Perspektiven der Mathematikdidaktik
Gabriele Kaiser · Rita Borromeo Ferri · Werner Blum *Hrsg.*

RESEARCH

Susanne Brand

Erwerb von Modellierungs-kompetenzen

Empirischer Vergleich eines holistischen und eines atomistischen Ansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen

Springer Spektrum

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Herausgegeben von
G. Kaiser, Hamburg, Deutschland
R. Borromeo Ferri, W. Blum, Kassel, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerausbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Herausgegeben von
Prof. Dr. Gabriele Kaiser
Universität Hamburg

Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri,
Prof. Dr. Werner Blum,
Universität Kassel

Susanne Brand

Erwerb von Modellierungskompetenzen

Empirischer Vergleich eines holistischen und eines atomistischen Ansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen

Springer Spektrum

Susanne Brand
Hamburg, Deutschland

Dissertation Universität Hamburg, 2014

ISBN 978-3-658-06678-9 ISBN 978-3-658-06679-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-06679-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
© Springer Fachmedien Wiesbaden 2014
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.
Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Geleitwort

Die Dissertation von Susanne Brand zum Thema „Erwerb von Modellierungskompetenzen. Ein empirischer Vergleich eines holistischen und eines atomistischen Modellierungsansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen“ befasst sich mit einer Fragestellung, die in der aktuellen Modellierungsdiskussion intensiv diskutiert wird, wie Modellierungskompetenzen effektiv gefördert werden können. Sie fokussiert dabei zwei extreme Vorgehensweisen, ein ganzheitliches Vorgehen, in dem der Modellierungsprozess als Ganzes durchlaufen wird und ein atomistisches Vorgehen, in dem nur Teilprozesse durchlaufen werden. Sie untersucht die Effektivität dieser Ansätze mittels einer empirischen Studie, an der für eine Einzelpromotion eine große Stichprobe erreicht wurde, nämlich 15 Klassen mit 377 Schülerinnen und Schülern der 9. Jahrgangsstufe an Gymnasien und Stadtteilschulen. Susanne Brand hat äußerst überzeugend und souverän diese mit der selbständigen Durchführung einer solchen Studie verbundenen Ansprüche gemeistert und im Rahmen ihrer Dissertation die verschiedenen Ansätze zur Implementierung von komplexeren Modellierungsbeispielen in den normalen Mathematikunterricht in eine Interventionsstudie umgesetzt und diese empirisch evaluiert. Dabei hat Susanne Brand die Effektivität der beiden Ansätze mittels Methoden der empirischen Bildungsforschung untersucht, die deutlich über das in vielen Dissertationen übliche Methodenrepertoire hinausgehen und die Dissertation auf ein ungewöhnlich hohes Niveau heben.

Die Arbeit beginnt mit einer knappen Einleitung zur Problemstellung und den Zielen der Untersuchung, bevor der theoretische Bezugsrahmen dargestellt wird. Der Stand der aktuellen Modellierungsdiskussion, sowohl national als auch international, wird souverän dargestellt. Insbesondere der Begriff der mathematischen Modellierungskompetenz wird sorgfältig diskutiert und dargestellt unter Bezug auf die allgemeine erziehungswissenschaftliche Diskussion, aber auch die empirische Bildungsforschung. Dabei unterscheidet Susanne Brand die verschiedenen Teilkompetenzen des Modellierens in Einklang mit aktuellen Ansätzen der Modellierungsdiskussion, was sehr hilfreich ist. Dabei hat Susanne Brand den für die empirische Studie nötigen Stand der Diskussion umfassend dargestellt, wohltuend konzentriert auf die zentralen Aspekte. Anschlie-

ßend wird von Susanne Brand die entwickelte Studie ERMO dargestellt, d.h. die von ihr selbst entwickelten Modellierungsaktivitäten, die sich auf Beispiele aus der aktuellen Modellierungsdiskussion beziehen, aber auch eigene Ideen beinhalten. Das Design der Studie ist äußerst innovativ und überzeugend und kann beispielgebend für andere Studien sein. Besonders interessant sind die einzelnen Modellierungsbeispiele, sowohl für die holistischen als auch die atomistischen Modellierungsaktivitäten, die ausführlich dargestellt und didaktisch reflektiert werden. Die Entwicklung zweier Arten von Modellierungsbeispielen, die einerseits möglichst ähnlich sind, andererseits aber doch in den unterschiedlichen Vorgehensweisen eingesetzt werden können, ist hoch komplex und doch gelingt Susanne Brand hier eine überzeugende Lösung.

Des Weiteren hat Susanne Brand ein beeindruckendes Instrumentarium zur Messung von Modellierungskompetenzen entwickelt, ausgehend von in der Literatur vorfindlichen Ansätzen wird ein äußerst durchdachtes Design entwickelt. Die Ergebnisse der Studie sind selbstverständlich das Herzstück der Arbeit: Nach einer Gegenüberstellung verschiedener Modelle entscheidet sich Susanne Brand für das methodologisch angemessenste und beschreibt darauf aufbauend ihre Ergebnisse, und zwar für die einzelnen Subkompetenzen, also Vereinfachen/Mathematisieren, Mathematisch Arbeiten, Interpretieren/Validieren und der Gesamtmodellierungskompetenz. Die Ergebnisse bestätigen nur zum Teil die vorweg aufgestellten Hypothesen. So zeigt sich in der Tat ein Kompetenzzuwachs bei beiden Gruppen zwischen den drei Messzeitpunkten. Die angenommenen Unterschiede zwischen den beiden Vorgehensweisen bzgl. der Teilkompetenzen bestätigen sich jedoch nicht, lediglich für den Teilprozess Vereinfachen/Mathematisieren zeigen sich positive Effekte für den holistischen Ansatz. Für die Kompetenzdimension Gesamtmodellieren zeigen sich dann die erwarteten Leistungsvorteile für die holistische Gruppe. Susanne Brand diskutiert, dass diese Kompetenzfacette keine globale Modellierungskompetenz darstellt, sondern sich auf die Kompetenz des Einordnens der Modellierungsschritte in den Modellierungskreislauf beschränkt unter Vernachlässigung von metakognitiven Kompetenzen. Die Analyse der Daten nach Schulform zeigt einen hochinteressanten und durchaus unerwarteten Effekt auf, nämlich die Tatsache, dass für die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler der Gymnasien es weniger bedeutsam ist, welcher Modellierungsansatz eingesetzt wird, dass

jedoch der atomistische Ansatz für die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler der Stadtteilschulen weniger geeignet ist. Dieses Ergebnis ist sicherlich durch die Art der Aufgaben beeinflusst, weist jedoch darauf hin, dass als vermeintlich zu schwierig anzusehende komplexe Modellierungsaufgaben durchaus in einem gesamten Modellierungsprozess mit leistungsschwächeren Lernenden behandelt werden können und nicht von vorneherein Vereinfachungen vorzunehmen sind. Die Analysen der Daten nach Geschlecht zeigen gemischte Effekte für die einzelnen Kompetenzfacetten und keinen Einfluss des Geschlechts auf das zugrundeliegende Modellierungsvorgehen.

