F , c) V ; 14. Todas,
15. Sólo (c) , 16. a) F , b) V , c) V . 18. Sólo (c) , 19. Sólo (b) y (c),
20. y 21. Sólo (b), 22. Sólo (a) y (c), 23. 1V y 7F,
24. a) $p : V$, $r : V$ *o* F (cualquiera) ; b) p y r : ambos, cualquier valor.
25. a) Él es rico o no es feliz; b) Él es pobre o es feliz;
c) Él no es bajo o no es muy ágil ; (d) Al menos uno, Juan o su papá viajará a Tarma a fin de mes ; (e) Él no tiene ni un compás ni una regla ; (f) Al menos uno de los dos equipos, Alianza o la U, no irá a la Copa Libertadores.
g) Juan no llegará a tiempo con los documentos, y en tal caso al menos uno, Carlos o Jorge, no podrá inscribirse en el ciclo de conferencias.
26. w: F , s: V , r: V , p: F , entonces c) : V , d) : V , e) : F .
27. $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim r \rightarrow s)$, 28. V
29. Sí son Lógicamente Equivalentes , 30. Solo (c).
31. a) Contingencia, b) $p \vee (\sim q)$.
32. Las tres proposiciones son Verdaderas. Note que $p * q \equiv q$.
33. Del dato resulta que las proposiciones r y s tienen valores de verdad opuestos, y que p y q son ambas verdaderas. Luego, solamente la proposición (III) es necesariamente verdadera.
34. Las proposiciones p y r resultan verdaderas; q , s y t son falsas. Luego, (a) es Verdadera, y (b) es Verdadera.
35. El valor de la proposición dada dependerá del valor de la proposición t :
- Si t es verdadera, la proposición dada resulta FALSA;
- Si t es falsa, la proposición dada resulta VERDADERA.

8. VARIANTES CONDICIONALES

Dadas dos proposiciones p y q , con respecto a la proposición condicional " $p \rightarrow q$ " se pueden presentar las siguientes variantes condicionales que contienen a p y q :

$q \to p$: llamada la PROPOSICIÓN RECÍPROCA de $p \to q$
$\sim p \to \sim q$: llamada la PROPOSICIÓN INVERSA de $p \to q$
$\sim q \to \sim p$: llamada la PROPOSICIÓN CONTRAPOSITIVA de $p \to q$

Las tablas de verdad de estas cuatro condicionales son

p	q	CONDICIONAL $p \to q$	RECIPROCA $q \to p$	INVERSA $\sim p \to \sim q$	CONTRAPOSITIVA $\sim q \to \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Observe que una proposición condicional y su recíproca no son Lógicamente Equivalentes.

8.1 TEOREMA Una proposición condicional $p \to q$ y su contrapositiva $\sim q \to \sim p$ son Lógicamente Equivalentes.

(Ver la tabla de verdad anterior) .

8.2 EJEMPLO. Consideremos los siguientes enunciados acerca de un Paralelogramo A ,

$p \to q$: Si A es un cuadrado, entonces A es un rombo
$q \to p$: Si A es un rombo, entonces A es un cuadrado

De nuestros conocimientos escolares sabemos que $p \to q$ es verdadero, pero que su recíproco $q \to p$ es falso.

8.3 APLICACIÓN DEL TEOREMA (8.1).- Sea n un entero positivo. Demostrar que si n^2 es par entonces n es par.

SOLUCIÓN. Definimos $p: n^2$ es par , $q: n$ es par. Sus negaciones son

$\sim p: n^2$ es impar, $\sim q: n$ es impar.

Se nos pide demostrar que $p \to q$ es verdadera , es decir que "Si n es impar entonces n^2 es impar" se cumple . En efecto ,

Si n es impar entonces $n = 2k + 1$ para algún entero $k \geq 0$; luego

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$$n^2 = 2k_1 + 1 \quad \text{donde} \quad k_1 = 2k^2 + 2k$$

y como k_1 es un entero ≥ 0 , entonces n^2 resulta también ser impar.

Así hemos verificado que $\sim q \to \sim p$ es verdadera, y por lo tanto que $p \to q$ es verdadera, que es lo que queríamos demostrar.