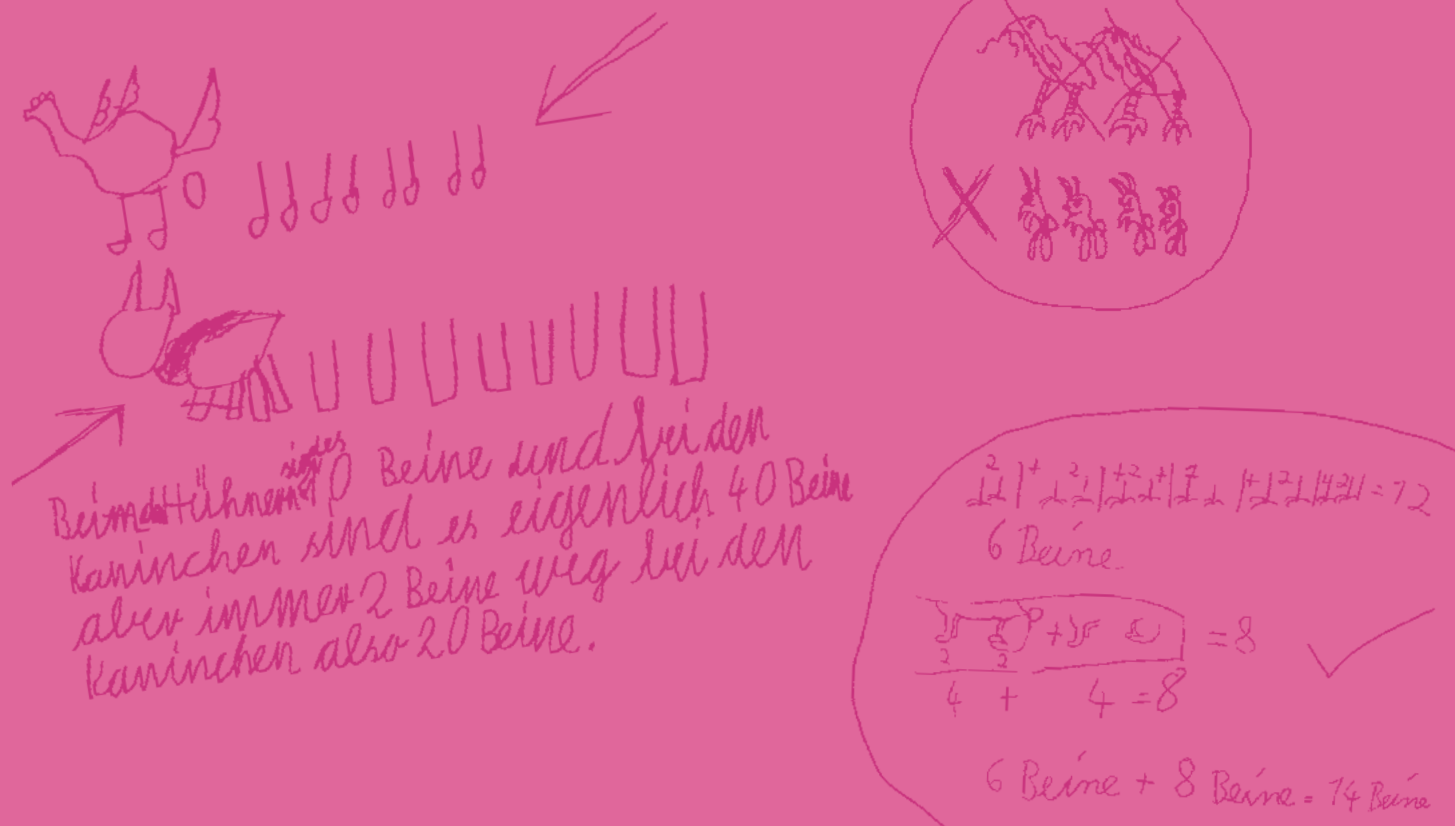




Renate Rasch

42 Denk- und Sachaufgaben

Wie Kinder mathematische Aufgaben
lösen und diskutieren

Renate Rasch

42 Denk- und Sachaufgaben

Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren

Herausgegeben von Gerhard N. Müller
und Erich Ch. Wittmann

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Impressum

Renate Rasch
42 Denk- und Sachaufgaben.
Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren
Herausgegeben von Gerhard N. Müller und Erich Ch. Wittmann