Abschließend erfolgt eine Analyse der Daten im eindimensionalen Modell. Dabei bestätigen die Daten, dass es einen Leistungszuwachs über die drei Messzeitpunkte gibt, dass jedoch das Modellierungsvorgehen nicht bedeutsam ist. Lediglich für die Lernenden aus den Stadtteilschulen zeigen sich bessere Ergebnisse beim holistischen Vorgehen. Diese Ergebnisse sind in Einklang mit den Ergebnissen der mehrdimensionalen Analyse der Daten.

Abschließend ist festzustellen, dass die Arbeit einen hohen Innovationsgehalt aufweist. Susanne Brand gelingt es überzeugend, aus der Fülle der Fragen, wie Modellierungskompetenzen zu fördern sind, eine empirisch überprüfbare Fragestellung zu destillieren und diese dann in einer, hohen empirischen Standards genügenden, Studie umzusetzen, die für weitere Arbeiten hoffentlich beispielgebend sein wird.

Prof. Dr. Gabriele Kaiser

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Frau Prof. Dr. Gabriele Kaiser für die Betreuung der vorliegenden Arbeit, ihre stete Unterstützung, die unzähligen hilfreichen Ratschläge und ihr jederzeit offenes Ohr für Fragen und Probleme!

Herzlich bedanken möchte ich mich ebenfalls bei Herrn Prof. Dr. Knut Schwippert für seine hilfreiche Beratung in methodischen Fragen und bei Herrn Prof. Dr. Werner Blum für sein Interesse und die Unterstützung dieser Arbeit und die Übernahme des Zweitgutachtens.

Ein großer Dank gebührt darüber hinaus im Besonderen Nils Buchholtz für seine Unterstützung bei der Skalierung der erhobenen Daten sowie Dr. Katrin Vorhölter für ihre Unterstützung bei der Entwicklung der Modellierungsaktivitäten und der Vorbereitung und Durchführung der Trainings für die Lehrkräfte. Danken möchte ich auch dem gesamten Arbeitsbereich der Mathematikdidaktik an der Universität Hamburg für die zahlreichen konstruktiven Anmerkungen und Ratschläge im Rahmen des Forschungskolloquiums und außerhalb.

Selbstverständlich danke ich ebenso herzlich den Lehrkräften, welche die Modellierungsaktivitäten durchgeführt haben, den an dem Projekt beteiligten Schülerinnen und Schülern sowie den studentischen Hilfskräften, die mich bei den Hospitationen der Modellierungsaktivitäten und Kodierungen der Modellierungstests unterstützt haben.

Nicht zuletzt danke ich Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow, meiner Mutter Annegret Grünewald, meinem Ehemann Leo Brand und Hannah Heinrichs für die vielen konstruktiven inhaltlichen und formalen Anmerkungen zur vorliegenden Arbeit.

Und schließlich danke ich von ganzem Herzen meiner Familie und meinen Freunden, allen voran meinem Ehemann Leo Brand und meiner Mutter Annegret Grünewald, die mich stets auf Neue unterstützt, motiviert, gestärkt haben.

Diese Arbeit widme ich meiner Familie, allen voran meinem Ehemann Leo, meinen Eltern Annegret und Günter sowie meinen Geschwistern Kathrin und Eckhard.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 1

2 Theoretischer Rahmen 5

2.1 Mathematisches Modellieren 6

2.1.1 Nationale und internationale Modellierungsperspektiven .. 8

2.1.2 Modellierungskreisläufe als Darstellung des Modellierungsprozesses 11

2.1.3 Kriterien für Modellierungsaufgaben 17

2.2 Mathematische Modellierungskompetenzen 20

2.2.1 Kompetenzbegriff 20

2.2.2 Definitionen mathematischer Modellierungskompetenzen 21

2.2.3 Mathematische Modellierung in den Bildungsstandards . 27

2.2.4 Teilkompetenzen und Teilprozesse mathematischer Modellierung 29

2.2.5 Kompetenzmodelle mathematischen Modellierens 32

2.3 Erwerb von Modellierungskompetenzen 35

2.3.1 Holistischer Modellierungsansatz 36

2.3.2 Atomistischer Modellierungsansatz 37

2.4 Ergebnisse empirischer Studien zum Erwerb von Modellierungskompetenzen 39

2.4.1 Rekonstruierte Gelingensbedingungen für Modellierungsaktivitäten 40

2.4.2 Rekonstruierte Schwierigkeiten im Modellierungsprozess 52

2.5 Zusammenfassung und eigener Ansatz……..57

3 Forschungsfragen und Hypothesen……..63

4 Modellierungsaktivitäten im Rahmen des Projekts ERMO 65
4.1 Leitidee des ERMO-Projekts 66
4.2 Grundlagen der Modellierungsaktivitäten 67
4.3 Überblick über die Unterrichtseinheiten 70
4.4 Holistische Modellierungsaktivitäten – Aufgabenbeispiele 75
4.4.1 Holistisches Beispiel H1: Heide-Park Resort oder Hamburger Dom? 75
4.4.2 Holistisches Beispiel H2: Der Seeler-Fuß in XXL 79
4.4.3 Holistisches Beispiel H3: Erdgas 83
4.4.4 Holistisches Beispiel H4: LichtBlick Regenwald-Engagement 87
4.5 Atomistische Modellierungsaktivitäten 91
4.5.1 Atomistisches Beispiel A1: Heide-Park Resort oder Hamburger Dom? 92
4.5.2 Atomistisches Beispiel A2: Der Seeler-Fuß in XXL 96
4.5.3 Atomistisches Beispiel A3: Erdgas 101
5 Methodischer Rahmen der Studie 103
5.1 Rahmeninformation zum ERMO-Projekt und zur Studie 103
5.1.1 Stichprobe der Studie 106
5.1.2 Untersuchungsdesign 108
5.1.3 Treatmentkontrolle 109
5.2 Erhebungsmethoden 109
5.2.1 Erfassung der Modellierungskompetenzen 110
5.2.2 Testkonstruktion 112
5.2.3 Testdesign 120
5.3 Auswertungsmethoden 123
5.3.1 Kodierung der Fragebögen 124

5.3.2 Rekonstruktion der Modellierungskompetenzen mittels IRT 125
5.3.3 Skalierung der Daten 131
5.3.4 Auswertung der Personenparameter 137
6 Ergebnisse der empirischen Studie 141
6.1 Skalierung der Kompetenz des mathematischen Modellierens 141
6.1.1 Ergebnisse der Modellvergleiche 141
6.1.2 Diskussion der Kompetenzstruktur 146
6.2 Kennwerte des vierdimensionalen between-item Modells 149
6.2.1 Wright Map 150
6.2.2 Itemkennwerte 152
6.2.3 Latente und bivariate Korrelationen der Dimensionen .. 156
6.2.4 Diskussion der Modellkennwerte 158
6.3 Ergebnisse zur durchschnittlichen Kompetenzentwicklung .. 161
6.3.1 Entwicklung der Dimensionen von Modellierungskompetenzen 162
6.3.1.1 Kompetenzentwicklung in der Dimension VM…….162
6.3.1.2 Kompetenzentwicklung in der Dimension MA…….166
6.3.1.3 Kompetenzentwicklung in der Dimension IV……...170
6.3.1.4 Kompetenzentwicklung in der Dimension GM……175
6.3.1.5 Diskussion der Ergebnisse zur Kompetenzentwicklung…….…….179
6.3.2 Entwicklung der Modellierungskompetenzen nach Schulform 187
6.3.2.1 Kompetenzentwicklung in der Dimension VM (nach Schulform)…….187

