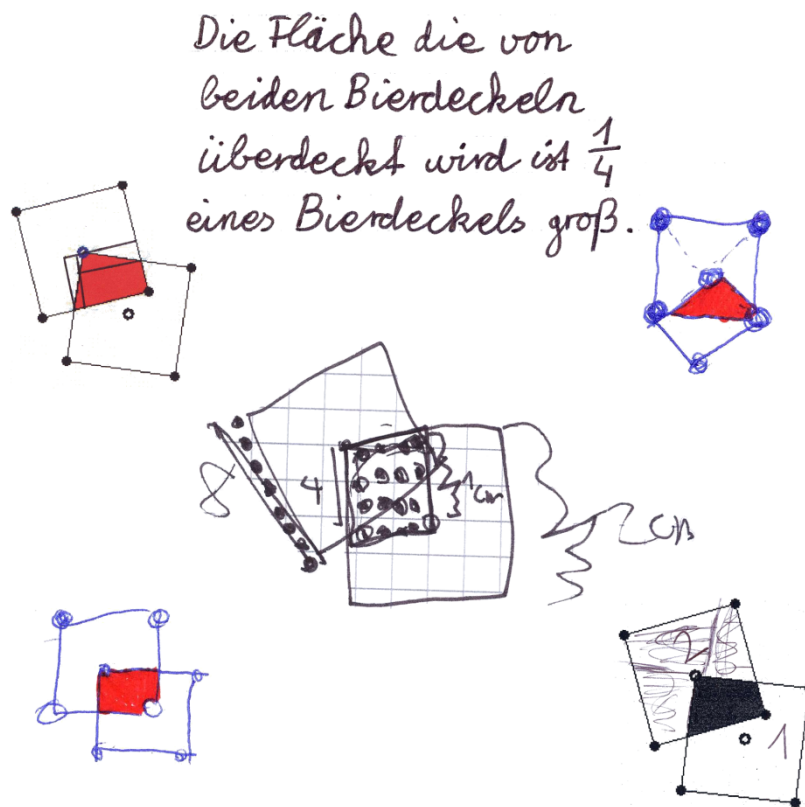


Benjamin Rott

2

MATHEMATISCHES PROBLEMLÖSEN

ERGEBNISSE EINER EMPIRISCHEN STUDIE



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Ars Inveniendi et Dejudicandi

Herausgegeben von
Torsten Fritzlar, Frank Heinrich
und Bernd Zimmermann

Band 2

BENJAMIN ROTT

**MATHEMATISCHES PROBLEMLÖSEN
ERGEBNISSE EINER EMPIRISCHEN STUDIE**

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

**Bibliografische Information der Deutschen
Bibliothek**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliogra-
fie; detaillierte Informationen sind im Internet
über <http://dnb.ddb.de> abrufbar

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf
ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in
irgendeiner Form reproduziert oder unter Ver-
wendung elektronischer Systeme verarbeitet, ver-
vielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und
Medien, Münster 2015
ISBN 978-3-942197-67-0

Mathematisches Problemlösen – Ergebnisse einer empirischen Studie

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Assessor des Lehramts an Gymnasien **Benjamin Rott**

geboren am 05. Juli 1980 in Oldenburg (Oldb)

2013

Eingereicht am:	Mi, 04.07.2012
Referent:	Prof. Dr. Thomas Gawlick Leibniz Universität Hannover
Korreferent:	Prof. Dr. Frank Heinrich Technische Universität Braunschweig
Tag der Promotion:	Fr, 23.11.2012

Danksagung

Diese Arbeit ist als Dissertation an der Leibniz Universität Hannover entstanden – in einem Prozess, der sich insgesamt über ziemlich genau vier Jahre hingezogen hat. Für den erfolgreichen Abschluss dieses Projektes möchte ich mehreren Personen danken:

An erster Stelle danke ich meinem Doktorvater, Prof. Dr. Thomas Gawlick, dafür, dass er mir das Schreiben dieser Arbeit ermöglicht und meine Forschung mit scharfem und kritischem Blick begleitet hat.

Mein Dank gebührt ebenso meinem Zweitgutachter, Prof. Dr. Frank Heinrich, der mit Zuspruch und vielen guten (Literatur-) Hinweisen meine Arbeit stets verbessern konnte.

Herrn Prof. Dr. Stefan Weber danke ich für die sehr angenehm gestaltete Verteidigung, deren Vorsitz der freundlicherweise übernommen hat.

Vom Herausgebergremium der Reihe, in der ich publizieren darf, möchte ich noch einmal Herrn Heinrich und ganz besonders Herrn Prof. Dr. Bernd Zimmermann meinen Dank dafür aussprechen, dass sie meine Arbeit sehr intensiv gelesen und kommentiert haben.

Ganz herzlich danken möchte ich meinen Kollegen im IDMP, allen voran Diemut Lange und Dirk Brockmann-Behnsen, ohne die die Arbeit im Institut – u.a. wegen der gemeinsamen Mittagessen – nur halb so nett gewesen wäre.

Nicht vergessen werden sollen auch die fleißigen Korrekturleser (in der Reihenfolge ihrer Rückmeldungen): Helena Struckmeyer, Benjamin Laß, Andreas Rott, Daniel Giere, Ulrike Schiller, Diemut Lange und Daniela Rott.

Des Weiteren danke ich den SchülerInnen und Hilfskräften, die stets motiviert an unserer MALU-Förderung teilgenommen bzw. mitgearbeitet haben, und meine empirischen Untersuchungen damit erst ermöglicht haben.

Und schließlich – last but not least – möchte ich ganz allgemein meinen Freunden und meiner Familie danken, für die gemeinsame Zeit, während der ich (zu viele Nächte und Wochenenden) an meinem Promotionsprojekt saß (und mich zu selten gemeldet habe)...

Hannover im Januar 2013

Kurzzusammenfassung

In der vorliegenden, explorativen Studie geht es um *mathematisches Problemlösen* im Allgemeinen und um die Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern im Speziellen.

Im Literaturteil erfolgt eine ausführliche Zusammenschau und Diskussion der psychologischen und mathematikdidaktischen Literatur zum Problemlösen. Die Analyse des Problembegriffs ergibt dabei die Notwendigkeit, die zugehörigen Bearbeitungsprozesse genauer in Augenschein zu nehmen. Im Anschluss werden der Ablauf von Problemlöseprozessen (insbesondere Phasen- und Stufenmodelle), Heurismen sowie Metakognition / Selbstregulation jeweils in einzelnen Kapiteln behandelt und Ergebnisse anderer Studien hierzu zusammengetragen.

Mit dem Aufbau der Studie beschäftigt sich der zweite Teil dieser Arbeit. Zunächst werden zu den drei oben genannten Bereichen – Ablauf von Problemlöseprozessen, Heurismen und Metakognition – Forschungsfragen aus der Literatur abgeleitet. Im Anschluss daran wird das durchgeführte Förderprogramm MALU („Mathe AG an der Leibniz Universität“) für Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien beschrieben, in dessen Rahmen die Daten für den empirischen Teil dieser Studie gesammelt wurden. Ausführlich werden die ausgewählten Aufgaben, deren zugehörige Bearbeitungsprozesse ausgewertet werden, mathematisch und stoffdidaktisch analysiert.

Es folgt ein umfangreiches Kapitel, das die Adaption bzw. Entwicklung und Bereitstellung von Forschungsmethoden zur Untersuchung von Problembearbeitungsprozessen enthält. Es werden Verfahren zur Analyse des Ablaufs von Problemlöseprozessen, zur Identifikation heuristischer Elemente und zur Kodierung metakognitiver Aktivitäten beschrieben.

Der dritte Teil der Arbeit enthält die Ergebnisse, die mit den zuvor beschriebenen Methoden anhand des MALU-Datenmaterials gewonnen wurden. Zum Teil konnten Erkenntnisse zum Problemlösen, die für ältere SchülerInnen und Studierende bekannt waren, auf SchülerInnen der fünften Jahrgangsstufe übertragen werden; zum Teil wurden die behandelten Fragen in dieser Form noch nicht in der Literatur diskutiert.