8. Auflage 2023
Das E-Book folgt der Buchausgabe, 8. Auflage 2023

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den
gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

© 2003. Kallmeyer in Verbindung mit Klett
Friedrich Verlag GmbH
D-30159 Hannover
Alle Rechte vorbehalten.
www.friedrich-verlag.de

E-Book Erstellung: Friedrich Verlag GmbH; Hannover

ISBN: 978-3-7727-9078-2

Inhalt

	Vorwort der Herausgeber	4
1.	Besonderheiten problemhaltiger Denk- und Sachaufgaben	5
2.	Problemhaltige Denk- und Sachaufgaben im Mathematikunterricht	7
2.1	Unterrichtsbedingungen	7
2.2	Unterrichtsgestaltung	8
2.3	Leistung und Bewertung	10
3.	Denk- und Sachaufgaben mit Lösungsbeispielen	11
3.1	Denk- und Sachaufgaben für Klassenstufe 1	11
3.2	Denk- und Sachaufgaben für Klassenstufe 2	29
3.3	Denk- und Sachaufgaben für Klassenstufe 3	47
3.4	Denk- und Sachaufgaben für Klassenstufe 4	78
	Literatur	112

Vorwort der Herausgeber

Der traditionelle Mathematikunterricht zeichnet sich durch eine gleichförmige Methodik aus: Die zu erwerbenden Kenntnisse und Fertigkeiten werden unter der Führung der Lehrerin an Beispielaufgaben erklärt, an weiteren Aufgaben geübt und in Textaufgaben angewandt, Grundfertigkeiten werden automatisiert. Bei der Ablösung dieses traditionellen Unterrichts durch aktiv-entdeckenden Unterricht wird oft stillschweigend angenommen, dass auch der neue Unterricht einer wenigleich anderen, so doch wieder gleichförmigen Methodik folgen müsse. Dies ist ein fundamentales Missverständnis. Da aktiv-entdeckendes Lernen gegenüber dem traditionellen Unterricht ein viel breiteres Spektrum von Zielsetzungen hat, sind differenzierte Methoden mit unterschiedlichen Graden von Offenheit erforderlich, die nur in ihrem Zusammenspiel den Erfolg des Unterrichts sichern. Je bewusster im aktiv-entdeckenden Unterricht spezifische inhaltliche Lernziele erarbeitet werden, sei es auf festgelegten Wegen, wie z. B. das Kopfrechnen, oder innerhalb eines klaren fachlichen Rahmens, wie z. B. das halbschriftliche Rechnen, umso bessere Voraussetzungen bestehen für die Förderung allgemeiner Lernziele (Mathematisieren, Explorieren, Argumentieren, Formulieren) durch Lernangebote, die notwendig offener sein müssen.

Es ist das besondere Verdienst von Renate Rasch, ein Feld für sehr weitgehend offene mathematische Aktivitäten erschlossen zu haben, das als besonders schwierig gilt und in das nach traditionellem Verständnis nur leistungsstarke Kinder ab und zu einen Ausflug unternehmen dürfen: Denkaufgaben und komplexere Sachaufgaben. Durch systematische, ausführlich dokumentierte Forschungen hat sie nachgewiesen, wie motiviert und erfolgreich Kinder mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen solche Aufgaben bearbeiten. „Erfolg“ bedeutet hier allerdings nicht, dass Aufgabe für Aufgabe richtig gelöst wird, sondern dass bei der Auseinandersetzung mit solchen Aufgaben über einen längeren Zeitraum die geistigen Kräfte der Kinder entfaltet werden: Die Kinder versuchen Texte mit neuartigen Aufgaben zu lesen, sich ein Bild von einer Situation zu machen, Skizzen zu entwerfen, Rechenwege zu finden, Fehler, die sie entdecken, zu korrigieren, Lösungswege aufzuschreiben, usw. Dadurch bilden sie ihre Denkfähigkeiten aus. Die Aufgaben sind kein Selbstzweck, sondern Mittel zu diesem übergeordneten Ziel. Die beigefügten Schülerdokumente belegen eindrucksvoll, welche Fantasie die Kinder bei ihren Überlegungen entwickeln.