6.3.2.2 Kompetenzentwicklung in der Dimension MA (nach Schulform)……197

6.3.2.3 Kompetenzentwicklung in der Dimension IV (nach Schulform)……206

6.3.2.4 Kompetenzentwicklung in der Dimension GM (nach Schulform)…… ……215

6.3.2.5 Diskussion der Ergebnisse zur schulformspezifischen Kompetenzentwicklung….225

6.3.3 Entwicklung der Modellierungskompetenzen nach Geschlecht 232

6.3.3.1 Kompetenzentwicklung in der Dimension VM (nach Geschlecht)……232

6.3.3.2 Kompetenzentwicklung in der Dimension MA (nach Geschlecht)……241

6.3.3.3 Kompetenzentwicklung in der Dimension IV (nach Geschlecht)…… ……..249

6.3.3.4 Kompetenzentwicklung in der Dimension GM (nach Geschlecht)…… ……258

6.3.3.5 Diskussion der Ergebnisse zur geschlechtsspezifischen Kompetenzentwicklung..268

6.4 Kompetenzentwicklung im eindimensionalen Modell 273

6.4.1 Kompetenzentwicklung im eindimensionalen Modell nach Schulform 277

6.4.2 Kompetenzentwicklung im eindimensionalen Modell nach Geschlecht 285

6.4.3 Diskussion der Kompetenzentwicklung im eindimensionalen Modell 292

7 Zusammenfassung und Ausblick 295

7.1 Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse 295

7.1.1 Erfassung von Modellierungskompetenzen und Kompetenzstruktur 296

7.1.2 Effekte des Modellierungsansatzes auf die Kompetenzentwicklung 297

7.2 Grenzen der Studie und Ausblick 301

Literaturverzeichnis 305

Abbildungsverzeichnis 329

Tabellenverzeichnis 333

Anhang 341

Anhang 1: Abkürzungsverzeichnis 341

Anhang 2: Zusammenfassung 343

Anhang 3: English Summary 345

1 Einleitung

Mathematisches Modellieren sowie Modellierungskompetenzen und der Erwerb von Modellierungskompetenzen sind seit vielen Jahren Bestandteil einer intensiven sowohl nationalen als auch internationalen mathematikdidaktischen Diskussion (vgl. u.a. Blum et al., 2007; Stillman et al., 2013). National wurde die Relevanz der Auseinandersetzung mit Modellierungskompetenzen durch deren Aufnahme als eine der sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen in den abschlussspezifischen Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz verstärkt (vgl. Kultusministerkonferenz, 2004; 2005a; 2005b; 2012). Verbindlich vorgesehen ist seitdem für alle Schülerinnen und Schüler in Deutschland der Erwerb von mathematischen Modellierungskompetenzen. In diesem Zusammenhang ist die Frage nach ihrer erfolgreichen Förderung und Messung seit mehreren Jahren Gegenstand der umfangreichen Modellierungsdebatte (vgl. u.a. Kaiser et al., 2011; Stillman, 2013). In einzelnen quantitativen Studien (u.a. DISUM: Leiss et al., 2008; KOMMA: Zöttl, 2010; MULTIMA: Schukajlow & Krug, 2013a) und daneben in zahlreichen kleineren und vor allem qualitativ ausgerichteten Projekten (u.a. Blomhøj & Kjeldsen, 2013; Kaiser & Stender, 2013; Kaiser-Meßmer, 1986b; Maaß, 2004) wurden unterschiedliche Facetten des erfolgreichen Erwerbs von Modellierungskompetenzen untersucht. Die den Studien zugrunde liegenden Modellierungsprojekte können dabei in der Regel einem von zwei Modellierungsansätzen zugeordnet werden: entweder einem holistischen oder einem atomistischen Modellierungsansatz (vgl. Blomhøj & Jensen, 2003, S. 128f.). Entsprechend des holistischen Modellierungsansatzes werden bei der Vermittlung von Kompetenzen im mathematischen Modellieren von Anfang an vollständige Modellierungsaufgaben eingesetzt, wobei die Komplexität der zu bearbeitenden Aufgaben im Verlauf des Kompetenzerwerbs gesteigert wird. Im Gegensatz hierzu wird nach dem atomistischen Modellierungsansatz davon ausgegangen, dass die Durchführung vollständiger Modellierungsprozesse insbesondere zu Beginn des Kompetenzerwerbs zu anspruchsvoll und eine separate Bearbeitung von Teilprozessen mathematischen Modellierens hinsichtlich der Leistungsentwicklung erfolgreicher ist. In Forschungsprojekten wurde bislang entweder einer der beiden oder eine Mischung der Modellierungsansätze evaluiert, nicht aber eine Gegenüberstellung einer holistischen und einer

S. Brand, *Erwerb von Modellierungskompetenzen,* Perspektiven der Mathematikdidaktik,
DOI 10.1007/978-3-658-06679-6_1, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

atomistischen Variante. Dabei sprechen verschiedene, dem holistischen Modellierungsansatz zuzuordnende Projekte (vgl. Kaiser & Stender, 2013; Leiss et al., 2008; Maaß, 2004), beispielsweise dafür, dass eine Bearbeitung vollständiger Modellierungsprobleme durchaus bereits in einem frühen Stadium des Kompetenzerwerbs möglich ist, sofern die Komplexität der behandelten Aufgaben den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler entspricht. Eine vergleichende Studie hinsichtlich der Effektivität des holistischen und atomistischen Modellierungsansatzes in Bezug auf die Förderung von Modellierungskompetenzen ist bislang jedoch ausgeblieben. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, die aufgezeigte Forschungslücke zu schließen und die beiden Modellierungsansätze in einem vergleichenden Projekt einander gegenüberzustellen.

Im Rahmen des Interventionsprojekts ERMO (*Er*werb von *Mo*dellierungskompetenzen) wurden Modellierungsaktivitäten entsprechend des holistischen und des atomistischen Modellierungsansatzes entwickelt und in den Mathematikunterricht der an dem Projekt teilnehmenden Schulklassen der 9. Jahrgangsstufe integriert. Mit Hilfe der anhand von Modellierungstests zu drei Messzeitpunkten erhobenen Daten wurde der Frage nachgegangen, welcher der beiden Modellierungsansätze als effektiver in der Förderung der verschiedenen Dimensionen der Modellierungskompetenzen unterschiedlicher Gruppen von Schülerinnen und Schülern zu bezeichnen ist.

