

Marc Sauerwein

Figurierte Zahlen als produktiver Weg in die Mathematik

Ein Entwicklungsforschungsprojekt im Kontext einer Internationalen Vorbereitungsklasse



Springer Spektrum

Figurierte Zahlen als produktiver Weg in die Mathematik

Marc Sauerwein

Figurierte Zahlen als produktiver Weg in die Mathematik

Ein Entwicklungsforschungsprojekt
im Kontext einer Internationalen
Vorbereitungsklasse

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Rainer Kaenders

 Springer Spektrum

Marc Sauerwein
Bonn, Deutschland

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn genehmigte Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.).

Datum der Verteidigung: 14. Januar 2019

Gutachter: Prof. Dr. Rainer Kaenders, Prof. Dr. Andreas Büchter

ISBN 978-3-658-27649-2 ISBN 978-3-658-27650-8 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-27650-8>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Manche von ihnen haben in einer Religionsschule nur rudimentäre Arithmetik gelernt, andere sind in einer staatlichen Schule mit den Anfängen der Infinitesimalrechnung in Kontakt gekommen und eine kleine Gruppe hat eine gediegene mathematische Grundbildung erhalten. Sie alle sind mit sehr individuellen, teilweise traumatischen, Erlebnissen im Gepäck in einer für sie komplizierten und undurchschaubaren deutschen Gesellschaft angekommen und nun in einer Klasse zusammen. Wie kann in einer solchen Klasse Mathematikunterricht gelingen? Nähert man sich dieser Frage an, kann das ganze Repertoire der Mathematikdidaktik und der Pädagogik hilfreich sein.

Dieses Buch stellt ein Forschungsprojekt zu Unterricht in elementarer Algebra mit Schülerinnen und Schüler in Internationalen Vorbereitungsklassen (IVK) vor. Mit diesem Unterricht sollten die Schülerinnen und Schüler dabei unterstützt werden, einen Schulabschluss im deutschen Bildungssystem zu erlangen; das sind im Einzelnen ein Hauptschulabschluss, ein Hauptschulabschluss nach Klasse 10, ein Mittlerer Schulabschluss oder ein Abitur. Lässt man sich auf die Hintergründe der hier zu unterrichtenden Menschen ein, so erkennt man schnell, dass sich mit dem Unterricht an meist geflüchtete Menschen tiefe und grundsätzliche Fragen in verschiedenen Bereichen von Bildung, Kultur, Mathematik, Mathematikphilosophie und -geschichte, Psychologie und mit all dem grundlegende Fragen der Mathematikdidaktik verbinden. Dies geschieht vor dem Hintergrund von Institutionen, Medien und politischen Verhältnissen. Die Erforschung dieses Unterrichts ist relevant, da Vorstellungen und Materialien zu einem gelungenen Mathematikunterricht in einer IVK teilweise noch nicht existieren, sehr variieren oder sich noch bewähren müssen.

In seinem Forschungsansatz betrachtet Marc Sauerwein die mathematikdidaktische Forschung als Entwicklungsforschung (*Design Science* im Sinne von E.Ch. Wittmann, vgl. das Kapitel 4 über Methodik). Dabei sieht sich der Forscher als forschungsbasierte(r) Entwickler(in). Hierfür bedarf es sehr genauer Kenntnisse in relevanten Wissensgebieten, wie der dazugehörigen Mathematikdidaktik und ihren Lerntheorien, der Elementarmathematik, der Mathematikgeschichte und -philosophie. Die Forschungsarbeit besteht nun darin, die zu diesem Zweck notwendigen Hintergründe sorgfältig herauszuarbeiten und in genauer Kenntnis und unter Verwendung dieser Hintergründe Designprinzipien entsprechenden Unterrichts zu *entwickeln*. Dabei begibt man sich – oft auch im Team – in einen Entwicklungszyklus, der sich von dem in den Grundlagen der Naturwissenschaften häufig verwendeten hypothetisch-deduktiven Zyklus unterscheidet (vgl. S. 63). Über letzteren gewinnt man vornehmlich Erkenntnisse als solche, während der Entwicklungszyklus einen entsprechenden Unterricht auch *hervorbringen* sollte.