Mithilfe einer Einteilung der Problemlöseprozesse in Episoden nach Schoenfeld (1985, Kap. 9) wird die große Bedeutung der Prozessregulation ersichtlich – Prozesse, in denen eine adäquate Steuerung des Ablaufs fehlt, fallen signifikant schlechter aus als regulierte Prozesse. Zudem werden die bewussten und teilweise unbewussten Vorgehensweisen der Fünftklässler herausgearbeitet und anhand der Literatur zu Heurismen diskutiert. Es zeigt sich, dass bereits Kinder im Alter von 10 – 12 Jahren eine Fülle unterschiedlicher heuristischer Verfahren verwenden und dass der Heurismeneinsatz positiv mit dem Problemlöseerfolg korreliert ist.

Unser Wissen über das Problemlösen im Allgemeinen wird durch eine Diskussion über die Unterscheidung von Routine- und Problemlöseprozessen erweitert, in der Kriterien zur Unterscheidung dieser Prozesstypen vorgeschlagen werden. Auch wird ein empirisches Modell zur Beschreibung von Problemlöseprozessen vorgestellt.

Die Arbeit endet mit einer Diskussion der Ergebnisse, Vorschlägen für die Umsetzung eines Teils dieser Ergebnisse in (Schul-) Trainingsprogrammen für das Problemlösenlernen sowie einem Ausblick auf Fragestellungen, die sich anschließen könnten.

Schlagworte: Mathematisches Problemlösen, Heurismen, Metakognition

Abstract

This explorative study deals with *mathematical problem-solving* in general and with the problem-solving processes of fifth graders in particular.

The literature part contains a detailed overview and discussion of the psychological and mathematic-didactical literature regarding problem-solving. The analysis of the term “problem” shows the need for taking a close look at the associated processes. Afterwards the text deals with the courses of problem-solving processes (especially phase and stage models), heuristics and metacognition / self-regulation in individual chapters and collects results from studies regarding these topics.

The second part of this thesis is dedicated to the study’s structure. First of all, research questions are derived from the literature concerning the three topics mentioned above – phases of problem-solving processes, heuristics, and metacognition. Following that, the support program MALU (“**Mathe AG an der Leibniz Universität**” which means “Mathematics Working Group at Leibniz University”) for fifth graders from secondary schools in Hanover is described, which was used to collect the data for the empirical part of this study. The tasks that were selected for examining the associated processes are thoroughly analyzed from mathematical and didactical perspectives.

This is followed by an extensive chapter which contains the adaption, development and provision of methods for research on problem-solving processes. Methods are described for analyzing phases of processes, for the identification of heuristics, and for the coding of metacognitive activities.

The third part of this thesis contains the results that were obtained with the above mentioned methods based on the MALU data. On the one hand, research results valid for older school and university students could be transferred to students of grade five; on the other hand, questions were dealt with that have not been discussed in the literature yet.

The great importance of process regulation becomes evident due to parsing problem-solving processes into episodes using a method originally developed by Schoenfeld (1985, ch. 9) – processes that lack an adequate regulation have significantly worse results than regulated processes. Furthermore conscious and unconscious strategic behavior of the fifth graders is elaborated and discussed in the light of the literature regarding heuristics. The results show that even children at the age of 10 – 12 use a multitude of different heuristic techniques and that the use of these heuristics is positively correlated with success in solving the problems.

Our knowledge regarding problem-solving in general is expanded by a debate on the distinction of routine and problem-solving processes in which criteria are suggested to help distinguishing those two types of processes. Also an empirical model for describing the courses of problem-solving processes is presented.

The thesis closes with a discussion of the results presented, suggestions for the implementation of a part of these results in training programs for the learning of problem-solving (in schools) as well as prospects of possible questions for future research.

Keywords: Mathematical Problem Solving, Heuristics, Metacognition

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
I. Literaturstudium	3
1. Einleitung	5
1.1. Überblick über die Problemlöseforschung	5
1.1.1. Überblick über die Problemlöseforschung in der Psychologie . . .	6
1.1.2. Überblick über die Problemlöseforschung in der Mathematik und ihrer Didaktik	6
1.2. Relevanz des Problemlösens (für den Mathematikunterricht)	10
1.3. Problemlöseforschung – der Ansatz dieser Arbeit	11
1.4. Aufbau der Arbeit	14
1.4.1. Teil I. Literaturstudium	15
1.4.2. Teil II. Studie	16
1.4.3. Teil III. Ergebnisse	16
2. Was ist ein Problem?	19
2.1. Der Begriff „Problem“ in der Psychologie	19
2.1.1. Die Problembarriere	22
2.2. Der Begriff „Problem“ in der Mathematikdidaktik	24
2.2.1. Exkurs – Routine, Problem und dazwischen?	26
2.2.2. Abgrenzung des Begriffs „Problem“ zu verwandten Begriffen in der Mathematikdidaktik	26
2.3. Zusammenfassung und weiterführende Überlegungen	31
3. Problembearbeitungsprozesse	33
3.1. Theoretische Analyse von Problemlöse- und Routineprozessen	34
3.1.1. Exkurs – Problemlöseprozesse nach Piaget	37
3.2. Ablauf von Problembearbeitungsprozessen in der Psychologie	40
3.2.1. Psychologische Stufenmodelle des Problemlösens	40
3.2.2. Moderne psychologische Theorien des Problemlösens	43
3.3. Ablauf von Problembearbeitungsprozessen in der Mathematik und ihrer Didaktik	45

3.3.1.	Der Problembearbeitungsprozess aus der Sicht ausgewählter Mathematiker	46
3.3.2.	Der Problembearbeitungsprozess bei Pólya	49
3.3.3.	Der Problembearbeitungsprozess aus der Sicht ausgewählter Mathematikdidaktiker	53
3.4.	Zusammenfassung und weiterführende Überlegungen	59
4.	Heurismen	64
4.1.	Kreativität und Geistige Beweglichkeit	64
4.2.	Heurismen des Problemlösens	68
4.2.1.	Kategorisierung von Heurismen	70
4.2.2.	Einordnung in den Problemlöseprozess	75
4.2.3.	Verwendung in Problemlösesituationen	80
4.3.	Zusammenfassung und weiterführende Überlegungen	81
5.	Metakognition und Selbstregulation	83
5.1.	Metakognition – eine Begriffsbestimmung	83
5.1.1.	Überblick über die Metakognitionsforschung	85
5.2.	Selbstregulation	88
5.2.1.	Selbstregulation als Teilkonzept der Metakognition	89
5.2.2.	Metakognition im Problemlöseprozess	91
5.2.3.	Selbstregulation und Heurismeneinsatz	93
5.2.4.	Entwicklungspsychologische Überlegungen	95
5.3.	Zusammenfassung und weiterführende Überlegungen	96
6.	Forschungsergebnisse	97
6.1.	Klassiker der Problemlöseforschung	97
6.2.	Neuere Studien zum Problemlösen	103
6.3.	Forschungsergebnisse und Studien mit starkem Bezug zur Selbstregulation	108
6.4.	Zusammenfassung und weiterführende Überlegungen	113
II.	Studie	115
7.	Forschungsfragen und -ziele	117
7.1.	Fragen zum Prozess des Problemlösens	117
7.2.	Fragen zum Einsatz heuristischer Elemente	119
7.3.	Fragen zum Einsatz metakognitiver und selbstregulatorischer Aktivitäten	121
7.4.	Zusammenfassung und weiterführende Überlegungen	121
8.	Die Datenbasis – das Projekt MALU	123
8.1.	Das Förder- und Forschungsprojekt MALU	123
8.1.1.	Gestaltung der AG-Nachmittage	124
8.1.2.	Auswahl der AG-Teilnehmer	125