Dem Einleitungskapitel folgt in Kapitel 2 die Darstellung des theoretischen Ansatzes der vorliegenden Studie. Einerseits wird an dieser Stelle auf unterschiedliche Perspektiven mathematischen Modellierens und hiermit korrespondierende Idealisierungen des Modellierungsprozesses eingegangen, andererseits erfolgt in diesem Abschnitt eine ausführliche Auseinandersetzung mit dem Konzept der Modellierungskompetenzen. Neben einer Beschreibung der unterschiedlichen Konzeptualisierungen innerhalb der Didaktik und der verschiedenen Kompetenzdimensionen werden ebenfalls vorhandene Kompetenzmodelle erläutert. Der Erwerb von Modellierungskompetenzen wird anhand der beiden im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Modellierungsansätze zur Förderung dieser aufgegriffen: dem holistischen und dem atomistischen Modellierungsansatz. Ergebnisse empirischer Studien zur Entwicklung von Modellierungskompetenzen werden strukturiert wiedergegeben und diskutiert. Die abschließende Zusammenfassung des Kapitels 2 beinhaltet die

dieser Studie zugrunde liegenden Auffassungen in Bezug auf mathematische Modellierung und Modellierungskompetenzen. In Kapitel 3 erfolgen die Formulierung der Forschungsfragen und der zu untersuchenden Hypothesen. Eine Beschreibung des Projektdesigns sowie der Grundsätze der Modellierungsaktivitäten des ERMO-Projekts einschließlich der Darstellung exemplarischer Modellierungsaufgaben wird in Kapitel 4 gegeben. Kapitel 5 ist unterteilt in drei Abschnitte und umfasst, neben Rahmeninformationen des Projekts und einer Beschreibung der Stichprobe, die Schilderung sowohl der Erhebungs- als auch der Auswertungsmethoden. Die Ergebnisse der empirischen Studie sind Inhalt des 6. Kapitels, auf der einen Seite die Resultate der Modellvergleiche und Kennwerte des gewählten Modells, auf der anderen Seite die Ergebnisse zur Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler. Die Leistungsentwicklung der Lernenden wird dabei zunächst für die gesamte Gruppe der beteiligten Schülerinnen und Schüler dargestellt, getrennt nach den unterschiedenen Dimensionen der Modellierungskompetenzen. Anschließend wird die Kompetenzentwicklung differenziert nach Schulform und Geschlecht wiedergegeben. Die Fülle der Ergebnisse wird jeweils im Anschluss an ihre Darstellung in separaten Kapiteln unter Berücksichtigung der formulierten Forschungsfragen und Hypothesen diskutiert und zueinander in Beziehung gesetzt. Abschließend werden in Kapitel 7 die Resultate der vorliegenden Arbeit noch einmal zusammengefasst und Grenzen der Studie aufgezeigt.

2 Theoretischer Rahmen

In den folgenden Unterkapiteln wird der theoretische Hintergrund der vorliegenden Studie dargestellt, der in vier Abschnitte gegliedert ist: Perspektiven mathematischen Modellierens (Kapitel 2.1), die Kompetenzen des mathematischen Modellierens (Kapitel 2.2), den Erwerb von Modellierungskompetenzen (Kapitel 2.3) und Ergebnisse empirischer Studien zum Erwerb von Modellierungskompetenzen (Kapitel 2.4).

Im ersten Abschnitt wird auf die unterschiedlichen mathematikdidaktischen Perspektiven zum mathematischen Modellieren eingegangen (Kapitel 2.1.1) und auf verschiedene idealtypische Darstellungen des Modellierungsprozesses in Form eines Kreislaufs (Kapitel 2.1.2). Darüber hinaus werden in einem weiteren Unterkapitel (Kapitel 2.1.3) Kriterien für Modellierungsaufgaben vorgestellt und diskutiert.

Der zweite Teil umfasst eine Definition des Kompetenzbegriffs (Kapitel 2.2.1) sowie eine Beschreibung der vielfältigen Definitionen mathematischer Modellierungskompetenzen in der Didaktik (Kapitel 2.2.2) und der allgemeinen mathematischen Kompetenz des Modellierens in den Bildungsstandards (Kapitel 2.2.3). Die Teilkompetenzen und Teilprozesse mathematischer Modellierung werden in einem gesonderten Unterkapitel (Kapitel 2.2.4) ausführlich geschildert, ebenso verschiedene Kompetenzmodelle mathematischen Modellierens (Kapitel 2.2.5).

Der Abschnitt zum Erwerb von Modellierungskompetenzen (Kapitel 2.3) beinhaltet die Vorstellung einer möglichen Klassifizierung von Modellierungsprojekten sowie die Charakterisierung des holistischen (Kapitel 2.3.1) und des atomistischen Modellierungsansatzes (Kapitel 2.3.2) zur Förderung von Modellierungskompetenzen.

Der vierte Teil bezieht sich auf Ergebnisse empirischer Studien zum Erwerb von Modellierungskompetenzen (Kapitel 2.4) und dabei insbesondere auf rekonstruierte Gelingensbedingungen für Modellierungsaktivitäten (Kapitel 2.4.1) sowie identifizierte Schwierigkeiten und Fehlerquellen im Modellierungsprozess (Kapitel 2.4.2).

Anschließend werden in einem zusammenfassenden Kapitel (Kapitel 2.5) die dieser Arbeit zugrunde liegenden Positionen noch einmal aufgegriffen und erörtert.

S. Brand, *Erwerb von Modellierungskompetenzen,* Perspektiven der Mathematikdidaktik,
DOI 10.1007/978-3-658-06679-6_2, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

2.1 Mathematisches Modellieren

Anwendungsbezüge und mathematisches Modellieren werden seit einer Vielzahl von Jahren sowohl national als auch international eingehend diskutiert (vgl. u.a. Blum et al., 2007; Borromeo Ferri, Greefrath & Kaiser, 2013; Burkhardt, 2012; Burkhardt & Pollak, 2011; Kaiser et al., 2011; Kaiser-Meßmer, 1986a; Lesh et al., 2010; Stillman et al., 2013). Kaiser-Meßmer (1986a) fasst die Schwerpunkte der frühen Debatte zu Realitätsbezügen im Mathematikunterricht zusammen (vgl. auch Schupp, 1997), neuere Diskussionen werden in der ICMI Study 14 (Blum et al., 2007) dargestellt sowie fortlaufend in den ICTMA Proceedings (vgl. u.a. Kaiser et al., 2011; Lesh et al., 2010; Stillman et al., 2013). Die Bedeutung der mathematischen Modellierung als Themenbereich der Mathematikdidaktik wird nicht zuletzt in der Vielzahl der untersuchten Facetten des Themas deutlich (vgl. Blum, 2002). Ein zentraler Bestandteil der Modellierungsdiskussion insbesondere der letzten Jahre sind mathematische Modellierungsfähigkeiten bzw. -kompetenzen, die Forschungsgegenstand vielfältiger empirischer Studien waren und sind (vgl. u.a. Blum & Leiss, 2007; Kaiser-Meßmer, 1986b; Kaiser & Schwarz, 2006a; Leiss et al., 2008; Ludwig & Xu, 2010; Ludwig & Reit, 2013a; 2013b; Maaß, 2004; Maaß & Mischo, 2011; Schukajlow & Krug, 2013a; Zöttl, 2010).