Genau dies gelingt in dieser Arbeit. Zunächst werden die vielfältigen Aspekte, die mit dem Unterricht zur elementaren Algebra und insbesondere zu Figurierten Zahlen in einer IVK zusammenhängen, nachvollziehbar erkannt. Sie werden vor dem Hintergrund von Forschungsergebnissen in verschiedenen Bereichen der modernen und klassischen Mathematikdidaktik und der Bildungswissenschaft auf hermeneutische Weise begrifflich sauber aufgearbeitet. Aus dieser Perspektive gelingt es, die sich in dem durchgeführten Unterricht ergebenden Gestaltungsnotwendigkeiten, Bedingungen, Situationen und Fragen einzuordnen und entlang der zuvor dargestellten Perspektiven und Prinzipien zu entwickeln. Die mit dem Unterricht in einer IVK verbundene inhaltliche und methodische Freiheit und die dort sichtbar werdenden Voraussetzungen für gelingenden Mathematikunterricht bieten zudem auch die Gelegenheit über Bildungsfragen für den gesamten Mathematikunterricht neu nachzudenken, was noch zusätzlich durch einen Zyklus der Unterrichtseinheit in einer Regelklasse unterstützt wird.

Aber ist es denn gerechtfertigt, mag man an dieser Stelle einwenden, so viel Aufwand für den Unterricht in wenigen Klassen einer einzigen Schule zu betreiben? Dazu muss man wissen, dass hinter diesem Ansatz ein weitergehender Anspruch steht: Versucht man nämlich eine solche Unterrichtsentwicklung auf wissenschaftliche Weise durchzuführen, wird nicht unbedingt nur der in Frage stehende Unterricht entwickelt, sondern es entstehen so genannte *lokale Theorien* (S. 59), die ihrerseits wieder Grundlage für allgemeine Einsichten liefern können. Auch, wenn diese Herangehensweise mühsam ist, so leistet sie durch ihre Erdung in der Praxis einerseits und ihre Verbindung mit theoretischen Ansätzen andererseits der Weiterentwicklung von Mathematikunterricht Vorschub.

Der vorliegende Forschungsbericht gibt einen umfassenden, sehr lesenswerten Einblick in die moderne Mathematikdidaktik zur Elementaren Algebra und insbesondere zu Figurierten Zahlen im Kontext einer Internationalen Vorbereitungsklasse. Es wird deutlich, wie sehr einschlägige Begriffsarbeit und ein konzeptueller theoretischer Rahmen in mathematikdidaktischer Entwicklungsforschung fruchtbar werden können.

Mit der Durchführung dieser Entwicklungsforschung werden die vorgestellten mathematikdidaktischen Konzepte, Perspektiven und Erkenntnisse für die Entwicklung ganz konkreten Unterrichts eingesetzt und daraus werden dann wieder wertvolle allgemeinere Lehren gezogen, die gewissem Maße auch als prototypisch für heterogene Lerngruppen gelten können. So wird nicht nur die Entwicklung von Unterricht in Internationalen Vorbereitungsklassen einen Schritt nach vorne gebracht.

Bonn am Rhein, Juni 2019

Rainer Kaenders

Vorwort

Als ich Ende 2014 mit dem Gedanken spielte in der Didaktik der Mathematik zu promovieren, schien das Thema *Symmetrie* und mögliche Umsetzungen im Unterricht, z.B. als durchziehende fundamentale Idee, schon in Stein gemeißelt zu sein. Aus Sicht meines Studiums der Darstellungstheorie war dies in meinen Augen ein naheliegendes Ansinnen. So beschrieb mein Betreuer der Masterarbeit Prof. Dr. Geordie Williamson das Gebiet der Darstellungstheorie mit dem Motto „don't underestimate symmetry“.¹ Diese voreilige und auch naive Einschätzung bezüglich der unterrichtlichen Praxis relativierte sich nach eingehenden Literaturrecherchen und Gesprächen mit verschiedenen Lehrerinnen und Lehrern. Trotz bekundetem Interesse an dem Thema Symmetrie war dies kein vorrangiges Problem in ihrem eigenen Unterricht. Ein zentrales Anliegen meines Forschungsvorhabens war – und ist es immer noch – im weitesten Sinne die unterrichtliche Praxis zu verbessern.

Dementsprechend änderte sich der Fokus auf die elementare Algebra. Durch den glücklichen Zufall des Kontaktes zu einer Internationalen Vorbereitungsklasse hat sich dann die spannende Kombination ergeben, die in dieser Dissertation behandelt wird: *Algebraunterricht in einer Internationalen Vorbereitungsklasse* mithilfe von *Figurierten Zahlen*. Auch bei diesem faszinierenden mathematischen Gegenstand darf Symmetrie keineswegs unterschätzt werden.

