

Dorothea Hertling

# Zahlbegriffs- entwicklung bei Kindergartenkindern

Lernentwicklungen in verschiedenen  
Settings zur mathematischen  
Frühförderung



Springer Spektrum

---

# Mathematikdidaktik im Fokus

## **Reihe herausgegeben von**

Rita Borromeo Ferri, Kassel, Deutschland

Andreas Eichler, Kassel, Deutschland

Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Kassel, Deutschland

In dieser Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert. Dazu gehören auch qualitative, quantitative und erkenntnistheoretische Arbeiten aus den Bezugsdisziplinen der Mathematikdidaktik, wie der Pädagogischen Psychologie, der Erziehungswissenschaft und hier insbesondere aus dem Bereich der Schul- und Unterrichtsforschung, wenn der Forschungsgegenstand die Mathematik ist.

Die Reihe bietet damit ein Forum für wissenschaftliche Erkenntnisse mit einem Fokus auf aktuelle theoretische oder empirische Fragen der Mathematikdidaktik.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/16000>

---

Dorothea Hertling

# Zahlbegriffs- entwicklung bei Kindergartenkindern

Lernentwicklungen in verschiedenen  
Settings zur mathematischen  
Frühförderung

 Springer Spektrum

Dorothea Hertling  
Ravensburg, Deutschland

Dissertation an der Universität Kassel, Fachbereich 10 Mathematik und Naturwissenschaften, u.d.T.: Dorothea Hertling, Zahlbegriffsentwicklungen von Kindergartenkindern in unterschiedlichen Settings zur mathematischen Frühförderung. Eine Untersuchung der Lernentwicklungen von Kindern mit vergleichsweise gering entwickelten arithmetischen Fähigkeiten beim Erwerb des Zahlbegriffs im letzten Kindergartenhalbjahr, Tag der Disputation: 20.09.2019

Erstgutachterin: Prof<sup>in</sup> Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Universität Kassel  
Zweitgutachterin: Prof<sup>in</sup> Dr. Stephanie Schuler, Universität Koblenz-Landau  
Drittgutachter: Prof. Dr. Andreas Eichler, Universität Kassel

Mathematikdidaktik im Fokus

ISBN 978-3-658-28881-5

ISBN 978-3-658-28882-2 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-28882-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

## Vorwort

Spielintegrierte mathematische Frühförderung (SpimaF) – nicht zuletzt die Mitarbeit an diesem Forschungsprojekt weckte mein Interesse an mathematischen Lernprozessen im frühen Kindesalter. Im Rahmen der Datenerhebung des Projektes konnte ich viele Kinder beim Spielen mathematisch gehaltvoller Regelspiele beobachten und war dabei immer wieder fasziniert von der Motivation, die sie beim Spielen zeigten wie auch von den gedanklichen Leistungen dieser jungen Kinder. Es war häufig offensichtlich:

*„Spielen und Lernen sind insbesondere bei kleinen Kindern untrennbar miteinander verbunden.“* (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg 2006, 123)

Zuvor waren mir zur gezielten Anregung mathematischer Lernprozesse im frühen Kindesalter allerdings eher Trainingsprogramme, wie das weit verbreitete Programm „Entdeckungen im Zahlenland“ von Dr. Preiß, bekannt. Wie können Kinder in diesem Alter nun tatsächlich (am besten) beim Mathematiklernen unterstützt werden? Diese und viele weitere Fragen zum frühkindlichen Mathematiklernen ließen mich seitdem nicht mehr los und führten letztendlich zur Entstehung dieser Arbeit.

Auf diesen „wissenschaftlichen Weg“ hat mich ganz unverhofft meine Doktormutter gebracht. Deshalb gilt mein allererster und ganz besonderer Dank Frau Prof. Dr. Rathgeb-Schnierer. Sie hat mich stets durch ihre Wertschätzung und ihr Vertrauen bestärkt und mir durch ihre Betreuung und ihr Engagement die nötige Unterstützung beim Gelingen dieser Arbeit entgegengebracht. Ebenso möchte ich mich ganz herzlich bei meiner Zweitgutachterin Frau Prof. Dr. Schuler dafür bedanken, dass sie sich bereiterklärt hat, meine Arbeit mitzubetreuen.

