Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik

RESEARCH

Katrin Schiffer

Probleme beim Übergang von Arithmetik zu Algebra

Springer Spektrum

Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik

Reihe herausgegeben von
Michael Meyer, Köln, Deutschland
Benjamin Rott, Köln, Deutschland
Inge Schwank, Köln, Deutschland
Horst Struve, Köln, Deutschland

In dieser Reihe werden ausgewählte, hervorragende Forschungsarbeiten zum Lernen und Lehren von Mathematik publiziert. Thematisch wird sich eine breite Spanne von rekonstruktiver Grundlagenforschung bis zu konstruktiver Entwicklungsforschung ergeben. Gemeinsames Anliegen der Arbeiten ist ein tiefgreifendes Verständnis insbesondere mathematischer Lehr- und Lernprozesse, auch um diese weiterentwickeln zu können. Die Mitglieder des Institutes sind in diversen Bereichen der Erforschung und Vermittlung mathematischen Wissens tätig und sorgen entsprechend für einen weiten Gegenstandsbereich: von vorschulischen Erfahrungen bis zu Weiterbildungen nach dem Studium.
Diese Reihe ist die Fortführung der „Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften“.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/16272

Katrin Schiffer

Probleme beim Übergang von Arithmetik zu Algebra

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Horst Struve

Springer Spektrum

Katrin Schiffer
Köln, Deutschland

Dissertation der Universität zu Köln, 2018

ISSN 2661-8257 ISSN 2661-8265 (electronic)
Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik
ISBN 978-3-658-27776-5 ISBN 978-3-658-27777-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27777-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Für Markus, Jonas und Elias

Geleitwort

Was verstehen Schülerinnen und Schüler unter Mathematik? Nicht nur für die „reine" Mathematikdidaktik, die primär an deskriptiven Befunden interessiert ist, ist dies eine grundlegende Frage sondern auch für die „angewandte" Mathematikdidaktik, die Unterrichtsreihen entwirft. Für verschiedene mathematische Teilgebiete wie Arithmetik, Geometrie, Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde diese Frage schon untersucht, mit insbesondere folgenden Ergebnissen:

➢ Während Lehrkräfte oft meinen, sie würden eine formal-abstrakte Theorie vermitteln, indem sie diese geschickt veranschaulichen, erwerben Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht empirisch-gegenständliche Theorien über diese Veranschaulichungsmittel.

➢ Die Auffassungen der Schülerinnen und Schüler sind in der Regel keineswegs defizitär im Sinne von ungenügend für den weiteren Verlauf des Schulunterrichts, sondern sie entsprechen wohlfundierten historischen Auffassungen von Mathematik.

Diese gemeinsam mit Prof. H.J. Burscheid (Universität zu Köln) und Prof. I. Witzke (Universität Siegen) gewonnenen Erkenntnisse sind der Ausgangspunkt der Arbeit von Frau Schiffer. Sie stellt sich die Frage, ob entsprechende Aussagen auf die Algebra übertragbar sind.

Unter *Algebra* wird in dieser Arbeit *elementare Algebra* verstanden, die kurz als *Rechnen mit Unbekannten* charakterisiert werden kann. Sie bezeichnet kein inhaltliches Teilgebiet der Schulmathematik - im Gegensatz zu der abstrakten Algebra der Fachwissenschaft Mathematik, die abstrakte Strukturen wie beispielsweise Gruppen, Körper und Vektorräumen untersucht.

Welche Rolle spielen „Unbekannte", genauer: Variable in der Fachwissenschaft, der Mathematik? Sie treten bereits ganz am Anfang auf, bei der Aufstellung einer mathematischen Theorie (i.S. der modernen formalistischen Auffassung). Dazu benötigt man eine (logische) Sprache, mit der man eine Mengenlehre und eine Klassenlogik[1] formulieren kann, um auf dieser Basis die Axiome der Theorie formulieren und anschließend Sätze beweisen zu können. Grundlegend für eine logische Sprache sind Variable, „Zeichen ohne fest vereinbarte Bedeutung" (A. Oberschelp). Der Umgang mit Variablen wird in den Regeln der Sprache festgelegt - also vor der Formulierung der Theorie.

Frau Schiffer untersucht, wie sich die Schulalgebra, insbesondere der Umgang mit Variablen, unter der Perspektive, dass Schülerinnen und Schüler empirische (naturwissenschaftliche) Theorien erwerben, darstellt. Das Ergebnis ist: *Algebra wird als Sprache empirischer Theorien eingeführt.*

Frau Schiffer belegt diese Aussage durch die Analyse von zwei Schulbuchwerken. Diese zeigt, dass

[1] Eine instruktive Darstellung findet man in A. Oberschelp: Allgemeine Mengenlehre. Bibliographisches Institut, Mannheim 1994.