An dieser Stelle möchte ich zuallererst meinem Betreuer *Prof. Dr. Rainer Kaenders* danken. Von Beginn an hat er mir die Möglichkeiten und Freiheiten gegeben, das Projekt nach meinen Vorstellungen zu gestalten und damit eine eigene Sichtweise auf Mathematikdidaktik zu entwickeln. Durch die Betreuung seiner Vorlesung Didaktik der Mathematik 1 im Wintersemester 2014/15 habe ich sehr allgemeine Perspektiven aus dem Feld der Mathematikdidaktik kennenlernen dürfen, die für meine eigene Entwicklung immer wieder neue, produktive Einsichten bereithielten. Wann immer ich an einer wichtigen Abzweigung angelangt war, konnte ich mich voll und ganz auf seine wertvollen Ratschläge verlassen, ohne dass er mich jemals in eine Richtung gedrängt hätte. Seine geometrische Sicht – auch auf die Algebra – konnten mir häufig neue, wertvolle Perspektiven eröffnen. So entstand schrittweise mein eigenes Forschungsprojekt.

Alle diese Freiheiten wurden mir aus finanzieller Sicht vor allem durch ein *Hausdorff Scholarship* des *Hausdorff Centre for Mathematics* und der angegliederten Graduiertenschule *Bonn International Graduate School of Mathematics* ermöglicht. Dafür möchte mich an dieser Stelle bedanken.

¹ Ein sehr schönes Exposé dazu wurde 2013 im Jahrbuch der Max-Planck-Gesellschaft veröffentlicht (Williamson, 2013).

Das Projekt hätte ohne die reibungslose Kooperation mit der Otto-Kühne Schule in Bonn nicht funktionieren können. Der Fachbereich Mathematik hat mich sehr freundlich aufgenommen und mir viele interessante Einblicke in den täglichen Schulalltag ermöglicht. Dafür bin ich allen Kolleginnen und Kollegen der Schule dankbar, speziell möchte ich hier *Dorothea Bade*, *Dr. Ursula Coester*, *Malte Mink* und *Anna Strunk* nennen, die alle auf ihre Weise das Projekt beeinflusst haben.

Herzlich möchte ich den Mitgliedern der Arbeitsgruppe *Mathematik und ihre Didaktik* an der Universität Bonn danken. Das Büro durfte ich in der Zeit mit *Stephan Berendonk*, *Carl Peter Fitting*, *Mareike Mink* und *Martin Rathgeb* teilen. Vielen Dank für die zahlreichen Gespräche und Diskussionen. An dieser Stelle möchte ich auch nicht *Prof. Dr. Ysette Weiss* vergessen, die mir in vielen anregenden Diskussionen andere Sichtweisen aufzeigen konnte.

Schließlich gilt ein riesiger Dank meinen Eltern *Angelika* und *Michael*, meinen Großeltern *Margret* und *Herbert*, meiner Großmutter *Christel* sowie meiner Tante *Martina* für die immerwährende Unterstützung in jeglicher Hinsicht.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Frau *Fabia* danken, dass sie mir in allen Phasen meines Promotionsprojektes zur Seite stand und mich bedingungslos unterstützt hat.

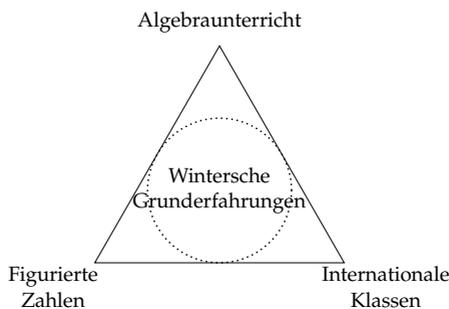
Bonn im Sommer 2019

Marc Sauerwein

Kurzzusammenfassung

Die vorliegende mathematikdidaktische Dissertation untersucht exemplarisch anhand des Algebraunterrichts den Mathematikunterricht in Internationalen Klassen. Dieser scheint aufgrund der Vielfältigkeit der Schülerinnen und Schüler ein Unterfangen mit sehr komplexem Wesen zu sein – selbst im Vergleich zum ebenfalls nicht trivialen Regelunterricht. Das Verstehen dieser komplexen Natur ist ein zentrales Anliegen der Arbeit und sogleich Voraussetzung für jegliche weiterführende Forschung. Das zweite Kernanliegen ist im Sinne des *Design Research* die Entwicklung einer substantiellen Lernumgebung zur Einführung in die elementare Algebra in Internationalen Klassen.