Im Laufe der Zeit wurden unterschiedliche Begrifflichkeiten in Bezug auf Anwendungen und Modellierungen entwickelt und diskutiert (für eine Abgrenzung der Begrifflichkeiten siehe u.a. Blum, 1996, S. 19; Maaß, 2004, S. 16f.; Niss, Blum & Galbraith, 2007, S. 3ff.; Zöttl, 2010, S. 68ff.). In Anlehnung an Kaiser et al. (2014) umfassen „‘Anwendungen und Modellieren‘ alle Aspekte von Beziehungen zwischen Mathematik und Realität“ (ebd., S. 1), wobei *Modellierungen* im Vergleich zu *Anwendungen* stärker auf den gesamten Prozess des Bearbeitens einer außermathematischen Problemstellung mittels Mathematik einschließlich der Rückübersetzung von der Mathematik in die Realität fokussieren (vgl. Niss, Blum & Galbraith, 2007, S. 3f.). Mathematische Modellierung geht dementsprechend von einem realen, außermathematischen Problem aus, welches mit Hilfe der Mathematik gelöst wird (vgl. Maaß 2004, S. 16f.; Niss, Blum & Galbraith, 2007, S. 10). Zentral sind hierbei insbesondere die Übersetzungsprozesse zwischen diesem außermathematischen und einem mathematischen Gebiet (vgl. Kuntze, 2010, S. 5; Niss, Blum &

Galbraith, 2007, S. 3f.; Schupp, 1997, S. 5f.) sowie hierfür notwendige Entwicklungen und auch Anpassungen mathematischer Modelle, d.h. vereinfachter und idealisierter Darstellungen der jeweiligen realen Problemstellung. Modelle können dabei unterschiedliche Funktionen erfüllen und werden in der Regel in einem ersten Schritt in *deskriptive* und *normative* Modelle eingeteilt (siehe ausführlicher hierzu Böhm, 2013, S. 21ff.; Greefrath, 2006, S. 18ff.; Greefrath et al., 2013, S. 18ff.; Henn & Müller, 2013, S. 204ff.; Lesh & Doerr, 2003, S. 10; Siller, 2010, S. 28f.). Von Bedeutung ist an dieser Stelle, dass zu einer realen Problemstellung, in Abhängigkeit von den berücksichtigten Aspekten der realen Situation, in der Regel verschiedene mathematische Modelle entwickelt werden können (vgl. Zöttl, 2010, S. 70; Greefrath et al., 2013, S. 13). Ebenso kann ein mathematisches Modell unterschiedliche reale Problemsituationen abbilden (vgl. Greefrath, 2006, S. 19).

Verbunden mit der Diskussion über Anwendungsbezüge und mathematisches Modellieren war und ist die Forderung nach einem angemessenen Einbezug dieser Aspekte in den Mathematikunterricht (vgl. Blum, 1985, S. 195; 1996, S. 15; Kaiser, 1995, S. 69; Kaiser et al., 2014, S. 2). Die hiermit verknüpften Zielsetzungen sind unterschiedlich akzentuiert. Sie umfassen häufig die Entwicklung bzw. Festigung mathematischer Begriffe und Methoden, die Förderung der Fähigkeit, reale Phänomene zu ergründen, den Erwerb von Problemlösefähigkeiten, lernpsychologische Aspekte und die Ausbildung eines adäquaten Verständnisses der Bedeutung der Mathematik (vgl. Blum, 1996, S. 20ff.; Blum, 2006, S. 11; Blum & Niss, 1991, S. 42ff.; Greefrath, 2010a, S. 16ff.; Henn & Maaß, 2003, S. 1f.; Kaiser, 1995, S. 69f.; Maaß, 2005a, S. 117ff.). In Anlehnung an insbesondere Blum (1996, S. 20ff.) und Kaiser (1995, S. 69f.) werden diese Aspekte von Maaß (2005a, S. 118) in fünf Kategorien folgendermaßen ausformuliert:

> „1. *Methodologische Ziele:* Modellierungen und Realitätsbezüge sollen den Schülerinnen und Schülern Kompetenzen zum Anwenden von Mathematik in einfachen und komplexen unbekannten Situationen vermitteln.
>
> 2. *Kulturbezogene Ziele:* Modellierungen und Realitätsbezüge sollen den Schülerinnen und Schülern ein ausgewogenes Bild

von Mathematik als Wissenschaft und ihrer Bedeutung für unsere Kultur und Gesellschaft vermitteln.

3. *Pragmatische Ziele:* Realitätsbezüge im Mathematikunterricht sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, aus dem Unterricht bekannte Umweltsituationen zu verstehen und zu bewältigen.

4. *Lernpsychologische Ziele:* Realitätsnahe Modellierungsbeispiele sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, eine aufgeschlossene Einstellung gegenüber dem Mathematikunterricht zu entwickeln und das Behalten und Verstehen von mathematischen Inhalten unterstützen.

5. *Pädagogische Ziele:* Realitätsnahe Modellierungen im Mathematikunterricht sollen heuristische Strategien, Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten sowie kreatives Verhalten ausbilden und fördern."

Greefrath et al. (2013, S. 19f.) fassen die vielfältigen mit Modellierungen verbundenen Intentionen zu *inhaltsorientierten*, *prozessorientierten* und *allgemeinen Zielen* zusammen. In anderen Darstellungen enthalten die beschriebenen Zielsetzungen zum Teil spezifische Schwerpunkte, beispielsweise wird von Lingefjärd (2006, S. 98) ein starker inhaltlich-mathematischer und auf den Modellierungsprozess bezogener Fokus gesetzt.

2.1.1 Nationale und internationale Modellierungsperspektiven

In der nationalen und internationalen didaktischen Diskussion entwickelten sich verschiedene Perspektiven mathematischer Modellierung. Zur Strukturierung der Vielfalt der Ansätze wurde von Kaiser und Sriraman (2006) eine Klassifikation der Modellierungsperspektiven entsprechend ihrer spezifischen Auffassung von mathematischer Modellierung und der mit Modellierung verbundenen Ziele entworfen, einschließlich der Berücksichtigung des Stellenwerts, der der Mathematik bzw. außermathematischen Problemstellungen zugewiesen wird (vgl. auch Kaiser et al., 2007). Der Klassifikation zufolge können unterschieden werden: *realistisches* oder *angewandtes* Modellieren, *epistemologisches* oder *theoreti-*

sches Modellieren, *pädagogisches* Modellieren (*didaktisch* bzw. *begrifflich*), *soziokritisches* Modellieren, *kontextbezogenes* Modellieren und als Meta-Perspektive *kognitives* Modellieren (vgl. Kaiser & Sriraman, 2006, S. 304). Ergänzt wurde dieses Klassifikationsschema von Borromeo Ferri und Kaiser (2008) durch eine Zuordnung idealtypischer Darstellungen eines Modellierungsprozesses zu den Perspektiven mathematischer Modellierung (siehe für einen Überblick auch Borromeo Ferri, 2011; Greefrath et al., 2013; Kaiser, 2005a; Kaiser et al., 2014; Kaiser-Meßmer, 1986a).