Komplexe Fähigkeiten sind nur auf diesem experimentierenden Weg zu erwerben. Ein offensichtliches Beispiel ist das Laufen: Kleine Kinder lernen es, indem sie fortgesetzt versuchen zu robben, zu krabbeln, sich hochzuziehen, zu stehen, mit Hilfe zu laufen – und dabei immer wieder hinfallen, bis schließlich die ersten Schritte gelingen und die Kinder immer sicherer werden. Die Kategorien „richtig“/„falsch“, mit denen wir inhaltliche Lernziele bewerten, sind hier völlig fehl am Platz.

Wir hoffen, dass dieses Buch Lehrerinnen und Lehrern Mut macht, in ihrem Unterricht systematisch Platz für „anspruchsvolle“ Denk- und Sachaufgaben zu schaffen und sich immer bewusst zu machen, dass die Kinder dabei mathematisch laufen lernen.

Gerhard N. Müller

Erich Ch. Wittmann

Anlass einer intensiven, mehrjährigen Arbeit zu problemhaltigen Denk- und Sachaufgaben mit Grundschulkindern waren Beobachtungen im Mathematikunterricht, die bewusst machten, dass eigenständiges Überlegen und Lösen bei Anforderungen, die von Gewohntem abweichen, nicht ausreichend erlernt werden.

Hintergrund des vorliegenden Buches sind Untersuchungen in zwei Grundschulklassen, die fast über die gesamte Grundschulzeit beim Lösen problemhaltiger Denk- und Sachaufgaben begleitet wurden (vgl. Rasch 2001). Ich möchte Ihnen meine Erfahrungen zur Arbeit mit diesen Aufgaben vorstellen und Sie dazu ermutigen, diese kleine Aufgabengruppe im Mathematikunterricht nicht ganz außer Acht zu lassen.

Ein großer Teil der Denk- und Sachaufgaben ist auch für den Einsatz in der Sekundarstufe geeignet.

1. Besonderheiten problemhaltiger Denk- und Sachaufgaben

Bei problemhaltigen Denk- und Sachaufgaben handelt es sich um eine Aufgabengruppe, der in der Regel anspruchsvolle mathematische Strukturen zugrunde liegen, die häufig so in Sachsituationen eingebettet sind, dass die den Kindern vertrauten Grundmodelle der Rechenoperationen nicht ohne weiteres sichtbar bzw. nicht ohne Transferleistung anzuwenden sind.

Einerseits knüpfen die Texte der Aufgaben durchaus an Erfahrungsbereiche des Kindes an, andererseits werden auf dem Hintergrund vertrauter Lebensbereiche ungewöhnte mathematische Zusammenhänge geschildert (solche, über die das Grundschulkind in der Regel bisher noch nicht nachgedacht hat), sodass ein neues, anderes Nachdenken über einen bekannten Sachverhalt gefordert ist.

Beispiel: Auf dem Spielplatz treffen sich Flix, Flux, Streblinde, Murks und Quicki. Alle Kinder begrüßen sich mit Handschlag. Wie oft werden Hände geschüttelt?

Teilweise ist die mathematische Struktur der Aufgaben in anspruchsvolle sprachliche Formulierungen eingebettet, die mehrfach gelesen bzw. durchdacht werden müssen, damit sie dem Verstehen zugänglich werden können.

Beispiel: Dornröschen hat sich an der Spindel gestochen und schläft 100 Jahre. Um das Schloss wächst eine Hecke. Im ersten Jahr wächst sie einen halben Meter. In den darauf folgenden Jahren wächst sie immer um die Höhe, die die Hecke in dem Jahr davor erreichte. Wie hoch ist die Hecke nach sechs Jahren?