8.1.3.	Auswahl der MALU-Aufgaben	127
8.1.4.	Datenerhebung und Auswertung	128
8.2.	Weitere Datenquellen	130
8.3.	Methodische Entscheidungen	131
9.	Stoffdidaktische Aufgabenanalyse	133
9.1.	Vorgehensweise bei der stoffdidaktischen Analyse	133
9.2.	Analyse der ausgewählten Aufgaben	136
9.2.1.	Problem – Zwei Bierdeckel	137
9.2.2.	Problem – Marcos Zahlenreihe	144
9.2.3.	Problem – Schach-Quadrate	149
9.2.4.	Problem – Sieben Tore	153
9.2.5.	Routineaufgabe – Superauto	157
10.	Auswertungsmethodik	160
10.1.	Verfahren zur Auswertung von Prozessen	160
10.1.1.	Sampling-Verfahren zur Analyse von Videos	161
10.1.2.	Qualitative Inhaltsanalyse	162
10.1.3.	Gütekriterien	166
10.2.	Statistische Verfahren	169
10.2.1.	Kovarianz und Korrelation	169
10.2.2.	Der Chi-Quadrat-Test	173
10.3.	Bewertung der Arbeitsergebnisse	179
10.3.1.	Maßstäbe für die Bewertung	179
10.3.2.	Möglichkeiten der Produktbewertung	180
10.3.3.	Das vierstufige Kategoriensystem	184
10.4.	Das Verfahren zur Analyse von Problemlöseprozessen von Schoenfeld	186
10.4.1.	Genese des Schoenfeld-Verfahrens	186
10.4.2.	Beschreibung des Verfahrens	187
10.4.3.	Kritik am Schoenfeld-Verfahren	189
10.4.4.	Adaption des Verfahrens	196
10.4.5.	Gründe für die Auswahl dieses Verfahrens	199
10.5.	Heurismen	200
10.5.1.	Identifikation von Heurismen	200
10.5.2.	Entwicklung der Heurismen-Kodierung	204
10.6.	Metakognition und Selbstregulation	210
10.6.1.	Assessments nach Schoenfeld (1985)	210
10.6.2.	Das Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten von Cohors-Fresenborg & Kaune	216
10.7.	Bestimmung der Interrater-Reliabilität der verwendeten Verfahren	223
10.7.1.	Bestimmung der IRR bei der Bewertung der Arbeitsergebnisse	223
10.7.2.	Bestimmung der IRR bei der Einteilung in Episoden	227
10.7.3.	Bestimmung der IRR bei der Heurismen-Kodierung	234
10.7.4.	Bestimmung der IRR bei der Kodierung metakognitiver Aktivitäten	236

III. Ergebnisse

237

11. Studium der Produkte der Problembearbeitungen	239
11.1. Die Arbeitsergebnisse der ausgewählten Aufgaben	239
11.1.1. Die Arbeitsergebnisse der „Bierdeckel“-Aufgabe	240
11.1.2. Die Arbeitsergebnisse der „Zahlenreihe“-Aufgabe	248
11.1.3. Die Arbeitsergebnisse der „Schach Quadrate“-Aufgabe	255
11.1.4. Die Arbeitsergebnisse der „Sieben Tore“-Aufgabe	259
11.1.5. Die Arbeitsergebnisse der „Superauto“-Aufgabe	263
11.2. Übersicht über die Arbeitsergebnisse	264
11.3. Zusammenhang von Bearbeitungserfolg und Bearbeitungsdauer	265
12. Studium der Problembearbeitungsprozesse	269
12.1. Ausführliche Erläuterung der Schoenfeld-Einteilung	269
12.1.1. 20081211 – Jonatan & Vincent – Bierdeckel	270
12.1.2. 20091125 – Hannelore & Jana – Schach-Quadrate	273
12.2. Abstraktionsschritte bei der Betrachtung der Prozesse	274
12.3. Problemlöse- und Routineprozesse	276
12.3.1. Entscheidungsmöglichkeiten mithilfe der Schoenfeld-Kodierung . .	278
12.3.2. Empirische Untersuchung: „Problem oder Routineaufgabe?“	283
12.4. Modelle des Problemlösens	293
12.4.1. <i>Exploration</i> und <i>Planning</i>	295
12.4.2. Lineare und zyklische Prozesse	296
12.5. Verhalten im Problemlöseprozess und Erfolg	299
12.5.1. Wild Goose Chase	300
12.5.2. Prozesstypen und Erfolg	302
12.5.3. <i>Analysis</i> und <i>Verification</i> im Prozess	308
13. Studium des Heurismeneinsatzes	314
13.1. Anmerkung – Grenzen der Kodierung	314
13.2. Ausführliche Erläuterung der Heurismen-Kodierung	315
13.2.1. 20081211 – Jonatan & Vincent – Bierdeckel	316
13.2.2. 20100113 – Ekatrinnna & Anja – Zahlenreihe	318
13.3. Identifikation von Heurismen	321
13.3.1. Heurismen bei der Bearbeitung der „Bierdeckel“-Aufgabe	322
13.3.2. Heurismen bei der Bearbeitung der „Zahlenreihen“-Aufgabe	328
13.3.3. Heurismen bei der Bearbeitung der „Schach-Quadrate“-Aufgabe .	333
13.3.4. Heurismen bei der Bearbeitung der „Sieben Tore“-Aufgabe	337
13.3.5. Heurismen bei der Bearbeitung der „Superauto“-Aufgabe	341
13.3.6. Zusammenfassung und weiterführende Überlegungen	342
13.4. Heurismen im Prozess – explorative statistische Analysen	343
13.4.1. Heurismeneinsatz und Bearbeitungserfolg	343
13.4.2. Zusammenhang von Heurismeneinsatz und Bearbeitungsdauer . .	349
13.4.3. Art der Heurismen und Problemlöseerfolg	350

13.4.4. Heurismen in „Routineprozessen“	352
13.4.5. Heurismen im Prozessverlauf	353
13.5. Unterschiede: Produkt- und Prozesskodierung von Heurismen	355
14. Studium der metakognitiven und selbstregulatorischen Aktivitäten	359
14.1. Anmerkung – Grenzen der Kodierung	360
14.2. Ausführliche Erläuterung der Kodierung metakognitiver Aktivitäten . . .	360
14.2.1. 20081211 – Jonatan & Vincent – Bierdeckel	361
14.2.2. 20091125 – Lucy & Ekatrinna – Schach-Quadrate	361
14.3. Metakognition im Prozessverlauf	375
15. Gemeinsame Betrachtungen	379
15.1. Zwei Bierdeckel	379
15.2. Marcos Zahlenreihe	380
15.2.1. 20090317 – Ann-Marie & Saskia – Zahlenreihe	380
15.2.2. 20100113 – Jana & Ella – Zahlenreihe	381
15.2.3. 20100113 – Ekatrinna & Anja – Zahlenreihe	382
15.2.4. 20100113 – Birk & Janus – Zahlenreihe	382
15.2.5. 20100113 – Marcel & Timm – Zahlenreihe	383
15.2.6. „Zahlenreihe“ Zusammenfassung	383
15.3. Schach-Quadrate	384
15.3.1. „Schach-Quadrate“ Zusammenfassung	386
15.4. Sieben Tore	386
15.4.1. 20090129 – Hiro-Fei (& Marvin) – Sieben Tore	387
15.4.2. 20090129 – (Lily &) Nadja – Sieben Tore	388
15.4.3. 20090526 – Ariel (& Ann-Marie) – Sieben Tore	388
15.4.4. „Sieben Tore“ Zusammenfassung	390
15.5. Zusammenfassung und weiterführende Überlegungen	390
16. Zusammenfassung und Diskussion	392
16.1. Zusammenfassung	392
16.1.1. Teil I. Literaturstudium	392
16.1.2. Teil II. Studie	394
16.1.3. Teil III. Ergebnisse	396
16.2. Ausblick	399
16.2.1. Problemlösenlernen im Mathematikunterricht	399
16.2.2. Mögliche Fragestellungen für Anschlussarbeiten	405
Schlusswort	409
Tabellenverzeichnis	411
Abbildungsverzeichnis	414
Literaturverzeichnis	417

Vorwort

„Anyway, the use of and the emphasis on *processes* is a *didactical principle*. Indeed, didactics itself is concerned with processes. Most educational research, however, and almost all of it that is based on or related to empirical evidence, focuses on states (or time sequences of states when education is to be viewed as development). States are *products* of previous *processes*. As a matter of fact, *products* of learning are more easily accessible to observation and analysis than are learning *processes* which, on the one hand, explains why researchers prefer to deal with states (or sequences of states), and on the other hand why much of this educational research is didactically pointless.“ (Freudenthal 1991, S. 87)

Sehr deutlich stellt Freudenthal in seinen „China Lectures“ die Bedeutung der Untersuchung von *Prozessen* – im Gegensatz zur ausschließlichen Betrachtung von *Produkten* (hier auch als Momentaufnahmen verstanden) – heraus. Dieses Plädoyer möchte ich in der vorliegenden Arbeit beachten, in der es um den Themenkreis *Problemlösen* geht. Konkret werden die Problembearbeitungen von SchülerInnen zu Beginn der Sekundarstufe I untersucht.