Die Arbeit betrifft die drei Themenfelder: *Internationale Klassen* und *Figurierte Zahlen* sowie *Algebraunterricht*, die nicht hierarchisch und unabhängig voneinander bestehen, sondern in der unterrichtlichen Umsetzung vielfältig interdependent sind. Zur Veranschaulichung adaptieren wir eine Sichtweise auf das didaktische Dreieck „Lehrer – Schüler – Stoff“, in der eine Beziehung, dargestellt durch eine Dreiecksseite, durch den dritten Dreieckspunkt moderiert wird.² Bezogen auf diese Arbeit erhalten wir das folgende Beziehungsgeflecht mit den *Winterschen Grunderfahrungen* als zusätzliche vermittelnde Komponente, die dem Mathematikunterricht eine allgemeinbildende und aufklärerische Funktion abverlangt:



Das genaue Durcharbeiten dieser Abhängigkeiten in einem konkreten Kontext ist das Ziel dieser Dissertation.

² Diese Sichtweise hat der Autor bei einem Vortrag von Dr. Felix Winter im Rahmen des 14. Workshops zur „Tätigkeitstheorie und kulturhistorische Schule“ vom 4.-6. Mai 2018 gelernt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Ausgangsproblematik	1
1.2	Aufbau	2
1.3	Ziele	3
2	Theoretischer Teil	5
2.1	Perspektiven auf Mathematikunterricht	5
2.2	Algebra als Sprache (nach Kvasz)	18
2.3	Elementare Algebra	24
2.4	Historisches zu Figurierten Zahlen	40
3	Entfaltung der Ausgangsproblematik: Mathematikunterricht in einer IVK	49
3.1	Präzisierung der Forschungsabsicht: Mathematikunterricht in Internationalen Klassen	49
3.2	Ableitung der Forschungsmethode	56
4	Methodisches	59
4.1	Design Research	59
4.2	Mathematikdidaktik als <i>design science</i>	62
4.3	Zusammenfassung und Festlegung für diese Arbeit	64
5	Entwicklungsforschung an der konkreten Lernumgebung	75
5.1	Unterrichtliche Problematisierung	75
5.2	Erster Durchgang	103
5.3	Zweiter Durchgang	113
5.4	Dritter Durchgang	124
5.5	Vierter Durchgang	135
6	Ergebnisse	143
6.1	Reflexion der Design-Prinzipien	144
6.2	Didaktische Analyse der Figurierte Zahlen	146
	Literaturverzeichnis	153

Abbildungsverzeichnis

2.1	Die fünf Grundfragen in Anlehnung an Klafki (2007, S.272)	18
2.2	Entwicklung der Sprachen der Mathematik (Kvasz, 2015, S.54)	19
2.3	„Roots of & routes to algebra“ (Mason et al., 1985, S. 6)	33
2.4	Figurierte Zahlen in Wittmann u. Müller (2017, S. 131, ©Ernst Klett Verlag)	38
2.5	„Die Tetraktys“: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (van der Waerden, 1956)	41
2.6	Die Quadrate $1, 4, 9, \dots$ und die Heteromeken $2, 6, 12, \dots$	44
2.7	Das Pascalsches Dreieck mit ausgezeichneten <i>Zahlen</i>	46
3.1	Die Komponenten der Heterogenität	51
4.1	Der Kern und die Bezugsbereiche der Mathematikdidaktik (Wittmann, 1992, S. 58)	63
4.2	Der Entwurfs- bzw. Entwicklungszyklus	65
4.3	Der hypothetisch-deduktive Zyklus	65
5.1	Definition von Variable und Term (Hemmers, 2017a, S. 7, ©Westermann Gruppe)	77
5.2	Tabelle zum Aufstellen von Termen (Hemmers, 2017a, S. 9, ©Westermann Gruppe)	78
5.3	Vokabelliste des Kapitels <i>Mit Termen arbeiten</i> (Çakir Dikkaya, 2017a, S. 27)	80
5.4	Einführungsseite „Mit Termen arbeiten“ (Çakir Dikkaya, 2017a, S. 16) . .	81
5.5	Verschiedene Obstkörbe (Çakir Dikkaya, 2017a, S. 17)	82
5.6	Die Quadratische Gleichung (Çakir Dikkaya, 2017a, S. 34)	83
5.7	Figurierte Zahlen als Lernvehikel	85
5.8	Die Dreierreihe: $3, 6, 9, \dots$	91
5.9	Das <i>Füllglas</i> : $6, 10, 12, \dots$	91
5.10	Der „Rahmen“ (Wellstein, 1978, Fig. 1-4)	93
5.11	Naive Funktion der Figurierten Zahlen	94
5.12	Arbeitsblatt der Lernumgebung „Punktmuster“ (Wessel u. Sprütten, 2018, S. 19)	97
5.13	Die Quadratzahlen (Prediger et al., 2013b, S. 193)	100
5.14	Konstante Punkte (Prediger et al., 2013b, S. 195)	100
5.15	Ergänzungs- und Zerlegungsideen (Prediger et al., 2013b, S. 196)	101
5.16	Die Dreieckszahlen (Prediger et al., 2013b, S. 196)	101
5.17	Drei Strukturierungen (Prediger et al., 2013b, S. 206)	101
5.18	Pias Termvorschläge (Prediger et al., 2013b, S. 206)	102