Nicht selten werden in Problemaufgaben mehrere voneinander abhängige Bedingungen genannt, die von den Lösenden gleichzeitig zu berücksichtigen sind. Dies entspricht weniger den Lösungsgewohnheiten des Grundschulkindes, dem eher Aufgabenstellungen vertraut sind, die dem Schema „Zustand – Operator – Zustand“ folgen.

Beispiel: Murks, Quicki und Streblinde sind zusammen 30 Jahre alt. Quicki ist zwei Jahre jünger als Murks. Streblinde ist vier Jahre älter als Quicki. Kannst du das Alter der drei Kinder herausfinden?

Heinrich Winter, der den Begriff „Problemaufgaben“ im Zusammenhang mit Sachaufgaben prägte, um diese Aufgabengruppe von den elementaren Sachaufgaben, den so genannten Routineaufgaben, abzuheben, betont als weiteres kennzeichnendes Merkmal den Aspekt der Offenheit. Dieses Merkmal kann die Fragestellung betreffen, wenn das Gesuchte nicht oder nicht explizit angegeben ist. Die Offenheit kann sich auf die in der Aufgabe enthaltenen Daten beziehen, die evtl. erst umgedeutet oder umgeordnet werden müssen. Eine zumindest für Grundschüler ungewohnte Offenheit besteht auch dann, wenn die Existenz einer einzigen Lösung nicht sicher ist. Es kann auch keine Lösung oder mehrere Lösungen geben (vgl. Winter 1992).

Beispiel: Der Opa von Murks hat Hühner und Kaninchen. Murks zählt die Beine. Insgesamt sind es 20 Beine. Wie viele Hühner und Kaninchen könnte der Opa haben?

Ob eine Sachaufgabe den Problemaufgaben zuzuordnen ist, ist unbedingt auch von den Voraussetzungen der Kinder abhängig. So können vor allem in den ersten beiden Schuljahren durchaus Routineaufgaben für Grundschulkinder Problemaufgaben sein, wenn sie z. B. Operationen erfordern, die noch nicht zum in der Schule erworbenen Wissen gehören bzw. den vertrauten Zahlenraum überschreiten.

Beispiel: Dick, Faul und Dooffinden einen Sack voll Taler. Sie zählen 27 Stück. Sie wollen die Taler gerecht unter sich verteilen. Geht das? (Klassenstufe 1)

Die Besonderheit in der Grundschule ist, dass den Kindern die direkte Umsetzung der mathematischen Struktur in ein Gleichungssystem entwicklungs- und wissensbedingt noch nicht gelingen kann. Sie sind dadurch während des Lösungsprozesses immer wieder darauf angewiesen, zu inhaltlichen Überlegungen zurückzukehren.

Zu Beginn der Untersuchung stand keine Sammlung dieser Aufgaben zur Verfügung. Textaufgaben ließen sich vereinzelt in Mathematiklehrbüchern entdecken (beispielsweise im Zahlenbuch/Klett), in didaktischen Veröffentlichungen (u. a. Zehnpfenning 1995), in älteren Lehrbüchern unter solchen Überschriften wie „Knobel knifflig“, „Vorsicht Falle“, „Knacknüsse“, im „alef“-Programm (Bauersfeld u. a. 1970) aus der Zeit der Neuen Mathematik, in Knobelzeitschriften, z. B. von der Leipziger Volkszeitung; in Beiträgen einschlägiger Fachzeitschriften, in „Unterhaltungsbüchern aus früherer Zeit“. Häufig nutzte ich Veröffentlichungen von Johannes Lehmann, der sich als Autor und Sammler problemhaltiger Sachaufgaben erwies. Einige Aufgaben wurden selbst entworfen (auch im Rahmen von Seminaren zum Sachrechnen mit studentischer Hilfe), andere wurden durch mündliche Weitergabe dazugewonnen. Bei einer Reihe von Sachaufgaben, die im Versuch zum Einsatz kamen, ließ sich die Quelle leider nicht mehr zuordnen. Inzwischen findet man problemhaltige Denk- und Sachaufgaben auch im Internet.