Ferner möchte ich mich auch beim Land Baden-Württemberg, vertreten durch die Pädagogische Hochschule Weingarten, für das Promotionsstipendium bedanken. Nur dadurch war es mir möglich, meine Arbeit nach meiner Anstellung an der Pädagogischen Hochschule Weingarten fertigzustellen. In diesem Zusammenhang gilt mein Dank auch Herrn Prof. Dr. Gerald Wittmann, der mich neben Frau Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer bei der Beantragung des Sti-

pendiums unterstützt hat. Ebenso möchte ich mich für die finanzielle Unterstützung des Zentrums für Elementar- und Primarbildung der Pädagogischen Hochschule Weingarten für die finanzielle Unterstützung bedanken.

Durch konstruktive Rückmeldungen und anregende Gespräche haben die TeilnehmerInnen des hochschulübergreifenden Doktorandenkolloquiums (Ludwigsburg, Freiburg, Weingarten) einen wesentlichen Beitrag zur kontinuierlichen Weiterentwicklung meiner Arbeit geleistet. Mein Dank gilt stellvertretend den Initiatoren Frau Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Frau Prof. Dr. Silvia Wesolowski und Herr Prof. Dr. Gerald Wittmann. Genauso gewinnbringend waren die regelmäßigen hochschulinternen Doktorandentreffen – Danke an Prof. Dr. Charlotte Rechtsteiner, Julia Böhringer, Dr. Julia Weinsheimer und Benjamin Jorga für die aufgebrauchte Zeit und die konstruktiven Gedanken.

Für die zuverlässige Unterstützung bei der Strukturierung der Daten danke ich Verena Baur.

Mein Dank gilt im Besonderen auch den teilnehmenden Kindergärten sowie den Eltern der Kinder, deren Zustimmungen für die Durchführung der Interviews notwendig waren. Dabei geht der größte Dank natürlich an die Kinder selbst, die sich immer wieder bereit erklärt haben, mit mir zu arbeiten und mich über Jahre hinweg an meinem Schreibtisch begleitet haben.

Danken möchte ich auch meinen Freunden, die mich immer wieder mit ihrer Geduld und Zuversicht unterstützten – sowohl wenn es um Fragen im Zusammenhang mit meiner Arbeit als auch um den nötigen Abstand zu meiner Arbeit ging.

Der allergrößte Dank geht ohne Zweifel an meine Familie. Ohne das Vertrauen und die Unterstützung meiner Eltern Vera und Helmut Bussmann wäre diese Arbeit nie entstanden. Darüber hinaus möchte ich vor allem meinem Mann Valentin Hertling und meinem Sohn Leonidas danken. Sie hatten es nicht immer leicht mit mir – wenn wieder einmal die Anspannung die Entspannung überwog oder die gemeinsame Zeit zugunsten der Zeit am Schreibtisch auf der Strecke blieb. Für die aufgebrauchte Geduld und den nötigen Rückhalt danke ich ihnen von ganzem Herzen.

*Dorothea Hertling*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>Teil I Theoretischer Rahmen und Stand der Forschung</b> .....	<b>7</b>
1 Frühkindliche Bildung.....	8
1.1 Die Bildungsfunktion der Kindertagesstätten.....	8
1.1.1 Entstehungsgeschichte der Bildungsfunktion – wesentliche Entwicklungslinien .....	9
1.1.2 Mathematische Bildung in den Rahmenplänen frühkindlicher Bildung .....	11
1.2 Frühe mathematische Bildung.....	13
1.2.1 Begründung früher mathematischer Bildung .....	14
1.2.2 Etappen der mathematischen Bildung im vorschulischen Bereich .....	20
1.2.3 Bereiche der frühen mathematischen Bildung – ein Überblick.....	21
2 Zahlbegriffsentwicklung als zentraler Bereich früher mathematischer Bildung ...	28
2.1 Die Zahlbegriffsentwicklung .....	29
2.1.1 Modelle zur Zahlbegriffsentwicklung .....	29
2.1.2 Der Erwerb des Zahlbegriffs.....	32
2.1.3 Zusammenfassung .....	38
2.2 Der Zahlbegriff und seine Aspekte .....	39
2.3 Komponenten des Zahlbegriffs.....	40
2.3.1 Spezifische Prädiktormerkmale nach Krajewski (2003) und Dornheim (2008).....	40
2.3.2 Begriffsklärung und Positionierung.....	44
2.3.3 Mathematische Grunderfahrungen im Rahmen der Zahlbegriffsentwicklung.....	46
2.4 Zusammenfassung und Systematisierung relevanter Basisfähigkeiten .....	48
3 Mathematische Basisfähigkeiten beim Zahlbegriffserwerb im Vorschulalter .....	50
3.1 Spezifische mathematische Basisfähigkeiten .....	50
3.1.1 Zahlen-Wissen .....	51
3.1.2 Zahlsymbol-Wissen .....	77