- Variable der Schulalgebra keineswegs „Zeichen ohne fest vereinbarte Bedeutung“ sind, sondern für (physikalische) Größen stehen. Sie werden also nicht als sprachliche Ausdrücke *vor* und *unabhängig* von der Formulierung der Theorie eingeführt, sondern *bezeichnen* Objekte der Theorie. - Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied zur modernen formalistischen Auffassung von Mathematik.

- Begründungen für Rechengesetze, unter Bezug auf den Bereich der Variablen, die in dem Gesetz vorkommen, gegeben werden - und dies sind empirische Größenbereiche.

- Terme Objekte oder Sachverhalte der Realität denotieren. Die Korrektheit von Termumformungen werden auf diese Sachverhalte zurückgeführt, etwa die Gleichheit von Termen mit Hilfe des Waagemodells im Größenbereich der Gewichte begründet.

Diese Auffassung von Algebra ist keineswegs defizitär, weil sie nicht der modernen formalistischen Auffassung mathematischer Theorien entspricht. Die Tragfähigkeit der rekonstruierten Schülerauffassungen von Algebra weist Frau Schiffer durch eine historische Analyse nach: Auch in der Geschichte der Mathematik findet man eine ähnliche Auffassung von Algebra, beispielweise in der berühmten „Vollständigen Anleitung zur Algebra” von L. Euler, einem Standardwerk der Algebra im 18. Jahrhundert.

Mit ihrer Arbeit trägt Frau Schiffer dazu bei, Probleme des Übergangs von Arithmetik zur Algebra zu identifizieren und zu helfen, diese zu überwinden; etwa durch ein explizites Betonen und damit Ernstnehmen des empirischen Charakters des Schülerwissens.

Horst Struve

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist am Institut für Mathematikdidaktik der Universität zu Köln entstanden und wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln als Dissertation angenommen. Die Arbeit wurde im Rahmen einer Disputation am 20. November 2018 am Institut für Mathematikdidaktik verteidigt. An der mündlichen universitätsoffenen Prüfung nahmen die beiden Gutachter, Herr Prof. Dr. Horst Struve und Herr Prof. Dr. Ingo Witzke, sowie Frau Prof. Dr. Christiane Reiners als Vorsitzende der Prüfungskommission und Herr Dr. Stefan Heilmann als Beisitzer teil.

In der Zeit meiner Promotion haben mich viele Menschen unterstützt und dadurch diese Arbeit erst ermöglicht.

Meinem Doktorvater Prof. Dr. Horst Struve danke ich für die vielen anregenden Gespräche und konstruktiven Ratschläge. Prof. Dr. Horst Struve hat mir bereits in meinem Studium einen erweiterten Zugang zur Mathematikdidaktik eröffnet und mich durch die Verbindung und den gegenseitigen Einfluss von Geschichte, Philosophie und Mathematik für das Fach begeistert. Im Anschluss an mein Studium hat er mir die Möglichkeit gegeben weiter zu lernen und zu forschen und hat mich auf meinem Weg immer verständnisvoll und herzlich betreut.

Prof. Dr. Ingo Witzke danke ich für den regen wissenschaftlichen Austausch, seine Ermutigungen und die Begleitung dieser Arbeit als Prüfer.

Prof. Dr. Christiane Reiners danke ich für ihr Interesse an meiner Arbeit und die sofortige Bereitschaft den Vorsitz der Prüfungskommission zu übernehmen.

Dr. Stefan Heilmann danke ich für das freundliche, kollegiale Verhältnis und seine Tätigkeit als Beisitzer der Prüfungskommission.

Meinen Kollegen und Mitdoktoranden danke ich für den wissenschaftlichen Austausch und die vielen anregenden Diskussionen in Mitarbeiterseminaren, Kolloquien und auf Tagungen.

Besonders danke ich meiner Familie.

Meinen Schwiegereltern Wiltraud und Rolf Schiffer danke ich für ihre familiäre Hilfe, die erhebliche zeitliche Unterstützung und die dabei von ihnen empfundene Selbstverständlichkeit.

Meinen Eltern Steffi und Arno Reimann danke ich für ihren großen Beistand und ihren festen Glauben an mich und meinen Erfolg. Sie haben mich stets ermutigt meinen eigenen Weg zu gehen und mich auf diesem unterstützt und gefördert.