2. Problemhaltige Denk- und Sachaufgaben im Mathematikunterricht

2.1 Unterrichtsbedingungen

Soll Eigenständigkeit beim Überlegen und Lösen erlernt werden, müssen entsprechende Unterrichtsbedingungen Möglichkeiten dafür schaffen. So lagen der Unterrichtsgestaltung bei der Arbeit mit den Denk- und Sachaufgaben folgende grundsätzliche Überlegungen zugrunde:

- Um Ursprünglichkeit im Lösungsverhalten zu ermöglichen, sollte der Einfluss der Lehrer/innen möglichst gering sein. Das Bearbeiten der Aufgaben mit all den Unsicherheiten und Fragen, die den Lösungsprozess begleiten, war von Anfang an Sache der Kinder. Sie sollten eigenverantwortlich für ihr Tun sein und sich in möglichst hohem Maße mit der Aufgabe und dem Lösungsprozess identifizieren.
- Neben der Offenheit beim Lösen auf der einen Seite sollte ein fester organisatorischer Rahmen notwendige Sicherheit und Orientierung für die Kinder schaffen. Der Unterricht und die Rahmenbedingungen wiederholten sich in gleicher Weise, sodass auch die Schüler/innen diesen Ablauf verinnerlichen und sich daran orientieren konnten.
- Die Kinder sollten die Aufgaben nach einem jeweils für sie optimalen zeitlichen Ablauf lösen können, um über die Schuljahre hinweg ausreichend Gelegenheit zu haben, einen eigenen Lösungsrhythmus auszubilden.
- Die eigentliche Lösungsphase wurde stundenorganisatorisch nicht weiter untergliedert, sodass zeitlich gesehen auch die langsam arbeitenden Kinder ihre Möglichkeiten ausschöpfen konnten. Für die schnell Denkenden wurde keine zusätzliche Beschäftigung (im Sinne von Zusatzaufgaben) vorgesehen. Die für diese Schülergruppe mitunter verbleibende Zeit sollte der weiteren Ausgestaltung der Aufgabe zugute kommen.
- Die Kinder sollten sowohl ihr mathematisches als auch ihr sachliches und sprachliches Wissen bei der Aufgabenbearbeitung darstellen und dafür die ihnen zur Verfügung stehenden Ausdrucksmittel frei wählen können (Zeichnungen, Schriftsprache, mathematisch-symbolische Ausdrucksformen).
- Für die Aufgabenbearbeitung sollte ausreichend Platz zur Verfügung stehen. Auch hier sollte es möglichst keine Einschränkungen geben. Es wurde für jedes Kind ein linienloses Heft in DIN-A4-Größe angelegt. Die Aufgabe stand jeweils auf der rechten Heftseite oben. Der Platz darunter und auf der gegenüberliegenden Seite konnte zur Aufgabenbearbeitung genutzt werden.
- Die Sprache als Denkwerkzeug und Ausdrucksmittel sollte sich möglichst frei entfalten und dabei weiterentwickeln können, und zwar sowohl im Mündlichen als auch im Schriftlichen. Die Unterrichtsorganisation sollte so erfolgen, dass es in den einzelnen Unterrichtsphasen Realisierungsmöglichkeiten für die von der Lehrerin möglichst unbeeinflusste kindliche Lösungssprache gibt.
- Die Denk- und Sachaufgaben sind in der Regel für die jeweilige Altersgruppe von hohem Anspruchsniveau. Da die Anleitung zum Lösen seitens der Lehrerin wegfiel,

sollten leistungsschwächere und begabtere Kinder gemeinsam für das Lösen verantwortlich sein. Aus diesem Grund ist eine Arbeit in heterogen zusammengesetzten Kleingruppen von vier bis sechs Schülern vorteilhaft.

- Die Wertung der Lösungswege und Lösungen durch die Lehrerinnen sollte immer unter der Sicht erfolgen, dass dies Kinder sind, die ihre eigenen Lösungskräfte erst entdecken müssen, die Gelegenheit erhalten sollten, sich zu erproben. Das, was sie an Lösungserfolg erfahren, muss sich entwickeln können; das, was sie an Misserfolg erleben, sollten sie als notwendigen Bestandteil eines Lernprozesses auffassen. Die positiven Momente der Aufgabenbearbeitung sollten hervorgehoben und fehlerhafte Denkwege und Lösungen zunächst relativ unkritisch betrachtet werden. Erst mit dem Wachsen des Lösungsselbstbewusstseins der Kinder wurde an eine zunehmend kritische Begutachtung in Verbindung mit genauen Lösungshinweisen gedacht.