---

3.1.3	Mengen-Wissen: Mengen vergleichen .....	79
3.2	Unspezifische mathematische Basisfähigkeiten .....	80
3.2.1	Konzeptuelles Mengenverständnis .....	80
3.2.2	Mathematische Denk- und Handlungsweisen .....	84
4	Ansätze zur frühen mathematischen Bildung .....	90
4.1	Lehrgänge und (Förder-)Programme .....	91
4.1.1	Beispiel: Entdeckungen im Zahlenland (Preiß 2004, 2005) .....	92
4.1.2	Reflexion des lehrgangsorientierten Ansatzes .....	95
4.2	Integrative Konzeptionen .....	96
4.2.1	Beispiel: Mathe-Kings (Hoenisch & Niggemeyer 2004) .....	97
4.2.2	Reflexion des integrativen Ansatzes .....	98
4.3	Punktuell einsetzbare Materialien .....	99
4.3.1	Beispiel: Regelspiele des Projektes Spielintegrierte mathematische Frühförderung .....	100
4.3.2	Reflexion des Ansatzes der Förderung mit punktuell einsetzbaren Materialien .....	102
4.4	Zusammenfassung .....	102
5	Settings mathematischer Lerngelegenheiten im Kindergarten .....	106
5.1	Lehrgänge .....	106
5.2	Arrangierte und instruierte Lernsettings .....	106
5.3	Angebote .....	107
5.4	Natürliche Lernsituationen im Kindergartenalltag .....	108
5.5	Freies Lernsetting .....	109
5.6	Zusammenfassung .....	109
5.6.1	Mathematisches Lernen im Rahmen von Lehrgängen oder Trainingsprogrammen .....	111
5.6.2	Mathematisches Lernen in punktuellen, von der Erzieherin geplanten und vorbereiteten Lernsituationen .....	111
5.6.3	Mathematisches Lernen integriert in den Kindergartenalltag und in Freispielsituationen .....	112
5.7	Exkurs: Begleitung mathematischer Lernprozesse .....	113
6	Stand der Forschung zu Möglichkeiten früher mathematischer Förderung .....	115
6.1	Studien zur Umsetzung früher mathematischer Förderung .....	115

---

6.1.1	Studien zum Mathematiklernen beim Spielen von Regelspielen .....	116
6.1.2	Studien zum Mathematiklernen mit lehrgangsartigen Programmen	117
6.1.3	Studien zum Mathematiklernen mit flexibel einsetzbaren Materialien und integrativen Konzeptionen .....	118
6.2	Studien zu den Bedingungen des Lernens .....	120
6.3	Empirische Befunde zur Entwicklung mathematischen Vorwissens bei „benachteiligten Kindern“ .....	121
6.4	Zusammenfassung: Forschungsergebnisse und Forschungsdesiderate ...	123
6.5	Forschungsfragen .....	126
<b>Teil II Forschungsmethodische Hintergründe .....</b>		<b>131</b>
1	Forschungsdesign .....	131
1.1	Methode der Datenerhebung .....	131
1.2	Gestaltung der Datenerhebung .....	132
1.3	Untersuchungsverlauf .....	133
2	Das Interview als Datenerhebungsinstrument .....	135
2.1	Das Leitfadenterview .....	135
2.2	Das klinische Interview .....	136
2.2.1	Möglichkeiten der Ausgestaltung klinischer Interviews .....	136
2.2.2	Der Leitfaden im klinischen Interview .....	139
2.3	Wesentliche Gesichtspunkte bei Befragungen (von Kindern) .....	140
3	Die Datenauswertung .....	144
3.1	Qualitative Inhaltsanalyse .....	144
3.1.1	Allgemeine Beschreibung .....	144
3.1.2	Strukturierende Inhaltsanalyse .....	145
3.1.3	Induktive Kategorienbildung .....	147
3.1.4	Evaluative qualitative Inhaltsanalyse .....	149
3.2	Typenbildung .....	151
3.2.1	Begriffsklärung .....	152
3.2.2	Der Prozess der Typenbildung .....	153