Besonderer Dank gilt meinem Sohn Jonas, der in der Phase der Fertigstellung viele Stunden auf mich verzichten musste. Sein Lachen und seine Fröhlichkeit bereichern mich jeden Tag und zeigen mir die Freude an den kleinen Dingen im Leben.

Der größte Dank gilt meinem Mann Markus, der mich bedingungslos unterstützte, stets ein offenes Ohr hatte und mir mit viel Verständnis den Rücken frei gehalten hat.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

Probleme des Mathematikunterrichts

Die Schwierigkeiten und Probleme im Mathematikunterricht haben bei vielen Schülerinnen und Schülern ihren Ursprung im mangelhaften Erlernen der elementaren Grundkenntnisse, insbesondere beim algebraischen Wissen.

Die Algebra kann als Sprache der Mathematik angesehen werden und nimmt deshalb eine zentrale Rolle innerhalb der Mathematik ein. Die algebraische Symbolsprache bildet die Grundlage für die allgemeine Betrachtung und Beschreibung von mathematischen Strukturen. Variable ermöglichen kontextfreie Darstellungen und somit das Aufstellen allgemeiner Gesetze und die Beschreibung von funktionalen Abhängigkeiten. Das Verständnis der Algebra und vor allem der richtige Umgang mit Variablen stellt die wesentliche Voraussetzung für das Verständnis der weiterführenden Mathematik dar.

Die Algebra wird aufbauend auf die Arithmetik zu Beginn der weiterführenden Schulen eingeführt. Der Unterschied zwischen den beiden mathematischen Disziplinen liegt nicht allein nur in der Zielsetzung und in der Bedeutung der verwendeten Symbole, sondern vor allem auch in den von ihnen behandelten Objekten. Die Arithmetik wird in der Schule als Teil der Schulmathematik verstanden und bezeichnet das Rechnen mit konkreten Zahlen ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) in den Grundrechenarten der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Unbekannte (x, ?, □) treten in dieser nur bei der Formulierung der Aufgabe auf, und es wird nicht mit ihnen operiert. Die Schulalgebra kann als elementare Algebra bezeichnet werden. Sie umfasst das Rechnen und Operieren mit Unbekannten in Gleichungen und im Zusammenhang mit Funktionen. In Abgrenzung zur modernen Algebra werden keine algebraischen Strukturen wie Ringe, Körper oder Gruppen betrachtet. Ziel des Algebraunterrichts ist es einen Sachverhalt allgemein darzustellen und Gesetzmäßigkeiten zu erkennen. Hierzu werden Variable eingeführt und Rechenoperationen auf Variable angewandt. Die Variablen stellen ein Mittel der Verallgemeinerung dar und sind damit das grundlegende Konzept der Algebra. Schoenfeld und Arcavi beschreiben dies in folgender Weise:

> „Understanding the concept [of variable] provides the basis for the transition from arithmetic to algebra and is necessary for the meaningful use of all advanced mathematics.“[1]

Diese neuen Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler werden in den Bildungsstandards im Schulfach Mathematik für den mittleren Schulabschluss von Dezember 2003 folgendermaßen formuliert: Schülerinnen und Schüler müssen als allgemeine mathematische Kompetenzen lernen, „mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umzugehen. Dazu gehört:

[1] Schoenfeld/Arcavi (1988), S. 420.

K. Schiffer, *Probleme beim Übergang von Arithmetik zu Algebra*, Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-27777-2_1

- mit Variablen, Termen, Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen arbeiten,
- symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt,
- Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen,
- mathematische Werkzeuge (wie Formelsammlungen, Taschenrechner, Software) sinnvoll und verständig einsetzen."[2]

Wie in verschiedenen empirischen Untersuchungen festgestellt wurde, beziehen sich die Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler mit algebraischem Wissen besonders auf die ersten beiden Punkte der geforderten allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Ihre Probleme lassen sich unterteilen in Probleme beim Arbeiten mit Variablen und diejenigen Probleme, welche beim Übersetzen von natürlicher Sprache in symbolische, formale Sprache und umgekehrt auftreten.