5.19	Die Kommutativgesetze (Prediger et al., 2015b, S. 104)	102
5.20	Seite 1 des Arbeitsblattes (Durchgang 1)	105
5.21	Seite 2 des Arbeitsblattes (Durchgang 1)	106
5.22	Wiederholung der Bezeichnungen bei der Addition	109
5.23	Bestandteile einer Gleichung	109
5.24	Arbeitsblatt (Durchgang 2)	114
5.25	Musterfolge 1 mit Zähltermen in einem Schülerheft	117
5.26	Arbeitsblatt (Durchgang 3)	125
5.27	Einige Bündelungen von Folge 1 und 3	128
5.28	Rezepte und Bündelungen des <i>Füllglases</i>	130
5.29	Arbeitsblatt (Durchgang 4)	136
6.1	Drei <i>natürliche</i> Repräsentationsformen der Figurierten Zahlen	147
6.2	Die Dreieckszahlen $1, 3, 6, \dots$	148

Tabellenverzeichnis

2.1	Menschenbild \leftrightarrow Bild von Mathematik (Winter, 1975, Abb. 18)	9
2.2	Allgemeine Lernziele (Winter, 1975, Abb. 18)	10
2.3	Allgemeine und spezifische Denkhandlungen der Algebra	35
5.1	Übersicht der Entwicklungszyklen	76
5.2	Übersicht der erarbeiteten Repräsentationsformen des Füllglases	108
5.3	Die Folge der ungeraden Zahlen	119



KAPITEL 1

Einleitung

„I believe that the insights into mathematical learning in contexts where communication between all participants cannot be taken for granted has much to offer. In particular, I don't believe there is any classroom where linguistic capital is equitably distributed. In consequence, what might appear as extremely ‚different‘ settings that do not speak to mainstream practice, in fact are illuminating of communication issues in all classrooms.“ (Adler, 2004, S. 93)

1.1 Die Ausgangsproblematik

Die (elementare) Algebra stellt im Mathematikunterricht eines der klassischen Unterrichtsfelder dar, welches häufig im schulischen Umfeld auch nur mit dem Begriff des *Buchstabenrechnens* bezeichnet wird (vgl. Malle, 1993). Trotz des zum Großteil anerkannten Stellenwerts der Algebra im Kanon des Mittelstufenunterrichts treten verschiedene Schwierigkeiten beim Unterrichten eben dieses Gebietes auf. Malle beschreibt in seinem Werk *Didaktische Probleme der elementaren Algebra* anekdotisch, welche typischen Fehler beim Aufstellen und Umformen von Termen respektive Gleichungen in Interviews beobachtet wurden. Viele weitere ähnliche Gespräche durchziehen sein Buch und es wird deutlich, dass die Befragten trotz mehrjährigen Unterrichts in elementarer Algebra viele grundlegende Konzepte und Operationen nicht beherrschen (vgl. Malle, 1993). Man könnte nun einwenden, dass das Buch schon älter sei und die heutige Situation nicht mehr passend abbilde. Verschiedene Lehrerinnen und Lehrer¹ haben in persönlichen Gesprächen zum Ausdruck gebracht, dass dies keineswegs der Fall sei und befanden unisono, dass die Algebra zwar in der Mittelstufe gelernt aber dennoch bis in die Oberstufe bzw. Studienbeginn (teilweise) wieder vergessen werde. Auch von offizieller Seite wurde dieses Problem festgestellt.² Dem gegenüber steht ein hoher Stellenwert symbolischer Mathematik:

„Man übertreibt sicher nur unwesentlich, wenn man sagt: Nur durch den

¹ Aus Gründen der einfacheren Lesbarkeit wird im Folgenden bei Lehrern, Schülern, etc. das generische Maskulinum verwendet.