Es wird den Fragen nachgegangen, wie sich Problembearbeitungsprozesse in ihrem Ablauf sinnvoll beschreiben lassen und was sie von Routineprozessen unterscheidet; besonderer Bezug wird dabei auf das vierstufige Schema von Pólya genommen. Diese Betrachtungen sowie die Beschreibungen heuristischer Elemente und metakognitiver Aktivitäten in diesen Prozessen sollen auch dabei helfen, Erfolg und Misserfolg der Problemlösebemühungen zu erklären.

Diese drei Bereiche, Prozessverlauf, Heurismen und Metakognition, ziehen sich durch alle Teile dieser Arbeit: das Literaturstudium, die Methodik und den Ergebnisteil. Das Bereitstellen von Verfahren zur Analyse von Problemlöseprozessen unter diesen drei Gesichtspunkten – teilweise durch Adaption von Methoden, teilweise durch ihre Entwicklung – stellt einen wichtigen Teil der vorliegenden Studie dar.

Generell handelt es sich beim Problemlösen um ein sehr komplexes und facettenreiches Thema. Ich hoffe, dass mir der Spagat zwischen einer Beachtung möglichst vieler und aussagekräftiger Aspekte auf der einen sowie einer konsistenten und nachvollziehbaren Studie auf der anderen Seite gelungen ist.

Teil I.

Literaturstudium

Dieser Teil der Arbeit bildet das theoretische Fundament der sich anschließenden Analysen. In den einzelnen Kapiteln wird zunächst der Begriff „Problem (-aufgabe)“ betrachtet und von „Routineaufgaben“ abgegrenzt, bevor die (psychologische und mathematikdidaktische) Literatur zu Problembearbeitungsprozessen referiert wird. Es folgen Auseinandersetzungen mit der Literatur zu Heurismen und zur Metakognition (bzw. Selbstregulation).

Auch wenn dies nicht immer ganz gelingt (bzw. gelingen kann), sind die Kapitel zu den „Problembearbeitungsprozessen“, den „Heurismen“ und der „Metakognition“ thematisch getrennt und unabhängig voneinander lesbar.

Abschließend werden die „Forschungsergebnisse“ ausgewählter empirischer Arbeiten zum Themenkreis „Problemlösen, Heurismen und Metakognition“ präsentiert, aus denen dann im zweiten Teil dieser Arbeit die Forschungsfragen abgeleitet werden.

1. Einleitung

Fast täglich begegnet man Situationen und Anforderungen bzw. *Aufgaben*¹, die – zumindest umgangssprachlich – als *Problem* bezeichnet werden. Dies kann zu den unterschiedlichsten Gegebenheiten geschehen, zum Beispiel beim Wechseln eines defekten Reifens oder bei Herausforderungen der Wissenschaft. Diese Alltagsrelevanz ist ein Grund, aus dem das Thema *Problemlösen* ein wichtiger Forschungsgegenstand der Psychologie ist (vgl. Wessells 1994, S. 338; Zimbardo & Gerrig 2004, S. 371). Aber nicht nur in dieser wissenschaftlichen Disziplin, sondern auch in anderen Gebieten, wie der Philosophie, Informatik oder Soziologie, spielt das Problemlösen eine wichtige Rolle (vgl. Schönpflug & Schönpflug 1997, S. 259); insbesondere in der Mathematik und ihrer Didaktik (vgl. Schoenfeld 1985).

In den nächsten Abschnitten geht es um einen kurzen Überblick über die Forschung zum Problemlösen und um die Frage, weshalb eine ausführliche Beschäftigung mit diesem Thema lohnend ist, bevor die verwendeten Begrifflichkeiten in den folgenden Kapiteln ausführlich geklärt werden.²

1.1. Überblick über die Problemlöseforschung

An dieser Stelle gebe ich einen knappen historischen Überblick über die Problemlöseforschung – zunächst für die Psychologie und anschließend für die Mathematik und ihre Didaktik. Eine solche Zusammenschau kann helfen, die im Verlaufe dieser Arbeit vorgestellten Theorien und Schlussfolgerungen in einen sinnvollen Zusammenhang zu setzen.

Es sei an dieser Stelle gleich vorweg genommen, dass diese beiden Forschungsdisziplinen zu großen Teilen unabhängig voneinander gearbeitet haben und arbeiten:

„Psychologists have long been interested in problem solving as a type of thinking. They have often sought to study it in its simplest forms, asking subjects to solve a series of related tasks of a specific type in order to observe regularities in their behavior. [...] Mathematics educators, looking at this research, complained that it offered them little help in their work because the problem material did not resemble problems considered in the school mathematics class. [...] the bulk of the

¹Der Begriff „Aufgabe“ wird in dieser Arbeit sehr allgemein und teilweise synonym zum Begriff „Problem“ verwendet, teilweise benutze ich auch die Bezeichnung „Problemaufgabe“ (vgl. Bruder 2000, S. 69, die Aufgaben als „Aufforderungen zum Lernhandeln“ definiert). Wenn dies im Kontext wichtig ist, unterscheide ich explizit zwischen „Problem-“ und „Routineaufgabe“.

²Ein Kommentar zu den Begriffen schon an dieser Stelle: Wenn hier von „Problemlösen“ gesprochen wird, dann ist damit stets auch „Problembearbeiten“ gemeint, da nicht nur „korrekte“ Ergebnisse der Arbeit an Problemen betrachtet werden sollen.

psychological literature on problem solving in the first half of the twentieth century dealt with puzzle problems of little mathematical interest. [...] The gulf between psychologists and mathematics educators – especially in the United States, but also in much of Western Europe – was wide and deep. [...] A large body of research literature was built up more or less independently in each field.“ (Kilpatrick & Radatz 1983, S. 151)

1.1.1. Überblick über die Problemlöseforschung in der Psychologie

Diese Zusammenfassung basiert im Wesentlichen auf Arbinger (1997, S. 3 ff.). Weitere – wesentlich ausführlichere – Darstellungen finden sich z.B. bei Funke (2003, S. 26 ff.), Hussy (1984) und Burchartz (2003, S. 8 ff.).

Die Geschichte der Psychologie des Problemlösens lässt sich grob in (bis dato) drei Phasen unterteilen:

1. Die Zeit zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts, in der mit der deutschen Gestaltpsychologie und deren Vertretern Wolfgang Köhler, Max Wertheimer und dessen Schüler Karl Duncker die Grundlagen der Problemlöseforschung gelegt wurden. Auch die ersten Stufenmodelle von Problemlöseprozessen von John Dewey und Graham Wallas gehören in diese Epoche.
2. Die „dunkle Zeit“ der Problemlösepsychologie, als durch den Nationalsozialismus zahlreiche Wissenschaftler aus dem deutschsprachigen Raum vertrieben wurden und zugleich in den USA der Behaviorismus die dominierende Forschungsrichtung war und das Studium geistiger Prozesse konsequent abgelehnt wurde.
3. Der Zeitraum nach der „kognitiven Wende“ in den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts, in dem kognitive Prozesse wieder in den Fokus der Wissenschaft rückten. „Eine wegweisende Funktion hatte dabei das 1972 erschienene Buch ‚Human Problem Solving‘ von Alan [sic] Newell und Herbert Simon. Die in diesem Werk niedergelegte Konzeption des menschlichen Problemlösens als ‚Informationsverarbeitung‘ stellt die bis heute dominierende Sichtweise dar.“ (Arbinger 1997, S. 3)

1.1.2. Überblick über die Problemlöseforschung in der Mathematik und ihrer Didaktik

Der Teil dieser Zusammenstellung, der sich mit der amerikanischen Forschung befasst, beruht im Wesentlichen auf Lester (1994) und Schoenfeld (1992b; 2007); der deutsche Teil basiert auf Reiss & Törner (2007) sowie Heinze (2007).