2.2 Unterrichtsgestaltung

Auf diesen grundsätzlichen Überlegungen zur Bearbeitung der Denk- und Sachaufgaben baute der folgende Unterrichtsablauf auf:

Reflexion

Der Unterricht begann im Kreis mit einem Rückblick auf die vergangene „Problemlösestunde“. Die Lehrerin fragte nach der Aufgabe und nach Zusammenhängen, an die sich die Kinder noch erinnern konnten.

Im Folgenden machte sie anhand der Aufzeichnungen der Schüler/innen auf Lösungsstrategien und besondere Ideen aufmerksam. Die Auswertung erfolgte vor allem gruppenweise, aber auch Einzelleistungen wurden hervorgehoben.

Zeit: etwa 15 Min.

Vorstellen der neuen Denk- und Sachaufgabe

Die neue Aufgabe las in der Regel die Lehrerin vor (evtl. zweimal). Die Kinder hatten die Aufgabe nicht vor sich. Sprache, Mimik und Gestik der erfahrenen Leserin trugen erheblich zum Aufgabenverständnis bei. Im Anschluss wurden möglichst viele Reaktionen der Kinder abgewartet. Die Kinder verständigten sich über die neue Aufgabe und machten teilweise schon Lösungsvorschläge. Die Lehrerin half bei Verständnisproblemen und bezog mitunter auch Veranschaulichungsmittel ein, die die im Text geschilderte Situation deutlicher machen sollten. Die Lösungsvorschläge der Kinder kommentierte sie jedoch nicht bzw. unverbindlich, sodass das Lösungsgeschehen in dieser Phase offen blieb. Für Notizen im Kreis wurden Blätter im DIN-A3-Format verwendet.

Zeit: etwa 3–5 Min.

Lösungsarbeit innerhalb der Tischgruppen

Wenn es keinen Gesprächsbedarf mehr gab, bekamen die Kinder ihre Aufgabenhefte und begannen die gemeinsame Arbeit an ihren Arbeitsplätzen. Fragen sollten möglichst innerhalb der Tischgruppen bleiben; die Lehrerin gab nur in „Notfällen“ Ratschläge. Die Schüler/innen gewöhnten sich recht schnell daran, dass die Lehrerin in dieser Phase nicht helfend zur Verfügung stand. Die Arbeit den Kindern zu überlassen bedeutet außerdem, sich ganz bewusst auch räumlich von den Arbeitsgruppen zu entfernen.

Man konnte innerhalb dieses Unterrichtsabschnittes noch einmal zwei unterschiedliche Phasen unterscheiden:

1. eine Findephase: Die Lösenden überlegen, diskutieren, verwerfen bzw. behaupten ihre Ideen, notieren evtl. schon erste Gedanken, finden sich zur Zusammenarbeit (= „laute Phase“);
2. eine Sicherungsphase: Die Kinder ziehen sich mehr auf sich selbst zurück und notieren ihre Rechnungen, gefundene Zahlbeziehungen, Lösungsbeschreibungen nach eigenem Vermögen (= „leise Phase“).

Zeit: etwa 15 – 20 Min.

Vorstellen der Arbeitsergebnisse

Diese Phase gab den Arbeitsgruppen Gelegenheit, ihre Sicht auf die Lösungswege an die Öffentlichkeit zu tragen. Als organisatorischer Rahmen ist der Kreis denkbar. In höheren Schuljahren, wenn die schriftliche Dokumentation als Begleitung notwendiger wird, ist das Vorstellen an der Tafel günstig. Auch in dieser Phase hielt sich die Lehrerin mit Richtigstellungen zurück. So blieb die Lösung am Stundenende mitunter immer noch offen.