² Vgl. hierzu auch die offizielle Stellungnahme der Mathematik-Kommission *Übergang Schule-Hochschule* aus dem Jahr 2017 (Kommission Übergang Schule-Hochschule, 2017).

Gebrauch von Zeichen [einer Symbolsprache, Anm. MS] und den auf sie bezogenen Algorithmen ist eine entwickeltere Mathematik für die ‚breite Masse‘ überhaupt lern- und lehrbar.“ (Winter, 1978, S. 47)

Seit Sommer 2015 wurden an vielen deutschen Schulen *Internationale Klassen*³ für Kinder und Jugendliche mit Migrationshintergrund geschaffen. Sobald in solchen Klassen systematisch unterrichtet wird, gehören Mathematik als Hauptfach und elementare Algebra als Unterrichtsstoff dazu. Der Mathematikunterricht in solchen Klassen unterscheidet sich grundlegend von dem in Regelklassen: Neben den verschiedenen sprachlichen Niveaus sind vor allem die schulischen und kulturellen Vorerfahrungen sehr abwechslungsreich. Im Sommer 2016 entstand kurzfristig die Situation, dass einige Schüler einer IVK in kurzer Zeit elementare Algebra lernen mussten. Zu der Zeit gab es kein bestehendes Material für Algebraunterricht in Internationalen Klassen. Mit kurzer Anlaufzeit wurde eine Lernumgebung entwickelt, die einzelne Aspekte der Besonderheiten einer IVK berücksichtigt. Aus diesem ersten Durchgang entstand schließlich der Ursprung dieses Projektes:

Wie ist es möglich, einen Algebraunterricht zu konzipieren und durchzuführen, der die besonderen Gegebenheiten berücksichtigt und die Schüler einer IVK bei der mathematischen, sprachlichen und begrifflichen Entwicklung im Bereich der Algebra unterstützen kann?

Im Laufe des Projektes wurde deutlich, dass in diesem vielfältigen und lebendigem Umfeld einer IVK dem Mathematikunterricht neben inhaltlichen auch bildungsorientierte und aufklärerische Anforderungen zufallen, die nicht unberücksichtigt bleiben können.

1.2 Aufbau

Der Arbeit zugrunde liegt die von Wittmann (1995) vorgestellte Auffassung von Mathematikdidaktik als *design science* (mehr dazu in Kapitel 4). In seinen Ausführungen expliziert er verschiedene miteinander verwobene Forschungsdesiderate für die Mathematikdidaktik, von denen vor allem die folgenden zwei das Gerüst dieser Arbeit bilden:

- die elementarmathematische Durchdringung von Unterrichtsinhalten und möglichen Unterrichtsinhalten mit dem Ziel, sie für bestimmte Lernergruppen zugänglich zu machen,
- die Entwicklung substantieller Lernumgebungen und die Erforschung ihrer praktischen Umsetzbarkeit, insbesondere im Hinblick auf die Qualität der induzierten Lernprozesse.

³ Unter Internationalen Klassen bzw. IVKs (abgeleitet von Internationalen Vorbereitungsklassen) werden im Folgenden auch Klassenverbände mit weiteren Bezeichnungen wie (Internationale) Willkommensklassen, Internationale Förderklassen (IFK), etc. subsumiert.

In Kapitel 2 werden die grundlegenden bildungstheoretischen, fachdidaktischen und historischen Perspektiven vorgestellt. Diese beziehen sich entweder direkt auf die elementare Algebra oder werden zu dieser in Bezug gesetzt.

Der zu untersuchende Algebraunterricht findet in einer Internationalen Klasse statt. Deren vielschichtige Besonderheiten werden in Kapitel 3 analysiert und die daraus resultierenden Anforderungen und Chancen für einen aufklärerischen Mathematikunterricht beschrieben.