Herscovics und Linchevski führten 1994 eine Interviewstudie mit 22 Schülerinnen und Schülern der 7. Klasse durch. Die Schülerinnen und Schüler sollten unbekannte Gleichungen mit einer Variablen lösen. Das Ergebnis zeigte, dass die Schülerinnen und Schüler in der Lage waren, die Aufgaben größtenteils zu lösen, jedoch zu keiner Zeit Belege dafür ersichtlich waren, dass mit den Unbekannten operiert wurde. Herscovics und Linchevski folgerten daraus, dass die Schülerinnen und Schüler die Gleichungen lösten, indem sie „um die Unbekannte herum arbeiteten“. Sie sehen die Grenze zwischen Arithmetik und Algebra daher als einen ,,cognitive gap" an, worin sie die Unfähigkeit der Schülerinnen und Schüler verstehen, spontan mit Unbekannten Operationen auszuführen.[3] In einer anderen Interviewstudie zur Auffassung von Variablen bei Lernenden kommen Sfard und Linchewski zu einem ähnlichen Resultat. Die Schülerinnen und Schüler fassten die algebraischen Ausdrücke als Prozesse anstelle von Objekten auf, wodurch sie nicht in der Lage waren, mit diesen zu operieren. Das Auffassen eines Inhaltes oder Begriffes als Objekt des mathematischen Gebietes ist für Sfard und Linchevski die notwendige Voraussetzung, um mit diesen mathematisch arbeiten zu können. Besonders der Umgang mit Variablen als gegebene Unbekannte stellte für die Schülerinnen und Schülern eine Herausforderung dar. Sfard und Linchewski bemerken dazu: „When some of the letters play the role of parameters, the final result would have to be presented by means of a formula and not a number. This must have seen unacceptable to those for whom an algebraic expression was still only a process."[4] Weitere empirische Studien, wie Sfard (1987) und Harper (1987) zeigen, dass Lernende trotz der Kenntnis von Variablen beim Lösen von Aufgaben oft die rhetorischen Lösungswege vorziehen, bzw. die Aussagen nur verbal richtig zuordnen können.

Algebra ist daher kein reines Rechnen mit Buchstaben anstelle von Zahlen und somit auch keine bloße Verallgemeinerung der Arithmetik. Dies wird auch dadurch deutlich, dass beim Übergang von Arithmetik zur Algebra die Symbole und Schreibweisen eine Bedeutungsveränderung erfahren. Malle machte darauf aufmerksam, dass die Operationszeichen in der Algebra im Gegensatz zu der Arithmetik nicht notwendig eine Aufforderung zum Handeln an den Lernenden darstellen, sondern diese auch für den Teil eines Namens

[2] KMK (2003), S. 8f.
[3] Vgl. Herscovics/Linchevski (1994).
[4] Vgl. Sfard/Linchevski (1994).

stehen können, zum Beispiel in den Ausdrücken $\sqrt{2}$ oder $x + 3$. Ebenso verändert sich die Bedeutung des Gleichheitszeichens beim Übergang von Arithmetik zur Algebra. Das Gleichheitszeichen hat in der Arithmetik die Bedeutung eines Zuweisungszeichens: es weist einer Aufgabe ein Ergebnis zu. Diese Bedeutung wird in der Algebra durch die Vorstellung eines Vergleichszeichens ersetzt. Neben der Bedeutungsveränderung der Symbole treten auch bei der Konkatenation, d.h. Hintereinanderstellung von Symbolen, Veränderungen bei der Einführung der Algebra auf. In der Arithmetik wird die Konkatenation stets als implizite Addition verstanden, wohingegen sie in der Algebra entweder als implizite Multiplikation oder als Kombination aus diesen aufgefasst wird.[5]

In einer Interviewstudie untersuchte Fischer die Variablenauffassung bei Schülerinnen und Schülern und kam zu dem Schluss, dass die unterschiedlichen Zahlauffassungen von einer bestimmten Zahl, einer bestimmten Zahl als Baustein, einer bestimmte Zahl als Stellvertreter für beliebige Zahlen bis hin zu einer unbestimmten Zahl in den verschiedenen Darstellungen verbal, geometrisch und formal auftreten können.[6] Wellmann hingegen unterteilt die Fehler in der Schulalgebra nach syntaktischen und semantischen Fehlern. Dabei sind unter syntaktischen Fehlern die Fehler bei der Informationsaufnahme und Informationsverarbeitung, sowie beim Aufruf und Anwendung von Schemata, wie $a^m \cdot a^n = a^{mn}$ oder $(a^2+b^3)^2 = a^4+b^6$, zu verstehen. Semantische Fehler umfassen hingegen die Fehler in der inkorrekten Beziehung zwischen dem Kalkül und der Realität oder Fehler beim Interpretieren und Aufstellen von Formeln sowie Interpretieren von Termen. Die semantischen Fehler beziehen sich damit auf Probleme der Lernenden beim Verständnis der zugrunde liegenden Konzepte und Begriffe der Schulalgebra. Sie umfassen auch alle Fehler bei der Übersetzung der natürlichen Sprache in formal symbolische Sprache und umgekehrt.