<b>Teil III Die empirische Untersuchung.....</b>	<b>157</b>
1 Die Stichprobe .....	157
1.1 Auswahl der Kindergärten .....	158
1.2 Auswahl der Kinder .....	158
1.3 Beschreibung des standardisierten Tests .....	159
1.3.1 Auswahl des Testverfahrens .....	160
1.3.2 Aufbau des Tests „MARKO-D“ .....	161
1.3.3 Auswertung .....	164
1.3.4 Reflexion des eingesetzten Testverfahrens .....	165
1.4 Beschreibung der Stichprobe.....	166
1.4.1 Die Kinder .....	167
1.4.2 Die Kindergarten-Settings .....	168
2 Die Datenerhebung – das eingesetzte Interview .....	174
2.1 Der Spielplan .....	176
2.2 Die Spielkarten .....	178
2.3 Die Aufgaben .....	181
2.3.1 Beschreibung der Aufgaben .....	181
2.3.2 Theoretische Einordnung der Aufgaben .....	193
2.4 Der Interviewverlauf .....	200
2.5 Gütekriterien qualitativer Datenerhebung .....	200
2.6 Reflexion des Interviews .....	202
3 Die Aufbereitung und Analyse der Daten .....	203
3.1 Aufbereitung der Daten .....	204
3.2 Auswertung der Aufgabenbearbeitungen der Kinder .....	206
3.3 Analyse des Lernstandes der Kinder in Form von Niveaustufen .....	217
3.3.1 Festlegung der Bewertungskategorien .....	217
3.3.2 Erstellung von Niveaustufen .....	219
3.3.3 Feststellung des fähigkeitsbezogenen Entwicklungsniveaus der Kinder .....	224
3.3.4 Analyse und Ergebnisdarstellung .....	229
3.3.5 Umgang mit „fehlenden Werten“ .....	231

3.4	Zusammenhangsanalyse zwischen spezifischen und unspezifischen mathematischen Basisfähigkeiten.....	232
3.4.1	Festlegung der Bewertungskategorien und Definition ihrer Ausprägungen .....	233
3.4.2	Gesamteinschätzung der spezifischen und unspezifischen mathematischen Basisfähigkeiten .....	237
3.4.3	Zusammenführung von spezifischen und unspezifischen mathematischen Basisfähigkeiten .....	241
3.4.4	Umgang mit „fehlenden Werten“ .....	243
3.4.5	Zuverlässigkeit bei der Zuordnung der Ausprägungsgrade.....	245
4	Die Entwicklung einer Typologie zum Ersten Rechnen (mit Abzählmöglichkeit) von Vorschulkindern.....	246
4.1	Die analysierten Aufgaben .....	246
4.2	Entwicklung der Typologie .....	248
4.2.1	Erarbeitung relevanter Vergleichsdimensionen .....	248
4.2.2	Gruppierung der Fälle und Analyse der empirischen Regelmäßigkeiten.....	251
4.2.3	Analyse der inhaltlichen Sinnzusammenhänge und Typenbildung ....	252

## **Teil IV Ergebnisse und Erkenntnisse.....259**

1	Beschreibung und Interpretation der Entwicklungsniveaus und Entwicklungsverläufe beim Zahlbegriffserwerb.....	260
1.1	Beschreibung der festgestellten Entwicklungsniveaus.....	260
1.2	Beschreibung und Interpretation der Entwicklungsverläufe.....	264
1.2.1	Entwicklungsverläufe der Kinder, die mit „insgesamt gering ausgeprägten mathematischen Basisfähigkeiten“ gestartet sind .....	265
1.2.2	Entwicklungsverläufe der Kinder, die mit „gut ausgeprägten spezifischen und gering ausgeprägten unspezifischen mathematischen Basisfähigkeiten“ gestartet sind .....	268
1.2.3	Entwicklungsverläufe der Kinder, die mit „gering ausgeprägten spezifischen und gut ausgeprägten unspezifischen mathematischen Basisfähigkeiten“ gestartet sind .....	271
1.2.4	Entwicklungsverläufe der Kinder, die mit „insgesamt gut ausgeprägten mathematischen Basisfähigkeiten“ gestartet sind .....	272