Die Entwicklung der Lernumgebung *Figurierte Zahlen* für den Einstieg in die elementare Algebra wird mit Bezugnahme auf die vorhergehenden Ausführungen in Kapitel 5 in ihrem Verlauf beschrieben. Neben diesem Entwicklungsprozess werden ähnliche Zugänge aus den zuvor bereitgestellten Perspektiven reflektiert.

Die Arbeit schließt in Kapitel 6 mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse. Zu diesen zählt insbesondere eine Didaktische Analyse (nach Klafki) der *Figurierten Zahlen*, die als elementarmathematische Durchdringung im Sinne Wittmanns gesehen werden kann.

1.3 Ziele

„Auch der Einfluss der Alltagskultur dürfte kaum zur Herausbildung wissenschaftlicher Begriffe führen. Es bedarf dazu organisierter Lernprozesse.“
(Winter, 1978, S. 36)

Die Methodik der Entwicklungsforschung (oder auch *Design Research*) ist durch das Streben nach Verknüpfung von unterrichtlicher Theorie und Praxis entstanden. Diese miteinander verschränkten Anliegen spiegeln sich daher in den Zielsetzungen der Arbeit wider, die sich prägnant als nachhaltigen Beitrag zur praktischen Unterrichtskultur zusammenfassen ließen.

Unterricht in IVKs: Die Analyse von Unterricht ist ein komplexes Unterfangen, da dieser durch verschiedenste Merkmale – impliziter oder expliziter Natur – beeinflusst wird. Der (Mathematik-)Unterricht in Internationalen Klassen ist ein relativ junges und weithin unerforschtes Phänomen, welchem sich angenähert und für welches ein besseres Verständnis aufgebaut werden soll.

Substantielle Lernumgebung: Für das praktische Problem des Algebraunterrichts in IVKs soll eine tragfähige Lernumgebung entwickelt werden, die die Besonderheiten von Internationalen Klassen berücksichtigt.

Algebraunterricht: Die genaue Analyse des Entwicklungsprozesses soll zu einer vertieften Einsicht über das Lernen von Algebra führen, die schließlich auch auf den regulären Algebraunterricht ausstrahlen kann.⁴

⁴ So seien „aktuell [...] vergleichsweise wenige unterrichtspraktische Vorschläge zu den Themen ‚Termumformungen‘ und ‚Gleichungen‘“ zu finden (Hefendehl-Hebeker u. Rezat, 2015, S. 143).



KAPITEL 2

Theoretischer Teil

Die Ausgangsproblematik wurde bisher bewusst nur sehr oberflächlich angerissen. In diesem Kapitel werden wir die nötigen theoretischen Grundlagen in vier Teilen bereitstellen. Zu Beginn zeigen wir allgemeinere Sichtweisen auf Mathematikunterricht auf, um diese in späteren Argumentationen nutzen zu können, bevor wir ausschnitthaft eine epistemologische Analyse der Sprache der Mathematik vorstellen und dabei insbesondere auf die Sprache der Algebra fokussieren. Wir schließen dieses Kapitel mit einer mathematisch-fachdidaktischen Einordnung der Schulalgebra sowie einem Abschnitt über figurierte Zahlen, welcher deren Geschichte nachzeichnet und einzelne Einflüsse auf die Zahlentheorie beleuchtet.

2.1 Perspektiven auf Mathematikunterricht

Vielfach wird Mathematik als ein starres Wissenskonstrukt – ob natürlich oder von Menschen erschaffen – angesehen, und aus dieser Sichtweise eine bestimmte Form für eine Mathematiklehre abgeleitet. Diese institutionalisierte Lehre findet vorrangig in der Schule als Mathematikunterricht und an der Universität als Mathematikvorlesung statt. Während sich (im deutschsprachigen Raum) die Vorlesungen mit den dazugehörigen Übungen im Wesentlichen nicht geändert haben, hat sich gezeigt, dass die Unterrichtskultur stärker bildungspolitischen Diskussionen ausgesetzt ist und häufig in eine Position der Rechtfertigung gedrängt wird.