Dieser letzte Stundenabschnitt wurde nicht immer eingehalten. Mitunter war die Zeit zu knapp bzw. es erschien ungünstig, alle Lösenden zur gleichen Zeit die Arbeit beenden zu lassen. Auch die Konzentration nach anstrengender Arbeit ist häufig nicht mehr ausreichend. So erschien es manchmal günstiger, die Arbeitszeit auspendeln zu lassen und den Kindern Gelegenheit zu geben, ihre Lösungsdokumentation im Heft noch auszugestalten (was sie gern taten) und die Reflexionsphase in der kommenden Problemlösestunde für auswertende Gedanken zu nutzen.

Zeit: etwa 10 Min.

Um Lösungskompetenzen zu entwickeln, sollten problemhaltige Denk- und Sachaufgaben regelmäßig in den Mathematikunterricht einbezogen werden. Es erwies sich als sinnvoll, mit den Aufgaben im 14-tägigen Abstand zu arbeiten. Wir setzten in diesen Mathematikstunden keine anderen Unterrichtsinhalte ein (auch keine tägliche Übung).

Es ist für die Schüler/innen wichtig, das Gefühl zu haben, dass Ruhe und Zeit für die Lösungssuche zur Verfügung stehen. Da die Suche nach der Problemlösung im Mittelpunkt steht, hat sie auch für die Kinder Bedeutung und wird kaum nebenbei und „auf die Schnelle“ in Angriff genommen. Auch wenn unser Denken in der Regel vom Füllen einer Stunde mit mehr Unterrichtsstoff ausgeht, erlebten wir bei dem vorgeschlagenen Modell, wie viel Mathematiklernen an einer problemhaltigen Denk- und Sachaufgabe möglich ist.

2.3 Leistung und Bewertung

Jedes Kind wurde durch eine kleine schriftliche Bemerkung unter seinen Lösungsbe-mühungen direkt angesprochen. Es ging vor allen Dingen darum, das anzuerkennen, was es selbst (auch im Zusammenhang mit seiner Arbeitsgruppe) geleistet hatte.

Die Bearbeitung der anspruchsvollen Aufgaben innerhalb der Arbeitsgruppen wur-de erwartungsgemäß vor allem von den leistungsstärkeren Kindern getragen. Dies soll-te man positiv sehen. Es ist für sie eine gute Chance, im Mathematikunterricht etwas leisten zu können. Die Bedeutsamkeit für die Leistungsschwächeren liegt im Mittun und in den kleineren Beiträgen bei der Lösungsfindung, die sie in einer Lösungsgebor-genheit gebenden Arbeitsgruppe durchaus zu leisten imstande sind. Der Effekt ist, dass auch die weniger leistungsfähigen Schüler/innen Spaß an den Aufgaben haben und das (Nach-)Denken trainieren.

Eine Punktbewertung bei diesen Aufgaben ist möglich, wenn die Kinder von Anfang an angehalten werden, ihre Lösungsbemühungen zu dokumentieren. Im Rahmen der Untersuchung wurde mit einem Drei-Punkte-System gearbeitet:

- Ein Punkt wurde vergeben, wenn ein der Aufgabenstellung entsprechender Lö-sungsansatz zu erkennen war;
- zwei Punkte gab es, wenn der Lösungsansatz weiterentwickelt werden konnte, und
- drei Punkte gab es, wenn der Lösungsansatz zu einem Abschluss geführt wurde.

Ich vermeide absichtlich die Formulierung „bis hin zur richtigen Lösung“, da die Ent-wicklung einer Lösung durch das Kind immer auch vom Schwierigkeitsgrad der Auf-gabe und dem Vermögen des Kindes abhängig ist. So wurden für eine besondere Lei-stung, die aber nicht zur richtigen Lösung führte, mitunter 3 Punkte vergeben, wenn dies auch relativ selten war. 0 Punkte gab es, wenn keine erkennbare Lösungsleistung vorlag.

Im Folgenden werden die Denk- und Sachaufgaben in der Reihenfolge vorgestellt, wie sie während der Untersuchung in den Klassenstufen 1 bis 4 eingesetzt wurden. Es ist auch eine andere Abfolge denkbar.