Problemlösen in den Vereinigten Staaten von Amerika

Amerikanische mathematikdidaktische Forscher zum Problemlösen haben, motiviert von Pólyas (1945) „How to Solve It“, in den 1960ern und 70ern viele statistische Untersuchun-

gen durchgeführt; wobei Prozessanalysen und Vergleichsstudien mit sich unterscheidenden Trainingsanweisungen („*treatment A versus treatment B*“) dominierten. Namhafte Veröffentlichungen dieser Zeit stammen u.a. von Kilpatrick (1967)³, Lucas (1972) sowie Kantowski (1977). Bis zum Ende der 1980er Jahre konnten auf diese Weise viele Erkenntnisse zur Trainierbarkeit heuristischer Strategien gewonnen werden, wobei sich schnell zeigte, dass die recht allgemein formulierten Heurismen, die Pólya aufgezeigt hatte, zunächst in spezifischere Anweisungen umgesetzt werden mussten (vgl. Schoenfeld 1992b).⁴ Ebenfalls in dieser Zeit wurde die Wichtigkeit von Metakognition und Monitoring sowie individueller Anschauungen (*belief systems*) herausgestellt. Eine gute Zusammenfassung stammt von Lester (1994; siehe Tabelle 1.1).

Dates ^a	Problem-solving research emphases	Research methodologies used
1970 – 1982	Isolation of key determinants of problem difficulty; identification of characteristics of successful problem solvers; heuristics training	Statistical regression analysis: early "teaching experiments"
1978 – 1985	Comparison of successful and unsuccessful problem solvers (experts vs. novices); strategy training	Case studies; "think aloud" protocol analysis
1982 – 1990	Metacognition; relation of affects/beliefs to problem solving; metacognition training	Case studies; "think aloud" protocol analysis
1990 – 1994	Social influences; problem solving in context (situated problem solving)	Ethnographic methods

^a Of course, the dates shown are only approximate. However, the chronology is reasonably accurate.

Tabelle 1.1.: Ein Überblick über die amerikanische Problemlöse-Forschung der Jahre 1970 – 1994, zitiert nach Lester (1994, S. 664)

Großen Einfluss auf die amerikanische Problemlöseforschung hatten auch die Grundsataprogramme der Vereinigung der amerikanischen Mathematiklehrer (NCTM – National Council of Teachers of Mathematics), „An agenda for action“ (NCTM 1980) und „Curriculum and evaluation standards for school mathematics“ (NCTM 1989), die dem Problemlösen einen sehr hohen Stellenwert für den Unterricht einräumten. Pehkonen (2004, S. 56 f.) ergänzt in diesem Zusammenhang, dass die 1980 formulierten Ideen und das sich daraus entwickelnde Forschungsinteresse überall auf der Welt Anklang gefunden hätten und aufgegriffen wurden (er führt Beispiele unterschiedlicher europäischer und asiatischer Staaten sowie Australien und weiterer Länder auf).

In den 1990ern hat sich der Fokus in Richtung (Implementationen für den) Unterricht verschoben und es wurden vermehrt offene Probleme untersucht (Pehkonen 2004, S. 57 ff.). Generell hat das Interesse der amerikanischen Forscher am Problemlösen seit dem Ende der 1980er Jahre jedoch stark abgenommen:

„Problem solving was a major focus of mathematics education research in the US from the mid-1970s through the late 1980s. By the mid-1990s research under the

³Die Arbeit von Kilpatrick war die erste, in der – aufbauend auf Pólyas Buch – Problemlöseprozesse untersucht wurden (vgl. Pehkonen 1991, S. 46).

⁴Hierauf gehe ich in Abschnitt 4.2.3 genauer ein.

banner of ‚problem solving‘ was seen less frequently as the field’s attention turned to other areas.“ (Schoenfeld 2007, S. 537)

Die Übersichtsartikel zur amerikanischen Problemlöseforschung – auch die neueren – schließen mit Blick auf die Abnahme des Forschungsinteresses sinngemäß alle mit den Worten, die Lester schon Mitte der 90er gewählt hat:

„[...] we know far too little to stop giving major attention to such fundamental questions as *How does problem-solving ability develop? What factors influence this development?* and *How can students be helped to become better problem solvers and, hence, better doers of mathematics?*“ (Lester 1994, S. 672)

Problemlösen in Deutschland

Die deutsche mathematikdidaktische Problemlöseforschung beginnt erst relativ spät. Obwohl der Prozess des Problemlösens von Mathematikern (von Gauß ist ein entsprechender Brief aus dem Jahr 1808 überliefert, sowie Poincaré 1914 und Hadamard 1945)⁵ schon diskutiert worden war und auch die Gestaltpsychologen (Wertheimer und Duncker 1935) oft mathematische Beispiele für ihre Untersuchungen verwendet haben, hatte dies alles kaum Einfluss auf mathematikdidaktische Forschung und den Mathematikunterricht. Selbst das viel beachtete Buch von Pólya, „Schule des Denkens“, änderte im Prinzip nichts an dieser Tatsache:

„The book by Polya (1945) does not only provide this detailed instruction for problem solving but also covers an introduction on the use of heuristics in mathematical problem solving [...] It was probably this mixture that made the book interesting for its readers from the mathematics education and the mathematics community. However, the friendly acceptance of Polya’s ideas had hardly any impact on the work of scientists from both communities. In particular, there is no evidence that this approach significantly influenced classroom work in Germany. (Reiss & Törner 2007, S. 434)

Dies änderte sich auch wenig in den 1960er und 70er Jahren – die wenigen Untersuchungen von Mathematikdidaktikern beschränkten sich auf Aspekte psychologischer Forschung und verwendeten Probleme wie den „Turm von Hanoi“⁶ (vgl. Reiss & Törner 2007, S. 436). Erweitert man das Blickfeld auf die Gebiete anspruchsvoller Aufgaben und des entdeckenden Lernens, findet man in dieser Zeit aber natürlich Forschung, die stärker in das Themenfeld „mathematisches Problemlösen“ mit hineinspielt (vgl. ebd.).

Seit den 1980er Jahren hat sich die Situation ein wenig gewandelt, die unterschiedlichen Bedeutungen der Wörter „Problem“ und „(word) problem“ (in der deutsch- bzw. englischsprachigen Literatur) hat einen Austausch mit englischsprachigen Forschern aber

⁵Zumindest das Buch von Poincaré ist recht früh auch auf deutsch erschienen. Auf die Prozessanalysen dieser Mathematiker gehe ich in Abschnitt 3.3 genauer ein.

⁶Es handelt sich beim „Turm von Hanoi“ um ein Spiel, bei dem ein Turm aus unterschiedlich großen Scheiben nach bestimmten Regeln umgelegt werden muss.

vermutlich sehr erschwert (vgl. Reiss & Törner 2007, S. 436). Im Rahmen des Curriculums für den Mathematikunterricht hat das Problemlösen erst seit Veröffentlichung der Bildungsstandards (KMK 2003), die als Reaktion auf das schlechte Abschneiden deutscher Schüler in den TIMS- und PISA-Vergleichsstudien verabschiedet wurden, einen explizit hervorgehobenen Stellenwert.⁷

Meines Wissens sind es insbesondere die folgenden mathematikdidaktischen Arbeitsgruppen, die die Problemlöseforschung der letzten Jahrzehnte in Deutschland entscheidend mitgeprägt haben: Regina Bruder (Darmstadt), Frank Heinrich (Braunschweig), Karl Kießwetter (Hamburg), Martin Stein (Münster), Günter Törner (Duisburg-Essen), Heinrich Winter (Aachen) und Bernd Zimmermann (Jena). Zusätzlich gibt es wichtige Impulse für dieses Forschungsfeld u.a. von Gerhard Becker, Torsten Fritzlar, Martin Glatfeld, Aiso Heinze, Ulrich Heyer, Friedhelm Käpnick, Gerhard König, Wolfgang Schwarz, Kristina Reiss und Alfred Schreiber.⁸ Und schließlich trägt auch die Hannoveraner Arbeitsgruppe unter der Leitung von Thomas Gawlick zu diesem Themenkreis bei.