1.2.5	Entwicklungsverläufe der Kinder, die mit „sehr gut ausgeprägten spezifischen und gut ausgeprägten unspezifischen mathematischen Basisfähigkeiten“ gestartet sind .....	274
1.2.6	Entwicklungsverläufe der Kinder, die mit „sehr gut ausgeprägten unspezifischen, jedoch gering ausgeprägten spezifischen mathematischen Basisfähigkeiten“ gestartet sind .....	276
1.2.7	Entwicklungsverläufe der Kinder, die mit „gut ausgeprägten spezifischen und sehr gut ausgeprägten unspezifischen mathematischen Basisfähigkeiten“ gestartet sind .....	277
1.3	Separate Betrachtung der beiden Komponenten .....	278
1.3.1	Beschreibung der Entwicklungsverläufe der Kinder in den beiden Komponenten .....	278
1.3.2	Entwicklungsverläufe ohne Fortschritt.....	282
1.4	Entwicklungen der Kinder mit ähnlichem t-Wert.....	286
1.5	Einfluss der verschiedenen Settings .....	290
1.5.1	Offenen Angebote unter Rückgriff auf mathematisch gehaltvolle Regelspiele .....	291
1.5.2	Lehrgang: Programm Zahlenland (Preiß 2004) .....	293
1.5.3	Instruierte oder arrangierte Angebote .....	295
1.5.4	Freies Setting, natürliche Lernsituationen im Kita-Alltag .....	297
2	Typologie zum Ersten Rechnen von Vorschulkindern .....	300
2.1	Charakterisierung der Typen .....	300
2.1.1	Der Mischtyp (Mischung verschiedener Vorgehensweisen) mit geringer Lösungsrichtigkeit.....	302
2.1.2	Der unsichere Alleszähler.....	303
2.1.3	Der sichere Alleszähler .....	304
2.1.4	Der sichere Alleszähler mit versuchsweisen Abweichungen.....	305
2.1.5	Der sichere Alleszähler mit zielführenden Abweichungen.....	306
2.1.6	Der Erste Rechner .....	307
2.2	Einordnung der Typen in die Theorie .....	309
2.3	Beschreibung und Interpretation der Entwicklungsverläufe .....	312
2.3.1	Entwicklungsverläufe zum Mischtyp mit geringer Lösungsrichtigkeit .....	313
2.3.2	Entwicklungsverläufe zum Unsicheren Alleszähler .....	314

2.3.3	Entwicklungsverläufe zum Sicherem Alleszähler (ohne Alternativen).	315
2.3.4	Entwicklungsverläufe zum Sicherem Alleszähler mit versuchsweisen Abweichungen.....	316
2.3.5	Entwicklungsverläufe zum Sicherem Alleszähler mit zielführenden Abweichungen.....	317
2.3.6	Entwicklungsverläufe zum Ersten Rechner .....	318
2.4	Einfluss des Settings auf die Entwicklungen der Kinder im Bereich des Ersten Rechnens .....	319
2.4.1	Offene Angebote unter Rückgriff auf mathematisch gehaltvolle Regelspiele .....	319
2.4.2	Lehrgang: Programm Zahlenland (Preiß 2004) .....	321
2.4.3	Instruierte oder arrangierte Angebote .....	324
2.4.4	Freies Setting, natürliche Lernsituationen im Kita-Alltag .....	325
3	Deutungshypothesen .....	327
3.1	Hypothesen im Zusammenhang mit der Förderung arithmetischer Basisfähigkeiten .....	328
3.2	Hypothesen im Zusammenhang mit der Typologie zum Ersten Rechnen.	339
4	Weitere Ergebnisse.....	347
4.1	Anzahl-Anordnungen werden häufig unter Rückgriff auf Würfelbilder als Interpretationsfolie strukturiert.....	347
4.2	Die Entwicklung der unspezifischen mathematischen Basisfähigkeiten geht mit der Entwicklung der spezifischen mathematischen Basisfähigkeiten einher.....	348
5	Zusammenfassung.....	351
	<b>Diskussion und Ausblick .....</b>	<b>361</b>
	<b>Literatur .....</b>	<b>369</b>
	<b>Anhang.....</b>	<b>391</b>
Anhang 1:	Interviewleitfaden Goldstückspiel .....	391
Anhang 2:	Kodiermanual.....	407
Anhang 2.1:	Kategoriensystem „spezifische mathematische Basisfähigkeiten“ aus MAXQDA.....	407
Anhang 2.2:	Kodierleitfaden „spezifische mathematische Fähigkeiten“ .....	411

---

Anhang 2.3:	Kategoriensystem „unspezifische mathematische Basisfähigkeiten“ aus MAXQDA .....	440
Anhang 2.4:	Kodierleitfaden „unspezifische mathematische Fähigkeiten“ .....	441
Anhang 3:	Bewertungskategorien mit Niveaustufen und Zuordnungsregeln .....	451
Anhang 3.1:	Niveaustufen und Zuordnungsregeln „spezifische mathematische Basisfähigkeiten“ .....	451
Anhang 3.2:	Niveaustufen und Zuordnungsregeln „unspezifische mathematische Basisfähigkeiten“ .....	457
Anhang 4:	Fragebogen an die fröhpädagogischen Fachkräfte .....	460