Malle beschrieb 1986 ein Interview mit einer Akademikerin, in welcher diese den Sachverhalt „An einer Universität sind P Professoren und S Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten." in einer Gleichung zwischen S und P ausdrücken sollte.[7] Ihre Antwort $6S = P$ und das anschließende Gespräch machen deutlich, dass die Akademikerin die Operation mit der Umkehroperation vertauscht. Dieser typischerweise auftretende Fehler[8] wird von Malle als Umkehrfehler bezeichnet. Im Laufe des Interviews lassen sich neben dem Umkehrfehler noch weitere Probleme bei dem Umgang mit Variablen und Formeln identifizieren. Die Probleme der Akademikerin lassen sich in zwei Kategorien aufteilen. Zum einen in Probleme bei der Übersetzung eines Sachverhalts (in natürlicher Sprache) in eine Gleichung (in formal symbolischer Sprache). Den Satz „Auf einen Professor kommen 6 Studenten" übersetzt sie mit $P = 6S$. Eine mögliche Erklärung für diesen Umkehrfehler ist, dass sie P als Abkürzung für Professor und S als Abkürzung für Student und das Gleichheitszeichen für den sprachlichen Ausdruck „auf ... kommen" verwendet. Zum anderen in Probleme beim Verständnis des Konzepts der Variablen und des Arbeiten mit dieser. So formuliert die Akademikerin innerhalb des Interviews: „$P + 6S = P + S$ [...] Die Professoren und die auf jeden Professor fallenden Studenten ergeben zusammen alle Professoren und Studenten."[9] In dieser Formel werden die Buchstaben P und S jeweils auf zweifache Weise verwendet. Auf der rechten Seite der Gleichung steht P für die Anzahl

[5]Vgl. Malle (1993).
[6]Vgl. Fischer (2009).
[7]Vgl. Malle (1986a), S. 93ff.
[8]Vgl hierzu auch Malle (1986b), Oldenburg/Henz (2015) und Christianson et al. (2012).
[9]Malle (1986a), S. 1.

der Professoren und auf der linken Seite der Gleichung ist P die Abkürzung für Professor. Ebenso wird der Buchstabe S in doppelter Bedeutung verwendet. Die Reihenfolge der Wörter innerhalb des Satzes wird für die Reihenfolge der Zeichen in der Formel übernommen. Dieser Ausschnitt aus dem Gespräch macht deutlich, dass die Akademikerin Probleme beim Verständnis des Begriffs Variable hat. Sie fasst die Buchstaben S und P neben der eigentlichen Verwendung als Unbekannte zeitgleich auch als Abkürzung auf. In diesem Interview zeigen sich bei ihr sowohl Probleme beim Arbeiten mit Variablen, als auch Probleme beim Übersetzen von natürlicher Sprache in symbolische, formale Sprache.

Die verschiedenen Studien und die dabei dargestellten Schwierigkeiten beim Erlernen der Algebra führen zu weiteren Fragestellungen: Welcher Art sind die Probleme der Schülerinnen und Schüler? Wie können diese Probleme beim Erlernen der Algebra erklärt werden? Und allgemeiner: Was macht das Verstehen mathematischer Begriffe aus? Wie entwickelt sich mathematisches Wissen?

Diese Arbeit stellt einen Beitrag zur mathematikdidaktischen Forschung zur Beschreibung und Erklärung der Entwicklung mathematischen Wissens dar. Die hier genutzten Methoden und Forschungsansätze stehen in der Tradition des historisch-mathematischen Ansatzes zur Rekonstruktion mathematischen Wissens, welche das mathematische Wissen von Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von empirischen Theorien beschreibt. Der historisch-mathematische Ansatz hat sich bereits für andere mathematische Disziplinen als fruchtbar erwiesen und wird beim Erlernen der Algebra eine neue Sichtweise auf mögliche Probleme für Schülerinnen und Schüler geben. So wurde der Ansatz bereits für die Beschreibung der Geometrie von Horst Struve, die Differenzialrechnung von Ingo Witzke, für die normative Wahrscheinlichkeitsrechnung von Hans Joachim Burscheid und Horst Struve, sowie des Zahlbegriffserwerbs von Simeon Schlicht erfolgreich verwendet.[10]

Um den zuvor gestellten Fragen nachzugehen, wird in dieser Arbeit durch den historisch-mathematischen Ansatz ein neuer Blickwinkel auf die Probleme der Schülerinnen und Schüler eingenommen. Die Herangehensweise lässt sich in zwei inhaltliche Abschnitte unterteilen.