Aktuelle Trends in der Problemlöseforschung

Nach dieser historischen Zusammenstellung folgt ein kurzer Ausblick auf die aktuelle Forschung im Bereich Problemlösen, wobei dieser Abschnitt auf meinen Eindrücken des Besuchs internationaler Tagungen⁹ und dem ZDM-Heft (2007, Nr. 39) „Problem Solving Around the World“ beruht.

In vielen Ländern (z.B. Thailand, aber auch in Deutschland) wurden Curricula nach dem Vorbild der amerikanischen Standards eingeführt, die unter anderem das Problemlösen als festen Bestandteil (in Deutschland als „prozessbezogene Kompetenz“ für alle und damit nicht mehr nur als Tätigkeit für besonders gute Schüler) enthalten. In Deutschland lässt sich dies beispielsweise auch an einer Veränderung der Schulbücher festmachen (vgl. Reiss & Törner 2007). Entsprechend bezieht sich ein guter Teil aktueller Studien auf die Implementierung des Problemlösens in den Schulunterricht (z.B. auch in Australien vgl. Clarke, Goose & Morony 2007). Ironischerweise gibt es insbesondere in den USA, dem Ursprungsland der „standards-based curricula“, zur Zeit eine gegenläufige Entwicklung und den Trend, wieder verstärkt abfragbares Wissen und „exercises“ anstelle von „problems“ zu unterrichten – ausgelöst durch den „No Child Left Behind Act“ und zugehörige Vergleichstests der Bush-Regierung (vgl. Schoenfeld 2007).

Die oben zitierte Abnahme von (Grundlagen-) Forschung zum Problemlösen hält an; neben der bereits erwähnten Forschung zur Anwendung in Klassenräumen wird Problemlösen oft unter den allgemeineren Begriff „thinking mathematically“ subsumiert (vgl. Schoenfeld 2007, Clarke, Goose & Morony 2007). Des Weiteren wird im Gegensatz zum

⁷B. Zimmermann weist zurecht darauf hin, dass das Problemlösen natürlich auch schon in älteren Versionen curricularer Vorgaben enthalten war.

⁸Ich danke F. Heinrich für seine Hinweise und Ergänzungen zu dieser – keineswegs vollständigen – Liste.

⁹Gemeint sind hier die PME-Tagungen 2011 und 2012 in Ankara bzw. Taipeh, die ICME-Tagung 2012 in Seoul sowie die ProMath-Tagungen 2011 und 2012 in Umeå bzw. Ljubljana.

„problem solving“ in letzter Zeit vermehrt das „problem posing“ zum Forschungsgegenstand gemacht (siehe auch Cai & Bikai 2007).

1.2. Relevanz des Problemlösens (für den Mathematikunterricht)

Innerhalb der Mathematik nimmt das Lösen von (mathematischen) Problemen einen zentralen Standpunkt ein (vgl. auch Zimmermann 1982, S. 176); für bekannte Mathematiker wie Paul Halmos (1980) oder George Pólya (1980a) stellt es das „Herz“ oder den „Kern“ der Mathematik dar:¹⁰

„[...] the mathematician's main reason for existence is to solve problems, [...] what mathematics really consists of is problems and solutions.“ (Halmos 1980, S. 519)

Für das Lernen von Mathematik ist die Wichtigkeit des Problemlösens unbestritten (vgl. Schoenfeld 1985; Winter 1989, Kap. 9). So setzt zum Beispiel Leuders (2003, S. 121) das Finden und Lösen von Problemen mit „Mathematik betreiben“ gleich. Die Vereinigung der amerikanischen Mathematiklehrer hat schon die 80er Jahre zum Jahrzehnt des Problemlösens erhoben (NCTM 1980). Und nach Winter (1995, S. 37) gehört der Erwerb von Problemlösefähigkeiten und heuristischen Fähigkeiten zu den drei Grunderfahrungen, die den allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts legitimieren:

„(G3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“ (Winter 1995, S. 37)

Weitere Gründe für die Behandlung von Problemen im Mathematikunterricht – zusätzlich zu der Tatsache, dass dadurch ein „modernes Bild“ von der Mathematik vermittelt wird, jenseits des Auswendiglernens von Regeln und des sturen Anwendens von Algorithmen – wurden von verschiedenen Autoren (vgl. Zimmermann 1991; 2003) zusammengetragen und sollen hier überblicksartig dargestellt werden.

Pädagogische Gründe: Mathematikunterricht soll einen breiten, gesellschaftlichen Konsens anstreben, „entdeckendes Lernen“ solle an ausgewählten Problemen stattfinden (vgl. Zimmermann 2003, S. 42 f.; Klafki 1996, Vierte Studie; Heymann 1996; Winter 1995).

Lernpsychologische Gründe: In modernen, konstruktivistischen Lerntheorien wird davon ausgegangen, dass Wissen kaum vermittelt werden könne; jeder Lernende muss sich durch aktive Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand sein Wissen selbst konstruieren. Zur Gestaltung einer entsprechenden Unterrichtskultur gehört das Problemlösen (vgl. Zimmermann 2003, S. 43; BLK 1997, S. 8; Woolfolk 2008, S. 426 ff.; Köster 1994; Törner & Zielinski 1992, S. 256).

¹⁰Bezeichnenderweise trägt der Artikel von Halmos den Titel „The Heart Of Mathematics“.

„*Empirische*“ Gründe: Neben Studien wie TIMSS und PISA, die (deutschen) Schülern Defizite auf dem Gebiet des Problemlösens nachweisen und damit Handlungsbedarf nahe legen, gibt es auch Lehrerbefragungen, die zeigen, dass ein starkes Interesse an einem problemorientierten Mathematikunterricht besteht (vgl. Zimmermann 1982, S. 176 f.; 2003, S. 43).

Gesellschaftliche Gründe: Eine dringende Forderung an den heutigen Unterricht (u.a. von TIMSS und PISA) ist die Vorbereitung der Lernenden auf das Lösen von (komplexen) Problemen und die Emanzipation von ihren Lehrpersonen (vgl. Zimmermann 2003, S. 43; OECD 2003, S. 23; Schoenfeld 1992b, S. 13; Törner & Zielinski 1992, S. 254 f.).

Innermathematische Gründe: Die Geschichte der Mathematik zeigt, dass insbesondere von Problemen (wie zum Beispiel der Kreisquadratur¹¹, der Würfelverdopplung, der Winkeldreiteilung oder der Fermat’schen Vermutung¹²) langfristig kräftige Impulse für die Weiterentwicklung der Mathematik gegeben wurden. Auch zeigt die Geschichte, dass die Entwicklung und Anwendung heuristischer Methoden mindestens ebenso wichtig ist wie das Streben nach Systematik, begrifflicher Präzision und logischen Begründungen (vgl. Zimmermann 2003, S. 43 f.; Törner & Zielinski 1992, S. 256).

Motivatorische Gründe: Problemlösen kann Spaß an der Mathematik vermitteln; durch Problemaufgaben und den Einbezug von Erfahrungen der realen Welt könne man bei SchülerInnen Motivation erzeugen. Auf diese Weise eignen sich Problemaufgaben auch zu Übungszwecken, zur Wiederholung und Festigung von Wissen (vgl. Schoenfeld 1992b, S. 13; Törner & Zielinski 1992, S. 255 f.).