Als zwei einander weitgehend entgegengesetzte Modellierungsperspektiven werden *epistemologisches oder theoretisches Modellieren* und *realistisches oder angewandtes Modellieren* beschrieben (vgl. Borromeo Ferri & Kaiser, 2008, S. 2f.). Dem ersten Ansatz werden insbesondere wissenschaftsorientierte Ziele zugeordnet und die Authentizität der behandelten Modellierungsprobleme gilt als dem Ziel der Entwicklung mathematischer Theorien unterordnet bzw. wird als nicht von Bedeutung erachtet. Währenddessen werden die Authentizität der zu modellierenden Situationen sowie das genaue Erfassen der Realität als zentrales Merkmal des *realistischen* oder *angewandten* Modellierens angesehen. Ein weiteres Ziel dieses Ansatzes, der sich an der angewandten Mathematik orientiert, ist der Klassifikation zufolge die Förderung von Modellierungskompetenzen. Vertreten wird dieser zweite Ansatz beispielsweise von Kaiser (2005b), Bracke (2007) und Ortlieb et al. (2009). Die mit der Authentizität in der Regel einhergehende Komplexität der Modellierungsbeispiele lässt eine Bearbeitung der Problemstellungen im Rahmen von Projekten sinnvoll erscheinen (vgl. Kaiser et al., 2014, S. 3).

Das *pädagogische Modellieren* wird demgegenüber als eine Art integrierender Ansatz aufgefasst, welcher in *didaktisches* und *begriffliches* Modellieren unterteilt wird und sowohl pädagogische als auch stoffbezogene Zwecke verfolgt. Zentrale Aspekte des *didaktischen* Modellierens sind, entsprechend der Klassifizierung, einerseits die Unterstützung von mit der Modellierung verbundenen Lernvorgängen, etwa die Förderung von Modellierungskompetenzen aber auch allgemeinerer Kompetenzen wie beispielsweise Kommunizieren und Argumentieren (vgl. Kaiser et al. 2014, S. 3). Andererseits kann mit der Auseinandersetzung mit Modellierungsproblemen die Vermittlung und Wiederholung mathematischer Inhalte und Verfahrensweisen intendiert sein. Wesentliches Ziel des *begriff-*

lichen Modellierens ist Borromeo Ferri und Kaiser (2008, S. 4) zufolge die Förderung des Erwerbs und Begreifens von Begriffen innerhalb der Mathematik und bezüglich des Modellierungsprozesses. Beiden Richtungen des *pädagogischen* Modellierens, sowohl dem *didaktischen* als auch dem *begrifflichen* Modellieren, wird zugeschrieben, dass die behandelten Modellierungsprobleme zwar möglichst realitätsnah sind, aber gegebenenfalls entsprechend der zu erreichenden Ziele verändert werden. Von größerer Bedeutung als die Authentizität der Aufgaben ist dementsprechend das Erreichen der mit den Modellierungsaktivitäten verbundenen Ziele. Bedeutende Vertreter dieser Auffassung sind Blum und Niss (1991), Blomhøj & Jensen (2003) sowie Maaß (2004).

Darüber hinaus werden zwei weitere Ansätze unterschieden, zum einen das *soziokritische Modellieren*, welches die Funktion der Mathematik in der Gesellschaft fokussiert und insbesondere eine Reflexion des Modellierungsprozesses propagiert und zum anderen das *kontextbezogene Modellieren* bzw. der *Modelling-Eliciting-Activities-Ansatz* (vgl. Lesh & Doerr, 2012), welcher eine Organisation, Analyse und Übertragung von Bearbeitungsprozessen als zentral ansieht (vgl. Borromeo Ferri & Kaiser, 2008, S. 4; Kaiser et al., 2014, S. 4).

Als eine Art deskriptive Meta-Perspektive wird die relativ neue Richtung des *kognitiven Modellierens* angesehen. Dieser Ansatz wird als abgegrenzt zu den oben beschriebenen Auffassungen von mathematischer Modellierung beschrieben und als kombinierbar mit anderen Perspektiven von Modellierung erachtet. Im Fokus werden bei diesem Ansatz nicht die durch mathematische Modellierung zu erreichenden Ziele gesehen, sondern die Beschreibung und Analyse von Modellierungsaktivitäten an sich, also die beim Modellieren stattfindenden kognitiven Prozesse. Hierbei werden zwei verschiedene Richtungen des *kognitiven* Modellierens unterschieden (Kaiser, 2011, S. 92), die eine ist fokussiert auf der Rekonstruktion individueller Modellierungsrouten (vgl. Borromeo Ferri, 2011; Carreira & Baioa, 2011), während die andere kognitive Schwierigkeiten und mentale Barrieren von Lernenden untersucht und die Relevanz von Metakognition zur Überwindung derartiger Schwierigkeiten hervorhebt (vgl. Stillman, 2011).

2.1.2 Modellierungskreisläufe als Darstellung des Modellierungsprozesses

Für den Prozess des mathematischen Modellierens wurden in den vergangenen Jahren unterschiedliche idealisierende Ablaufschemata konstruiert. Zunehmend wird der Modellierungsprozess dabei unter Bezug auf ein Kreislaufmodell idealtypisch dargestellt (vgl. Blum & Leiß, 2005, S. 18; Böhm, 2013, S. 25; Borromeo Ferri, 2011, S. 5; Greefrath et al., 2013, S. 14; Kaiser, Blomhøj & Sriraman, 2006, S. 82). Entsprechend der verschiedenen Modellierungsperspektiven existieren unterschiedliche Modellierungskreisläufe, die für verschiedene Funktionen entwickelt wurden, beispielsweise für den Einsatz in der Klasse als metakognitives Hilfsmittel für Schülerinnen und Schüler gedacht sind, als Analyseinstrument für die Mathematikdidaktik zur Rekonstruktion etwa von Modellierungsprozessen oder als didaktisches Hilfsmittel zur Planung von Modellierungsaktivitäten (vgl. Borromeo Ferri 2011, S. 14; Kaiser, Blomhøj & Sriraman, 2006, S. 83). Gemeinsam ist diesen Kreisläufen, dass sie die Übersetzungsprozesse eines Modellierungsprozesses zwischen Realität und Mathematik illustrieren (vgl. Niss, Blum & Galbraith, 2007, S. 4), wobei insbesondere diese Übergänge zwischen Realität und Mathematik in unterschiedlich viele Phasen unterteilt werden (vgl. Keune, Henning & Hartfeld, 2004, S. 6). Ausgangspunkt eines Modellierungskreislaufs ist jeweils eine reale Problemstellung, die grundsätzlich in ein mathematisches Modell zu überführen ist. Es wird häufig zunächst ein reales Modell unterschieden (vgl. u.a. Blum, 1985, S. 200; Kaiser, 1995, S. 67f; Maaß, 2005a, S. 117), dem teilweise noch ein mentales Situationsmodell vorausgeht (vgl. Blum & Leiß, 2005, S. 18; Borromeo Ferri, 2011, S. 41; Leiss et al., 2010, S. 120ff.). Die Trennung von realem und mathematischem Modell wird nicht unkritisch betrachtet, da diese nicht immer als eindeutig zu bezeichnen ist und von den mathematischen Kenntnissen abhängt (vgl. Kaiser et al., 2014, S. 7). Wurde ein mathematisches Modell erstellt, so gilt es, innerhalb dieses Modells mit Hilfe mathematischer Verfahren eine mathematische Lösung zu erzielen. Abschließend ist dieses Ergebnis zurück in die Realität zu übersetzen und anhand der realen Situation zu interpretieren und zu validieren (vgl. u.a. Blum, 1985, S. 200; Kaiser, 1995, S. 67f; Maaß, 2005a, S. 117), wobei hier nicht in allen Kreisläufen zwischen mathematischen und realen Lösungen differenziert wird. Entsprechend der angenommenen Kreisstruktur des Modellie-

rungsprozesses wird im Anschluss, je nach Bewertung des Ergebnisses und des Lösungswegs, gegebenenfalls eine weitere Bearbeitung des realen Problems mit veränderten Annahmen als notwendig angesehen (vgl. Kaiser, 1995, S. 67f.).