Im Zuge solcher Diskurse wird häufig über den Kern des Schulfaches Mathematik diskutiert und gefragt, welchen Ansprüchen der Mathematikunterricht genügen kann bzw. sollte. Um sich diesem Themenkomplex zu nähern und diesen genauer betrachten zu können, werden im Folgenden einerseits die Interessengruppen nach Paul Ernest vorgestellt und andererseits bildungstheoretische Aspekte des Mathematikunterrichts kurz beleuchtet. Schließlich wird die Didaktische Analyse von Klafki vorgestellt, die weniger grundsätzlich ist, dafür aber – aufbauend auf einem Begriff der Bildung – eine Hilfe für konkrete Unterrichtsplanung sein kann, indem sie einen bestimmten Lerngegenstand nach dessen Bildungsgehalt befragt.

2.1.1 Interessengruppen nach Ernest

Unterricht im Allgemeinen und Mathematikunterricht im Speziellen muss sich immer gegenüber gewissen Erwartungen verschiedener Personenkreise rechtfertigen (vgl. *justification problem* in Niss, 1996): Diese können Eltern, Politiker oder spätere Arbeitgeber sein. Hinter jeder dieser Forderungen stehen verschiedenste Interessen am Mathematikunterricht, die wiederum von vielen anderen Faktoren bedingt werden. Ernest hat in seiner Arbeit (Ernest, 1991) u.a. die Sicht auf Mathematik mit den Zielen des Mathematikunterrichts und weiteren Aspekten verbunden und konnte auf Grundlage der britischen Gesellschaft fünf verschiedene soziale Interessengruppen identifizieren. Insbesondere arbeitete er heraus, dass die zugrunde liegenden Weltanschauungen einen maßgeblichen Einfluss auf die Mathematikdidaktik haben (vgl. Ernest, 1991, S. 137).¹ Im Folgenden werden die fünf Interessengruppen kurz charakterisiert.²

Industrial Trainer: Mathematik wird – wie jedes andere Wissen auch – als ein festes Gerüst bestehend aus Tatsachen, Fertigkeiten und Theorien angesehen, welches über jeden Zweifel erhaben ist. Während die theoretischen Aspekte aufgrund der Komplexität nur für die Eliten zugänglich sind, müssen die Fakten und (Rechen-)Fähigkeiten von jedem korrekt gelernt werden. Die starre gesellschaftliche Hierarchie legt die Ziele der Schule für die einzelnen Kinder fest. Dies bedeutet für den Großteil, dass die Schule einen Ort darstellt, an dem sie Gehorsamkeit und Disziplin lernen sollen: Die grundlegenden mathematischen Fähigkeiten sollen unhinterfragt durch hartes Arbeiten gelernt werden; gesellschaftliche und soziale Themen sind für den Mathematikunterricht irrelevant und werden abgelehnt. Nur die Eliten setzen sich mit weitergehendem mathematischen Wissen auseinander, um sich für spätere Führungspositionen vorzubereiten (vgl. Ernest, 1991, S.140ff).

Technological Pragmatist: Mathematik wird nicht hinterfragt, aber vor allem als nützlich für die Berufswelt angesehen. Im Sinne der Anwendungen gibt es keine beste Methode, dies hängt vom Anwender mit seinen Fähigkeiten und Wissen ab, sowie von der einzelnen praktischen Situation. Die mathematische Ausbildung richtet sich daher stets danach, was im späteren Berufsleben – auch im Rückgriff auf technische Hilfsmittel – gebraucht werden wird. Der starke Fokus auf die Praxis führt zu einem ausbildungähnlichen Unterricht, in dem vor allem durch praktische Erfahrung gelernt wird. Da dem Mathematikunterricht auch eine Selektionsaufgabe zukommt, ist es durch gute Leistungen schon möglich innerhalb der vorhandenen gesellschaftlichen Schichten aufzusteigen (vgl. Ernest, 1991, S. 151ff).

Old Humanist: Mathematik ist eine objektive, unabhängige Wahrheit, die auf Logik

¹ Ernest differenziert dabei zunächst zwischen primären und sekundären Elementen in seinem Modell für *Educational Ideology for Mathematics*. Primäre Elemente sind dabei u.a. die Epistemologie, die Sicht auf Mathematik, die Moralvorstellungen und die Unterrichtsziele. Die sekundären Elemente beschäftigen sich mit den Auffassungen von Mathematikunterricht: Was soll wie gelernt werden? Wie werden die Lernschritte abgefragt? Inwieweit spielen Talent und soziale Herkunft eine Rolle (vgl. Ernest, 1991, S. 134)?

² Da die Einteilung der Gruppen der britischen Gesellschaft entstammt, werden die ursprünglichen Bezeichnungen ohne Übersetzung verwendet.