## Einleitung

„Auf den Anfang kommt es an.“

(Bundesministerium für Bildung und Forschung 2007, Titel)

Angestoßen durch die Ergebnisse internationaler Schulleistungsstudien wie TIMSS und PISA rückte die frühkindliche Bildung zu Beginn des 21. Jahrhunderts verstärkt in den Fokus der Aufmerksamkeit. Dabei wurden insbesondere auch Bereiche in den Blick genommen, die bislang in der Frühpädagogik eine eher untergeordnete Rolle spielten, wie der der mathematischen Bildung (u.a. Gasteiger 2010; Hasselhorn & Schneider 2011; Hellmich 2008; Krajewski 2003; Rathgeb-Schnierer 2012; Roux 2008; Royar 2007a; Wittmann 2006). „Das Bewusstsein dafür, dass frühe mathematische Förderung notwendig und sinnvoll ist, um den Kindern gute Ausgangsbedingungen für das weitere Lernen zu ermöglichen, schärfte sich in den letzten Jahren immer mehr“ (Gasteiger 2010, 65). Vielfach wurde die große Bedeutung „relevanten Vorwissens und erster elementarer Fähigkeiten in Mathematik im vorschulischen Bereich [...] für die Erklärung mathematischer Kompetenzen bei Kindern im Grundschulalter“ (Hellmich 2008, 91) herausgearbeitet. Es ist „davon auszugehen, dass die frühe Anregung mathematischen Lernens die Entwicklung mathematischer Kompetenzen beim Kind maßgeblich beeinflussen kann“ (Gasteiger 2010, 65). Mathematiklernen beginnt demnach nicht erst mit dem Eintritt in die Schule, sondern bereits im frühen Kindesalter. Daher kommt den Kindertageseinrichtungen eine bedeutende Rolle in der frühen mathematischen Kompetenzentwicklung der Kinder zu, denn hier soll „der Grundstein für späteres Lernen gelegt werden“ (Heinze & Grüßing 2009, 15). Diese Erkenntnis sowie das Wissen darüber, dass wichtige mathematische Fähigkeiten bereits vor Schuleintritt entwickelt werden, betonen den großen Stellenwert früher mathematischer Bildung (Krajewski 2003; Royar 2007a). Als Konsequenz dieser Erkenntnisse erschien eine Vielzahl verschiedener Materialien und Konzeptionen zur frühen mathematischen Bildung auf dem Verlagsmarkt (z.B. Friedrich & de Galgoczy 2004; Krajewski, Nieding & Schneider 2007; Lee Hülswitt 2008; Lee 2010; Müller & Wittmann 2002, 2004; Preiß 2004, 2005).

Mit der Entwicklung von Materialien und Konzeptionen ging die Fokussierung der mathematischen Bildung im vorschulischen Bereich durch die Forschung einher. So konnte beispielsweise die Wirksamkeit von Trainingsprogrammen – insbesondere den Programmen *Zahlenland* (Preiß 2004, 2005) und *Mengen, zählen, Zahlen* (Krajewski u.a. 2007) – bereits in verschiedenen Studien nachgewiesen werden (Friedrich & Munz 2006; Krajewski, Grüßing & Peter-Koop 2009; Sinner 2011b). Ebenso der positive Einfluss des regelmäßigen Einsatzes herkömmlicher Würfelspiele (Gasteiger 2013) bzw. mathematisch gehaltvoller Regelspiele (Rechsteiner & Hauser 2012) auf die Entwicklung elementarer mathematischer Fähigkeiten.

Während inzwischen weitgehend Einigkeit darüber herrscht, dass im Kindergarten der Grundstein für das schulische Lernen – auch im mathematischen Bereich – gelegt werden soll sowie darüber, dass bereits junge Kinder mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten erwerben können (z.B. Heinze & Grüßing 2009; Kaufmann 2010; Lorenz 2008; Wittmann 2004), gibt es zur Frage nach der Art und Weise unterschiedliche Ansätze. Es sind daher „weitere Forschungsarbeiten nötig [...], in denen nicht nur die Wirksamkeit, sondern insbesondere auch die Wirksamkeitsbedingungen von Förderkonzepten näher beleuchtet werden“ (Sinner 2011a, 75) und der Frage nachgegangen wird, „welche Ziele bei welchen Kindern mit welchen Fördermaßnahmen erreichbar sind“ (Hasselhorn & Schneider 2011, 6).