Neben diesen Gründen sprechen natürlich auch formale Vorgaben für eine Beschäftigung mit dem Problemlösen. Dieses Thema ist schon lange in den Rahmenrichtlinien enthalten (siehe z.B. Nds. Kultusministerium 1991) – aber erst als Reaktion auf die Veröffentlichung der Ergebnisse der TIMS- und vor allem der PISA-Studie hat das Problemlösen in der öffentlichen Diskussion und der Bildungspolitik an Relevanz gewonnen: Über die KMK Bildungsstandards (2003) und damit die Kerncurricula der einzelnen Bundesländer (siehe z.B. Nds. Kultusministerium 2006) ist das Problemlösen und damit auch die Vermittlung heuristischer Techniken als eine der „prozessbezogenen Kompetenzen“ zu einem wichtige(re)n Unterrichtsgegenstand geworden.

1.3. Problemlöseforschung – der Ansatz dieser Arbeit

Zur Verbesserung der Förderung der Problemlösefähigkeit (von SchülerInnen) gibt es zwei grundlegende Zugänge: (1) Bemühungen, die bislang vorliegenden Erkenntnisse stär-

¹¹Obwohl sich dieses Problem letztendlich als unlösbar erwiesen hat, wurden im Rahmen seiner Bearbeitung u.a. die Grundlagen für die Infinitesimalrechnung gelegt.

¹²Einen guten Überblick über den Weg zur Lösung dieses Problems und die auf diesem Weg gewonnenen mathematischen Fortschritte gibt Singh (2000).

ker in der Breite umzusetzen, und (2) vorliegendes Wissen durch Forschung, Entwicklung und Erprobung aufzustocken (vgl. BLK 1997, S. 6; Heinrich 2004, S. 14). In dieser Arbeit wird der zweite Zugang verfolgt, durch didaktische (Grundlagen-) Forschung soll unser Wissen über das Problemlösen erweitert werden.

Um Grundlagenforschung sinnvoll betreiben zu können, ist es – bildlich gesprochen – wichtig, das „(Forschungs-) Feld“ zu Beginn zumindest grob „abzustecken“. Schoenfeld (1985, S. 44) tut genau dies, indem er vier Wissens- und Verhaltenskategorien aufstellt, die das Verhalten in mathematischen Situationen beschreiben und die dazu geeignet seien, Erfolg und Misserfolg beim Problemlösen zu erklären:

„The four categories, which overlap and interact with each other to some degree, are as follows.

- *Resources* are the body of knowledge that an individual is capable of bringing to bear in a particular mathematical situation. They are the factual, procedural, and propositional knowledge possessed by the individual. [...]
- *Heuristics* are rules of thumb for effective problem solving. They are fairly broad strategies for making progress on unfamiliar or difficult problems. Examples are exploiting analogies and working backward. [...]
- *Control* deals with the question of resource management and allocation during problem-solving attempts. In this context it is reserved for major decisions regarding planning, monitoring, and assessing solutions on-line, and the like. [...]
- *Belief systems* are one’s mathematical world view, the perspective with which one approaches mathematics and mathematical tasks. [...]“ (Schoenfeld 1985, S. 44 f.)

In einem späteren Artikel, Schoenfeld (1992b, S. 42 f.), in dem es um „mathematical thinking and problem solving“ geht, werden die vier Kategorien zum Teil anders beschrieben¹³ und es kommt *Practices* als fünfte Kategorie¹⁴ hinzu. In seinem neuesten Buch, *How We Think*, entwickelt Schoenfeld (2010) eine Theorie des Denkens, die mit drei Kategorien auskommt, wobei die Heurismen als eigenständige Kategorie wegfallen¹⁵:

¹³Sie heißen dort (in derselben Reihenfolge wie oben): „The knowledge base“, „Problem solving strategies“, „Monitoring and Control“ und „Beliefs and affects“

¹⁴Diese ist für die direkte Untersuchung von Problemlöseprozessen allerdings nicht so wichtig wie die anderen Kategorien: „I later (Schoenfeld, 1992) added the category of *practices* as something essential to examine. The idea is that the practices in which one engages (e.g., ‘school mathematics’) play a casual role in shaping one’s beliefs and resources. The first four categories of the framework suffice for examining problem solving ,in the moment.“ (Schoenfeld 2010, S. 231, note 1)

¹⁵„As noted in Chapter 1, heuristic strategies were treated as a separate category in my 1985 book. To be sure, they merit special attention – particularly in instruction, and in the examination of problem-solving success or failure. From a broader perspective, however, they are just one (important) category of knowledge, a particular kind of cognitive resource that can be brought to bear in problem solving. That is, when one thinks at a level of mechanism, the question is, ‘which mental objects get accessed and used in what ways?’ From this perspective, there is no functional reason to distinguish between heuristic strategies and other kinds of knowledge.“ (Schoenfeld 2010, S. 232, note 7)

„[...] what people do is a function of their *resources* (their knowledge, in the context of available material and other resources), *goals* (the conscious or unconscious aims they are trying to achieve), and *orientations* (their beliefs, values, biases, dispositions, etc.). “ (Schoenfeld 2010, S. xiv)

Schoenfeld (2010, S. 4 ff.) betont jedoch, dass sich seine früheren Arbeiten zum Problemlösen bewährt und die vier Kategorien immer noch Bestand hätten, wenn es um die Analyse von Problembearbeitungsprozessen gehe. Neu sei hingegen der theoretische Überbau, der zusätzlich zur Untersuchung der Einflussfaktoren eine Erklärung der Zusammenhänge sowie Vorhersagen ermögliche – und mit den oben genannten drei Kategorien auskomme.¹⁶

Zu einer sehr ähnlichen Einschätzung wie Schoenfeld, was den persönlichen Hintergrund (*personal background*) in Situationen des mathematischen Lernens und Problemlösens anbelangt, kommen De Corte et al. (2000) – mit dem Unterschied, dass *Control* bei ihnen stärker ausdifferenziert wird und volitionale Faktoren mit einbezogen werden.¹⁷

Zu einer leicht unterschiedlichen Einschätzung kommen Lester et al. (1989, S. 4 ff.), die neben „knowledge“, „control“ und „beliefs“ noch „affects“ und „contextual factors“ zu ihren fünf Faktoren für erfolgreiches Problemlösen zählen. Zu den Affekten zählen bei Lester et al. das ganze Spektrum von Emotionen (wie Furcht, Spaß) bis zu Einstellungen (wie Sicherheit oder Motivation); die kontextuellen Faktoren beziehen sich auf soziale und kulturelle Hintergründe der Problemlöser. Insbesondere fällt das Fehlen heuristischer Fertigkeiten auf, ansonsten passen die theoretischen Konzepte gut zu denen der vorher genannten Autoren.

Der Psychologe D. Dörner (1979) betrachtet hauptsächlich zwei Kategorien – die epistemische und die heuristische Struktur. Erstere entspricht dabei Schoenfelds *Resources* und letztere umfasst sowohl den Bereich der *Heuristics* als auch denjenigen des *Control*, enthält sie doch Steuerungselemente (vgl. Dörner 1979, S. 38 ff. sowie S. 45 ff.):

¹⁶Am Fr, 13.07.2012, hatte ich auf der ICME-Tagung in Seoul die Gelegenheit, mit Alan Schoenfeld zu sprechen und habe ihn auch hierauf angesprochen. Er sagte, dass er schon 1985 die Heurismen als Teil der Knowledge-Base gesehen hätte. Meinem Kommentar, dass sie aber besonderer metakognitiver Steuerung bedürften, entgegnete er: Es gäbe Heurismen, für die das zutreffen möge, aber auch andere: die Suche nach einem Gegenbeispiel wäre z.B. etwas ganz Natürliches, wenn man zeigen solle, dass etwas nicht generell gelte. Heurismen und anderes Wissen seien schwer zu trennen bzw. einzeln zu beschreiben, etwa wie das Skelett oder das Lungensystem im menschlichen Körper, das man zwar einzeln betrachten könne, aber erst in der Zusammenschau mit dem gesamten Körper Sinn ergebe.