Borromeo Ferri (2011) teilt die von ihr betrachteten Kreisläufe im Wesentlichen anhand ihrer Differenzen in der Beschreibung des Übergangs zwischen Realität und Mathematik in vier Gruppen ein: „Typ (1): Modellierungskreislauf aus der angewandten Mathematik, Typ (2): Didaktischer Modellierungskreislauf, Typ (3): Modellierungskreislauf als Basis für die Rekonstruktion des Situationsmodells bei der Verwendung von Textaufgaben, Typ (4): Diagnostischer Modellierungskreislauf“ (Borromeo Ferri, 2011, S. 14; vgl. hierzu auch Borromeo Ferri & Kaiser, 2008, S. 5; Borromeo Ferri, 2006, S. 86ff.). Greefrath et al. (2013, S. 14ff.) unterscheiden in Anlehnung an diese Klassifizierung im Wesentlichen drei Kategorien, die sie als *direktes* Modellieren, *zweischrittiges* oder *dreischrittiges* Mathematisieren bezeichnen. Andere Klassifizierungen sowie Diskussionen von bestehenden Modellierungskreisläufen finden sich beispielsweise bei Greefrath (2010b, S. 45), Haines und Crouch (2010, S. 145ff.) sowie Kaiser (1995, S. 72).

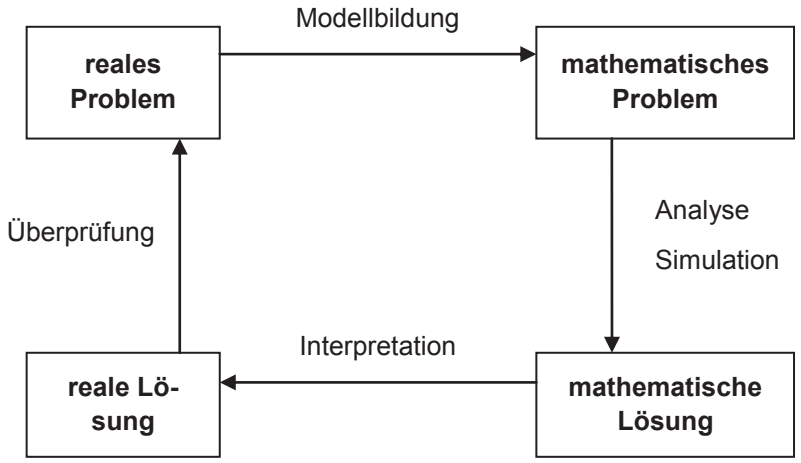

Abb. 1: Darstellung des Modellierungsprozesses nach Ortlieb et al. (2009, S. 5)

Modellierungskreisläufe aus der angewandten Mathematik unterscheiden nicht zwischen einem realen und einem mathematischen Modell und fassen teilweise mathematische und reale Ergebnisse zusammen (vgl. Borromeo Ferri, 2011, S. 15). Ein Beispiel für einen solchen Kreislauf, der die Phase der mathematischen und realen Resultate trennt, ist in Abb. 1 dargestellt, ein weiteres Beispiel findet sich bei Haines, Crouch und Davis (2001, S. 368).

Im Vergleich zu Modellierungskreisläufen aus der angewandten Mathematik unterscheiden didaktische Modellierungskreisläufe zwischen realem und mathematischem Modell (vgl. Blum, 1996, S. 18; Kaiser, 1995, S. 67f.; Kaiser, 2005b, S. 100) und teilweise zusätzlich zwischen mathematischer und realer Lösung (vgl. Blomhøj & Jensen, 2003, S. 125; Kaiser & Stender, 2013, S. 279; Maaß, 2005a, S. 117). Ziel der didaktischen Modellierungskreisläufe ist ihr Einsatz im Mathematikunterricht als metakognitives Hilfsmittel für Schülerinnen und Schüler bei Modellierungsprozessen (vgl. Borromeo Ferri & Kaiser, 2008, S. 7). Ein Beispiel für einen fünfschrittigen Modellierungskreislauf ist in Abb. 2 abgebildet.

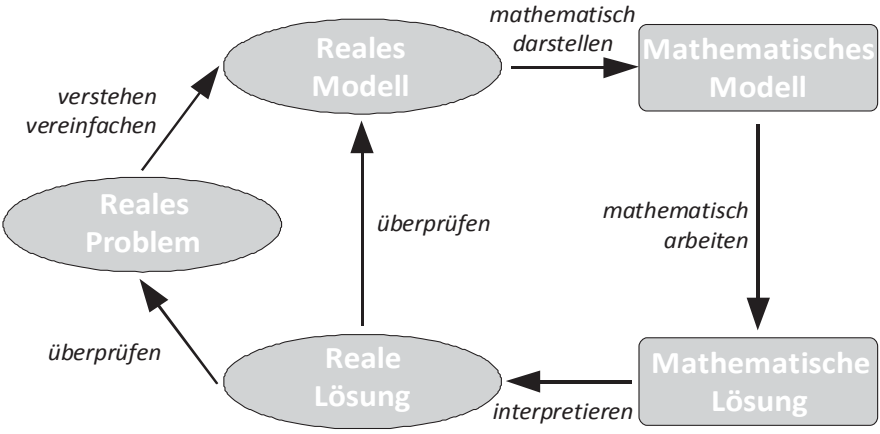

Abb. 2: Der Modellierungsprozess (Kaiser & Stender 2013, S. 279)

Ein etwas anderer Modellbildungskreislauf findet sich bei Keune, Henning und Hartfeld (2004, S. 9), in diesem werden verschiedene Modellstufen unterschieden.

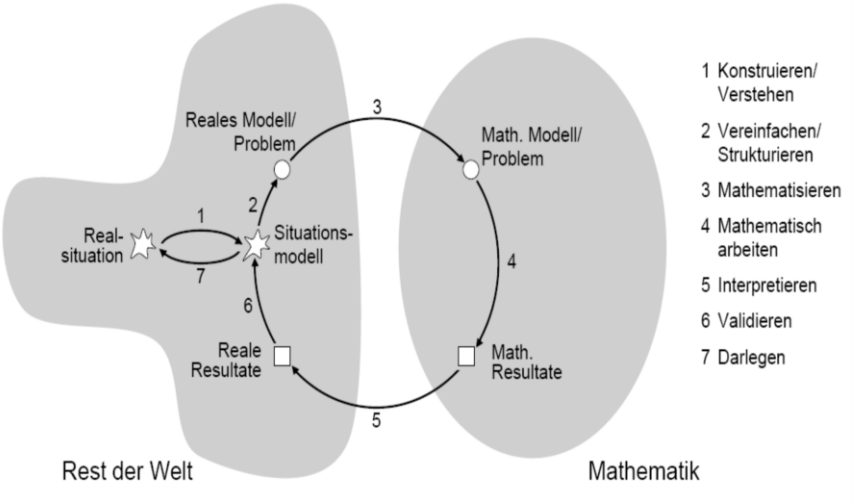

Abb. 3: Modellierungskreislauf von Blum & Leiß (nach Blum & Leiß, 2005, S. 18)