Hier knüpft die vorliegende Studie an. Sie beabsichtigt die Fokussierung der Lernentwicklungen von Kindergartenkindern mit vergleichsweise gering entwickelten arithmetischen Fähigkeiten im Zusammenhang mit unterschiedlichen „Fördermaßnahmen“ (im Sinne von unterschiedlichen Settings bei der Umsetzung der frühen mathematischen Förderung). Ziel ist die Beschreibung der Lernentwicklungen dieser Kinder beim Zahlbegriffserwerb und die Generierung von Hypothesen über den Einsatz verschiedener Konzepte früher mathematischer Bildung in Bezug auf die Förderung von Kindern mit vergleichsweise gering entwickelten arithmetischen Fähigkeiten zu Beginn ihres letzten Kindergartenhalbjahres. Damit möchte die vorliegende Arbeit einen Beitrag zur Weiterentwicklung der frühen mathematischen Förderung im Elementarbereich leisten; besonders mit Blick auf Kinder mit vergleichsweise gering entwickelten arithmetischen Fähigkeiten zu Beginn des letzten Kindergartenhalbjahres.

Die Lernentwicklungen von Vorschulkindern beim Zahlbegriffserwerb wurden in verschiedenen Kindergärten im letzten Kindergartenhalbjahr untersucht. Dazu wurden im Laufe des letzten Halbjahres Interviews geführt. Folgende Frage steht im Mittelpunkt der Forschungsarbeit:

**Welche Lernentwicklungen zeigen Kinder mit vergleichsweise gering entwickelten arithmetischen Fähigkeiten beim Erwerb des Zahlbegriffs in unterschiedlichen Settings zur mathematischen Frühförderung im letzten Kindergartenhalbjahr?**

Um Einblicke in die Lernentwicklungen der Kinder zu erhalten, führte ich während des letzten Kindergartenhalbjahres im Abstand von zwei Monaten drei Interviews mit ausgewählten Kindern. Die leitfadengestützten Interviews enthielten als Kern ein Spiel, das sich an der „Lernstandserfassung mit dem Goldstückspiel“ (Moser Opitz & Schmassmann 2007) orientierte. Die Interviews wurden anschließend qualitativ ausgewertet und bildeten die Grundlage für die Beschreibung der Lernentwicklungen der Kinder sowie die Generierung von Hypothesen.

Die vorliegende Studie ist in folgende vier<sup>1</sup> Teile gegliedert:

- Teil I: Theoretischer Rahmen und Stand der Forschung
- Teil II: Forschungsmethodische Hintergründe
- Teil III: Die empirische Untersuchung
- Teil IV: Ergebnisse und Erkenntnisse

Der erste Teil „*Theoretischer Rahmen und Stand der Forschung*“ beschäftigt sich mit den theoretischen Aspekten, die für die vorliegende Arbeit eine Rolle spielen und greift in diesem Kontext relevante Forschungsbefunde auf. Zunächst wird die frühkindliche Bildung im Allgemeinen und mit Blick auf den mathematischen Bereich fokussiert (Kapitel 1). Daran schließt sich eine Beschäftigung mit dem Zahlbegriffserwerb an (Kapitel 2), wobei die Auseinandersetzung mit mathematischen Fähigkeiten, die für Kinder im vorschulischen Bereich von Bedeutung

---

<sup>1</sup> Zahlen bis zwölf werden in der gesamten Arbeit in der Regel als Zahlwort geschrieben. Treten diese jedoch in Verbindung mit Kinderaussagen, Zahlensätzen (Rechnungen), als Größenangaben oder in Tabellen auf, werden Zahlzeichen verwendet.

sind, im Zentrum steht. Diese mündet in einer Zusammenstellung relevanter mathematischer Basisfähigkeiten, auf der diese Arbeit aufbaut. Die zusammengestellten Fähigkeiten werden anschließend detailliert beschrieben (Kapitel 3). Auf verschiedene Materialien und Konzeptionen, die zur Förderung der herausgearbeiteten mathematischen Fähigkeiten vorliegen, geht das folgende Kapitel ein (Kapitel 4). Es schließt sich die Frage an, wie mathematische Auseinandersetzungen im Kindergarten organisiert und ausgestaltet werden können. In diesem Kapitel wird zudem auf die Hintergründe der Begleitung mathematischer Lernprozesse eingegangen (Kapitel 5). Das letzte Kapitel gibt einen Überblick über ausgewählte, für die vorliegende Untersuchung relevante Forschungsbefunde zu verschiedenen Möglichkeiten früher mathematischer Förderung und leitet daraus die zentralen Forschungsfragen der vorliegenden Arbeit ab (Kapitel 6).