Im ersten Abschnitt wird in einer Analyse die historische Entwicklung der Algebra und der algebraischen Symbolsprache untersucht. Die historische Betrachtung wird im Sinne des genetischen Prinzips genutzt, um die Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler beim Erlernen der Algebra zu verstehen und zu erklären. Der Schwerpunkt der historischen Betrachtung liegt zum einen auf der Verwendung und dem Umgang mit Variablen, zum anderen auf den inhaltlichen Fragestellungen bei der Entwicklung der Algebra. Dabei weist die Untersuchung der Entwicklung des Begriffs der Variablen auf mögliche zugrunde liegende Hindernisse beim Erwerb des Verständnisses des Begriffs hin, und der semantische Kontext, anhand dessen sich die Algebra entwickelte, gibt Aufschluss über die Natur der algebraischen Objekte, sowie die ontologische Bindung der Algebra und somit über die vorhandene Auffassung der Algebra (Kapitel 3). Darauf aufbauend wird Eulers historisches Lehrbuch „Vollständige Anleitung zur Algebra” als paradigmatisches Beispiel für die Auffassung der Algebra in der historischen Entwicklung analysiert (Kapitel 3.2).

Im zweiten Abschnitt wird mittels einer Schulbuchanalyse betrachtet, wie die Algebra im heutigen Mathematikunterricht eingeführt wird. Die Grundlage der Untersuchung bilden die Schulbuchreihen „Elemente der Mathematik” und „Schnittpunkt”. In der Schulbuchanalyse wird die Auffassung von Algebra ermittelt, welche durch die Einführung der

[10] Vgl. hierzu Struve (1990), Witzke (2009), Burscheid/Struve (2010) und Schlicht (2016).

Begriffe, der Natur der Objekte und den Begründungen von mathematischen Aussagen in dem Schulbuch dargestellt wird, und welche die Schülerinnen und Schüler durch das Lernen mit diesen Schulbüchern erwerben (Kapitel 4). Das Ziel dieser Analyse ist es, auf mögliche Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim Erlernen der Algebra im Zusammenhang mit der erlernten Auffassung aufmerksam zu machen. Daher werden in den Schulbüchern bei der Einführung der Algebra insbesondere die Verwendung der Variablen und der Umgang mit Regeln und Gesetzen genauer untersucht.

Die Ergebnisse der vorgestellten historischen Analyse und der Schulbuchananlyse werden zum Abschluss miteinander verglichen und diskutiert (Kapitel 5).

2 Der theoretische Hintergrund

Wie im vorherigen Kapitel aufgezeigt, liegen die wesentlichen Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Zusammenhang mit Algebra im Umgang mit Variablen und dem Verständnis der Begrifflichkeiten. Die Schülerinnen und Schüler sind nicht in der Lage, spontan mit Unbekannten zu operieren, und auch nicht eine umgangssprachliche Situation in eine formale Sprache zu übersetzen und richtig zu interpretieren. Die angesprochenen Probleme der Schülerinnen und Schüler beim Erlernen der Algebra sind verbunden mit dem Verständnis des Konzepts der Variablen und dem Umgang mit symbolischen Ausdrücken. In dieser Arbeit soll durch die Auseinandersetzung mit dem Begriff der Variablen und den algebraischen Inhalten in ihrer historischen Entwicklung eine neue Sichtweise auf die Probleme der Schülerinnen und Schüler ermöglicht werden. Die Ontogenese des Begriffs der Variablen und der ontologische Status der Objekte in der jeweiligen Entwicklungsphase, und damit einhergehend die zugrunde liegende Auffassung von Algebra, dienen hier zur Einordnung der etwaigen Probleme bei dem Verständnis der Algebra.

Diese Arbeit stützt sich auf verschiedene didaktische Ansätze und Theorien zur Beschreibung und Analyse der Auffassung von Schülerinnen und Schülern und den Problemen beim Erlernen neuer mathematischer Konzepte. In diesem Kapitel werden die wesentlichen didaktischen Aspekte angesprochen, die für diese Arbeit als theoretische Grundlage dienen. Dabei wird kein vollständiger Überblick über den Forschungsstand gegeben, sondern diejenigen Theorien und Ansätze ausführlicher diskutiert, welche in der weiteren Arbeit von Bedeutung sein werden.