¹⁷De Corte, Verschaffel, & Op't Eynde (2000):

1. Domain specific knowledge
2. Heuristics
3. Meta-knowledge
 - metacognitive knowledge
 - metavolitional knowledge
4. Self-regulatory skills
 - metacognitive skills
 - metavolitional skills
5. Mathematics related beliefs

„Der Problemlöser braucht ein bestimmtes Wissen über den Realitätsbereich, in dem das Problem zu lösen ist; man könnte auch sagen, er braucht ein *Bild* des entsprechenden Realitätsbereichs, welches die Möglichkeiten, sich innerhalb desselben zu bewegen, einschließt. Diesen Teil der kognitiven Struktur nennen wir *epistemische Struktur* (von griechisch *episteme* = Wissen) und bezeichnen ihn kurz mit ES. [...]

Eine ES allein reicht zum Problemlösen nicht aus [...]. Der Problemlöser braucht [...] *Konstruktionsverfahren* zur Herstellung der unbekannten Transformation. Solche Konstruktionsverfahren als mehr oder minder präzise festgelegte Pläne für die Konstruktion von Überführungen eines gegebenen Sachverhalts in den gesuchten wollen wir *Heurismen* (= Findeverfahren) nennen, und die Gesamtmenge solcher Pläne und ihre Organisation im Gedächtnis eines Problemlösers nennen wir *heuristische Struktur* (kurz HS).“ (Dörner 1979, S. 26 f.)

Im Großen und Ganzen stimmen die Einschätzungen der unterschiedlichen Forscher – was Voraussetzungen für erfolgreiches Problemlösen anbelangt – überein. Alle oben aufgezählten Faktoren ausführlich zu untersuchen, würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen,¹⁸ ich möchte mich bei meinen Betrachtungen von Problembearbeitungsprozessen daher insb. ihrem Verlauf, den Heurismen (*heuristics*) und der Selbstregulation (oder *monitoring* oder *control* als Teilbereich der Metakognition) widmen. Im Gegensatz zu Schoenfelds (2010) neueren Ansichten, sollen Heurismen dabei als eigenständiger Faktor behandelt werden, wie dies zum Beispiel bei Dörner der Fall ist.

Neben diesem „ökonomischen Argument“ gibt es aber auch inhaltliche Elemente die für eine solche Fokussierung sprechen: Im direkten Vergleich zwischen Routine- und Problemaufgaben, zeichnen sich letztere durch das Suchen nach Lösungsstrategien aus, wohingegen bei ersteren eher Schemata abgearbeitet werden. Bei Heurismen handelt es sich aber genau um die Beschreibung ebensolcher „Such- und Findeprozesse“. Bezugnehmend auf Forschungsergebnisse konnte zum Beispiel Putz-Osterloh zeigen, dass insbesondere die beiden letztgenannten Aspekte, Heurismen und Metakognition, einen Effekt auf den Problemlöseerfolg aufweisen¹⁹ (weitere Studien, die die Wichtigkeit insbesondere dieser beiden Aspekte beleuchten, werden in Kapitel 6 vorgestellt).

1.4. Aufbau der Arbeit

Dieser Abschnitt bietet einen Überblick über den Aufbau und den Inhalt der vorliegenden Arbeit (siehe auch Abbildung 1.1). Das Buch gliedert sich in drei große Teile, einen Theorie-, einen Methoden- sowie einen Ergebnisteil mit jeweils vier bis sechs Kapiteln.

¹⁸Die Untersuchung beispielsweise von *beliefs* würde nicht nur den Umfang dieser Arbeit noch deutlich erweitern, sondern auch gänzlich andere Methoden (z.B. Interviews und/oder Fragebögen) erfordern.

¹⁹Putz-Osterloh (1974, der Artikel baut auf ihrer Dissertation auf) beschreibt die Trainingserfolge von Gruppen („Studenten verschiedener Fakultäten“), die in Problemlösetaktiken, -strategien oder in beidem trainiert wurden, im Vergleich zu einer Kontrollgruppe. Insbesondere die „Supergruppe“ (beides) war systematisch besser als die anderen Gruppen.

1.4.1. Teil I. Literaturstudium

Das Kapitel 1, die **Einleitung**, liefert einen knappen Überblick über die Problemlöse-Forschung – aus Perspektive der Psychologie und der Mathematik sowie ihrer Didaktik. Anschließend wird dargestellt, weshalb sich die Beschäftigung mit dem „Problemlösen“ wichtig und das Thema für den Mathematikunterricht relevant ist. Das Kapitel endet mit einer Übersicht über Faktoren, die für das Verständnis von Problemlösen wichtig sind.

Der Frage „**Was ist ein Problem?**“ widmet sich das 2. Kapitel. Aus der psychologischen und der mathematikdidaktischen Literatur werden Definitionen des Ausdrucks „Problem“ vorgestellt und diskutiert. Zudem erfolgt eine Abgrenzung zu den verwandten fachdidaktischen Forschungsgebieten „offene Aufgaben“, „Argumentieren und Beweisen“ sowie „Modellieren“. Es wird mit der Feststellung geschlossen, dass die Untersuchung von Aufgaben(inhalten) dem Thema nicht gerecht werden kann, sondern dass die zugehörigen Bearbeitungsprozesse Untersuchungsgegenstand sein müssen.

Das 3. Kapitel beinhaltet eine Auseinandersetzung damit, wie **Problembearbeitungsprozesse** in der Literatur diskutiert werden. Die Darstellung beginnt mit einer Analyse der Literatur zu Problembearbeitungsprozessen. Es geht weiter mit dem Ablauf solcher Prozesse, mit psychologischen Stufenmodellen (Dewey; Wallas) und der modernen Sichtweise auf den Problemlöseprozess (Newell & Simon). Es folgen die Überlegungen von Mathematikern vom Beginn des 20. Jahrhunderts (Poincaré; Hadamard; van der Waerden) zu mathematischen Denk- und Findungsprozessen. Eine zentrale Stellung in diesem Kapitel nimmt die Vorstellung der Überlegungen Pólyas ein, der Mitte des 20. Jahrhunderts die Problemlöseforschung (aus mathematischer Sicht) entscheidend beeinflusst hat. Im Anschluss daran werden Modelle zum Problemlösen aus der mathematikdidaktischen Forschung (Schoenfeld; Mason et al. und Wilson et al.) vorgestellt und verglichen (ein eigenes Modell folgt in Abschnitt 12.4).

Kapitel 4 dreht sich um **Heurismen**, wobei zunächst die Begriffe „Kreativität“ und „Geistige Beweglichkeit“ und ihre Bedeutung für das Problemlösen knapp beleuchtet werden. Anschließend werden Heurismen als „Problemlösetechniken“ und Möglichkeit der Kompensation mangelnder geistiger Beweglichkeit vorgestellt. Es werden verschiedene Versuche, Heurismen zu kategorisieren und zu beschreiben dargestellt, und ihre Verwendung im Prozess des Problemlösens diskutiert. Das Kapitel endet mit einer Definition des Begriffs „Heurismus“ für diese Arbeit.

In Kapitel 5 geht es um **Metakognition und Selbstregulation**, wobei letztere als Teilgebiet der Metakognitionsforschung verortet wird. Schließlich geht es darum, welchen Einfluss die Selbstregulation auf den Prozess der Problembearbeitung und den Einsatz von Heurismen in solchen Prozessen besitzt und weshalb sich die Untersuchung von Problembearbeitungsprozessen auch auf diesen Aspekt konzentrieren sollte.

Das Literaturstudium wird abgeschlossen mit Kapitel 6, in dem **Forschungsergebnisse** zum Problemlösen vorgestellt werden. Zunächst werden „Klassiker“ der Literatur (Kilpatrick; Lucas; Kantowski; Schoenfeld) wiedergegeben; danach werden neuere Studien zum Problemlösen präsentiert (u.a. von Stein; Rasch; Koichu et al. und Heinrich). Schließlich gibt es mehrere Forschungsberichte mit einem starken Bezug zur Selbstregula-