Weiter differenziertere Kreisläufe sind diagnostische Kreisläufe, die als zusätzliche Phase zwischen der realen Situation und dem realen Modell ein Situationsmodell bzw. eine Phase der mentalen Repräsentation der Situation unterscheiden, die das Verstehen der Aufgabe und deren interne Repräsentation umfasst (vgl. Blum & Leiß, 2005, S. 18). Diese Unterscheidung wurde zur Untersuchung kognitiver Prozesse von Modellierenden vorgenommen und gehört dementsprechend zum Ansatz des *kognitiven* Modellierens. Ein Situationsmodell findet sich auch bei „Modellierungskreisläufen als Basis für die Rekonstruktion des Situationsmodells bei der Verwendung von Textaufgaben“ (vgl. Borromeo Ferri, 2011, S. 17ff.).Hier wird allerdings nicht zwischen Situationsmodell und realem Modell unterschieden, da davon ausgegangen wird, dass Textaufgaben bereits so weit strukturiert sind, dass direkt ein mathematisches Modell erstellt wird (vgl. Blum & Niss, 1991, S. 40). Ein Beispiel für einen diagnostischen Modellierungskreislauf ist in Abb. 3 dargestellt (vgl. auch

Blum, 2011, S. 18), in leicht modifizierter Form findet er sich auch bei Borromeo Ferri (2011, S. 41).

In den letzten Jahren sind durch Arbeiten von Maaß (2004) und Stillman (2011) in der Modellierungsdebatte verstärkt Aspekte der Bezugnahme auf metakognitive Kompetenzen bei der Durchführung von Modellierungsaktivitäten gefordert worden (vgl. Vorhölter & Kaiser, 2013, S. 1). Als ein mögliches Instrument zur Förderung metakognitiver Aspekte wird der Modellierungskreislauf angesehen (vgl. ebd., S. 7f.). Es ergibt sich die Frage, welche Kreislaufart am geeignetsten ist für den Einsatz im Mathematikunterricht als metakognitives Hilfsmittel für die Schülerinnen und Schüler. Es wird vermutet, dass ein didaktischer Modellierungskreislauf angemessen für die Vermittlung im Unterricht ist: Im Vergleich zum diagnostischen Modellierungskreislauf verfügt er über eine reduzierte Komplexität, die eine Verortung des eigenen Lösungsprozesses im Kreislauf erleichtert (vgl. Borromeo Ferri & Kaiser, 2008, S. 7). Darüber hinaus ist die Sprache angemessen für Schülerinnen und Schüler. Nicht geklärt ist bisher, welche Phasen ein didaktischer Kreislauf idealerweise unterscheiden sollte. Maaß (2004, S. 57) geht zu Beginn ihrer umfassenden Fallstudie von einem vierstufigen Modellierungskreislauf aus, der zwischen Realmodell und mathematischem Modell unterscheidet. Im Anschluss an ihr Projekt plädiert sie für ein Modell, welches für Lernende unterer Klassenstufen der Sekundarstufe I diese beiden Phasen nicht trennt, da die Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten bei deren Unterscheidung aufweisen (vgl. ebd., S. 290; vgl. auch Böhm, 2010, S. 7). Allerdings differenziert Maaß nun zwischen Interpretieren und Validieren, wobei der Begriff des Validierens aus Gründen des einfacheren Verständnisses durch die Bezeichnung „auf Gültigkeit überprüfen“ ersetzt wird. Für die Sekundarstufe II schlägt sie dagegen einen fünfstufigen Kreislauf vor (vgl. Maaß, 2004, S. 290), der die Phasen *reales Problem*, *Realmodell*, *mathematisches Modell*, *mathematische Lösung* und *interpretierte Lösung* umfasst (vgl. ebd., S. 175; siehe auch Maaß, 2005a, S. 117). In dem Projekt DISUM wurde ein siebenstufiger Kreislauf zu einem vierstufigen Lösungsplan verdichtet, der den Lösungsprozess der Schülerinnen und Schüler unterstützt und lenkt und durch seine reduzierte Komplexität ähnlich einem didaktischem Modellierungskreislauf als Hilfsmittel für Lernende eingesetzt werden kann (vgl. Blum, 2006, S. 21; Schukajlow, Blum & Krämer, 2011, S. 42ff.). Der diagnostische Kreislauf

dagegen wird vor allem als Analyseinstrument individueller Modellierungsprozesse vorgeschlagen (vgl. Borromeo Ferri, 2011, S. 21). Grundsätzlich sprechen sich Borromeo Ferri und Kaiser (2008, S. 10) dafür aus, einen dem Leistungsstand der Schulklasse angemessenen und der Komplexität der Modellierungsprobleme entsprechenden Ansatz und Modellierungskreislauf zu verwenden.

Eine Darstellung des Modellierungsprozesses als Kreislauf spiegelt dessen Prozesscharakter wider und verdeutlicht, dass er in der Regel nicht mit einem einmaligen Durchlaufen endet. Vielmehr kann der Prozess des Modellierens als eine Art Iterationsprozess interpretiert werden, der sich durch Modellanpassungen, d.h. erneutem Durchführen einzelner oder aller Phasen des Modellierungsprozesses, der tatsächlichen Lösung annähert (vgl. Galbraith & Stillman, 2006, S. 143; Lin & Yang, 2005, S. 100). Die Idealisierung des Modellierungsprozesses als Kreislauf ist dagegen nicht als ein Algorithmus zu verstehen, dem Folge zu leisten ist, vielmehr ermöglicht der Modellierungskreislauf eine Orientierung bei der Bearbeitung von Modellierungsproblemen und kann dementsprechend als metakognitives Hilfsmittel betrachtet werden. Tatsächliche Modellierungsprozesse sind gekennzeichnet durch ein häufiges Wechseln zwischen den einzelnen Phasen der Kreisläufe (vgl. Blomhøj & Jensen, 2003, S. 1; Borromeo Ferri, 2007a, S. 266f.; 2007b, S. 309.; Galbraith & Stillman, 2006, S. 144), beispielsweise konnte Borromeo Ferri (2011, S. 103ff. bzw. 146ff.) in ihrer Studie individuelle Modellierungsverläufe und sogenannte Minikreisläufe der Lernenden rekonstruieren (vgl. auch Borromeo Ferri & Wissmach, 2008, S. 73f.). Insgesamt ist der Modellierungsprozess stark subjektiv geprägt, da die reale Problemstellung entsprechend der persönlichen Kriterien des Modellierenden vereinfacht und strukturiert wird (vgl. Maaß, 2007a, S. 15). Hierbei bestehen in der Regel unterschiedliche Möglichkeiten, ein Modellierungsproblem zu vereinfachen, eine Situation zu mathematisieren oder auch mathematische Methoden zu nutzen (vgl. Schukajlow & Krug, 2012a, S. 60). Darüber hinaus orientiert sich die Konstruktion des mathematischen Modells an den eigenen mathematischen Fähigkeiten (vgl. Schukajlow, 2011, S. 80).