Der Begriff *Variable* ist der zentrale Begriff der elementaren Algebra. Das Verständnis von Variablen und der sichere Umgang mit algebraischen Ausdrücken wird als notwendige Voraussetzung für das erfolgreiche Erlernen von Algebra und damit der gesamten höheren Mathematik angesehen. Der Begriff *Variable* wird in der Fachmathematik und in der Schulmathematik in unterschiedlicher Bedeutung verwendet. In der Mathematikdidaktik wird der Begriff *Variable* daher hinsichtlich seiner Verwendung und des Umgangs mit diesem unterschieden. Im ersten Unterkapitel wird der Begriff *Variable* in der elementaren Algebra und damit einhergehend die verschiedenen Variablenaspekte dargestellt und diskutiert.

Die Auffassung von Mathematik der Schülerinnen und Schüler gibt Aufschluss darüber, welche Epistemologie sie mit der Mathematik verbinden. Der ontologische Status der Objekte und das Verständnis der Begriffe können daher auf mögliche Probleme und Hindernisse beim Erlernen der Mathematik hinweisen.

> „Belief systems are one's mathematical world view, the perspective with which one approaches mathematics and mathematical tasks. One's beliefs about mathematics can determine how one chooses to approach a problem, which techniques will be used or avoided, how long and how hard one will work on it, and so on. Beliefs establish the context within which resources, heuristics, and

K. Schiffer, *Probleme beim Übergang von Arithmetik zu Algebra*, Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-27777-2_2

control operate."[1]

Die Vorstellungen Einzelner von Mathematik gehen weit auseinander und sind jeweils abhängig von den Inhalten, den Objekten und dem Umgang mit diesen. Im zweiten Unterkapitel wird zunächst eine Übersicht über die Auffassungen von Mathematik im Laufe der historischen Entwicklung der Mathematik allgemein gegeben, bevor in dem folgenden Unterkapitel die Auffassungen von Schülerinnen und Schülern diskutiert werden.

Wie in der Einleitung bereits angesprochen zeigen die durchgeführten empirischen Studien, dass die Probleme der Schülerinnen und Schüler mit dem Erwerb des Verständnisses von Variablen verbunden sind. Diese Feststellung wirft nun die grundlegende Frage auf, wie überhaupt mathematische Inhalte und Begriffe erlernt werden oder anders ausgedrückt: Was macht das Verstehen mathematischer Begriffe aus? Innerhalb der Mathematikdidaktik gibt es verschiedene Theorien zur Beschreibung des Lernens allgemein und des Begriffserwerbs im Speziellen. In dem folgenden Unterkapitel werden die theoretischen Hintergründe zum Erlernen mathematischer Begriffe bzw. Begriffe überhaupt dargelegt. Dazu wird zunächst Bauersfelds didaktischer Ansatz der Subjektiven Erfahrungsbereiche für die Beschreibung und Charakterisierung von Lernen dargestellt. Im Anschluss wird der Begriff des epistemologischen Hindernisses, wie er von Sierpinska geprägt wurde, bezogen auf die Bedeutung innerhalb des Erwerbs von mathematischem Wissen erläutert und vertieft. Zum Abschluss wird Sfards „theory of reification" zum Erwerb eines mathematischen Begriffes vorgestellt.

2.1 Variablen in der elementaren Algebra

> „Algebraische Symbolsprache ist einerseits ein Mittel zum regelgeleiteten Umformen algebraischer Darstellungen und andererseits ein Mittel zur Beschreibung von Objekten. Als Mittel zum Umformen hilft sie, mathematische Aufgaben durch interpretationsfreies, regelgeleitetes Umformen zu bearbeiten. [...] Als Mittel zur Beschreibung von Objekten erlaubt algebraische Symbolsprache die Bezeichnung von Objekten, die ohne Symbolsprache nur schwer zugänglich wären."[2]

Fischer und Meyer sprechen in dem obigen Zitat den Nutzen der algebraischen Symbolsprache und hierdurch auch die Rolle der Algebra als Sprache innerhalb der Mathematik an. Algebra bildet die Grundlage für die Betrachtung und Beschreibung mathematischer Strukturen. Mit Hilfe von Variablen können allgemeine Gesetze aufgestellt, funktionale Abhängigkeiten beschrieben, sowie Gleichungen hergeleitet und untersucht werden. Somit liegt die Algebra fast allen mathematischen Tätigkeiten auf einer allgemein formalen Ebene zugrunde. Das Erlernen der Bedeutung und des korrekten Umgangs mit Variablen stellt die wesentliche Voraussetzung für das Verständnis der weiterführenden Mathematik dar.

In der Mathematik wird der Begriff Variable vielseitig verwendet. Schoenfeld und Arcavi haben 1988 in einem Aufsatz eine Liste mit verwendeten englischen Umschreibungen und Charakterisierungen für den Begriff Variable zusammengetragen. Sie kommen zu dem

[1] Schoenfeld (1985), S. 45.
[2] Fischer/Meyer (2013), S. 178.

Schluss, dass die Bedeutung des Begriffs Variable variable ist und in unterschiedlichen Kontexten unterschiedlich verwendet wird.[3] In der Schulmathematik wird der Begriff Variable heute klassischerweise synonym für Buchstabenvariable gebraucht. Die elementare Algebra wird dahingehend auch als „Buchstabenrechnung" bezeichnet. Historisch gesehen hat sich die Verwendung von Buchstaben für Unbekannte in einem langen Prozess entwickelt.[4] In den Anfängen der Algebra werden die Unbekannten noch rein verbal durch Wortvariablen ausgedrückt. Erst nach dem 16. Jahrhundert ist eine vollständige symbolische Darstellung von mathematischen Ausdrücken und somit der Mathematik möglich. Hiernach hat sich die algebraische Darstellung als sprachliches Mittel der Verallgemeinerung durchgesetzt. Variablen erlauben eine kontextfreie allgemeine Darstellung und somit ein einfaches regelgeleitetes Operieren.[5] Die Verwendung von Variablen hat dadurch auch zu der Entwicklung der Mathematik beigetragen.

Der Facettenreichtum des Begriffes Variable zeigt sich sowohl in dem unterschiedlichen Gebrauch von Buchstabenvariablen in der Mathematik, als auch in dem Umgang mit den Variablen. Diese beiden Betrachtungswinkel stellen die Grundlage für differenzierte Klassifizierungen des Begriffs Variable dar. Freudenthal unterscheidet drei Verwendungszwecke von Buchstabenvariablen: die Variable als Unbekannte, die Variable als Unbestimmte und die Variable als Veränderliche. Das Unterscheidungsmerkmal zeigt sich bei Freudenthal in der Bezeichnung für die Variable. Wenn eine Variable in einer Gleichung auftaucht und dort für eine unbekannte Größe oder Zahl steht, wird die Variable als Unbekannte bezeichnet. Wird die Variable hingegen in einer allgemeinen mathematischen Aussage verwendet, dann ist sie unbestimmt. In der allgemeinen mathematischen Aussage kann die Variable alle Werte eines bestimmten Wertebereichs annehmen. Der dritte Verwendungszweck kommt den Buchstabenvariablen in der Beschreibung von funktionellen Zusammenhängen zu. Die Variable erfüllt in einer Funktion, neben dem Gebrauch für die allgemeine Beschreibung, die Aufgabe einer veränderlichen Größe. Das herausstechende Merkmal der Variablen ist hier die dynamische Eigenschaft.[6] Ebenso wie Freudenthal haben auch Mathematikdidaktiker eine Einteilung des Begriffs Variable entsprechend des Gebrauchs unternommen. Malle nimmt eine inhaltlich ähnliche Einteilung wie Freudenthal vor. Er unterteilt die Variable hinsichtlich des Zahlbereichs, welche die Variable repräsentiert. Eine Variable kann eine beliebige, aber feste einzelne Zahl aus einem Bereich repräsentieren (Einzelzahlaspekt), oder aber sie repräsentiert jede Zahl aus dem entsprechenden Bereich (Bereichsaspekt). Den Bereichsaspekt untergliedert Malle erneut in den Simultansapekt, in dem eine Variable gleichzeitig alle Zahlen des Bereiches vertritt, und den Veränderlichenaspekt, in welchem die Zahlen des Bereichs in einer zeitlichen Abfolge von der Variablen durchlaufen werden.[7] Die einzelnen Variablenauffassungen von Malle wurden in einer inhaltlichen Auseinandersetzung zu dem Sprachgebrauch in der elementaren Algebra den drei Verwendungen von Variablen von Freudenthal zugeordnet.[8] Demnach

[3]Vgl. Schoenfeld/Arcavi (1988).
[4]Vgl. Kapitel 3.
[5]Die Darstellung eines mathematischen Ausdruckes mit Hilfe von Variablen impliziert alleine nicht eine kontextfreie Darstellung. Jedoch ermöglicht die Verwendung von Variablen erst die Loslösung der Aussage von einem empirischen Bezug.
[6]Vgl. Freudenthal (1973), S. 262 und 557.
[7]Vgl. Malle (1993), S. 80.
[8]Vgl. Siebel (2005) Eine Auseinandersetzung mit den unterschiedlichen Variablenauffassungen findet sich bei Akinwunmi (2012).