Der zweite Teil „*Forschungsmethodische Hintergründe*“ dient dazu, das Forschungsdesign vorzustellen und in diesem Kontext wesentliche forschungsmethodische Überlegungen und Entscheidungen zu erläutern und zu begründen (Kapitel 1). Um eine Grundlage für das Verständnis der im Rahmen der vorliegenden Studie konkret durchgeführten Untersuchungs-Schritte zu schaffen, werden anschließend die für diese Arbeit relevanten Methoden der Datenerhebung (Kapitel 2) und Datenauswertung (Kapitel 3) theoriebasiert beschrieben.

Im dritten Teil wird „*die empirische Untersuchung*“ dargestellt. Dazu gehört die Beschreibung der Stichprobe (Kapitel 1), die Darstellung des eingesetzten Interviews (Kapitel 2) und die ausführliche Erläuterung der Aufbereitung und Analyse der Daten (Kapitel 3) sowie der sich anschließenden Typenbildung (Kapitel 4).

Die empirischen Ergebnisse werden im vierten Teil „*Ergebnisse und Erkenntnisse*“ vorgestellt und zusammengefasst. Zunächst werden die Entwicklungsverläufe der Kinder beim Zahlbegriffserwerb unter verschiedenen Blickwinkeln aufgezeigt (Kapitel 1). Es folgt die Charakterisierung der entwickelten Typologie zum Ersten Rechnen von Vorschulkindern und die auf dieser Typologie basierende Beschreibung der Entwicklungsverläufe der Kinder im Bereich des Ersten Rechnens (Kapitel 2). Daraus lassen sich verschiedene Deutungshypothesen generieren (Kapitel 3) und weitere Ergebnisse ableiten (Kapitel 4). Abschließend werden die Ergebnisse zusammengefasst, in dem die zu Beginn formulierten Forschungsfragen beantwortet werden (Kapitel 5).

---

Den Abschluss der Arbeit bildet das Kapitel „*Diskussion und Ausblick*“. Hier werden die Ergebnisse der Untersuchung zusammengefasst, reflektiert und diskutiert sowie Konsequenzen für die mathematikdidaktische Forschung, die Aus- und Weiterbildung frühpädagogischer Fachkräfte und die Kindergartenpraxis formuliert.



## Teil I Theoretischer Rahmen und Stand der Forschung

*„Weder die Verschulung des Kindergartens, noch der ausschließlich auf Bedürfnisbefriedigung und Selbstbestimmung ausgerichtete Kindergarten werden seinem Bildungs- und Erziehungsauftrag gerecht.“*

(Thiesen 2010, 10)

In diesem Teil der Arbeit erfolgt die theoretische Verortung des Themas, indem ein Überblick über die im Rahmen der Untersuchung relevanten Aspekte gegeben wird, denn: „Jede Forschungsarbeit [...] beruht auf einem speziellen Vorverständnis des zu untersuchenden Forschungsgegenstandes. Darauf aufbauend werden Grundannahmen entwickelt, die für die Planung und Durchführung der Untersuchung handlungsleitend sind“ (Rathgeb-Schnierer 2006, 88).

Zunächst wird frühkindliche Bildung allgemein und anschließend domänenspezifisch mit Blick auf die Mathematik fokussiert (Kapitel 1) und daraus als zentraler inhaltlicher Aspekt der Zahlbegriffserwerb abgeleitet. Neben der Erforschung des Zahlbegriffserwerbs werden dabei auch die Aspekte des Zahlbegriffs sowie die Komponenten des Zahlbegriffserwerbs im Sinne von darunter zu fassenden Teilfähigkeiten beleuchtet und davon ausgehend relevante Grunderfahrungen und Fähigkeiten, die bei Kindern im vorschulischen Alter angeregt und gefördert werden sollten, herausgearbeitet und strukturiert (Kapitel 2). Es schließt sich eine ausführliche Beschreibung dieser relevanten Fähigkeiten an (Kapitel 3). Wie aber können sie im Kindergarten gefördert werden? Dieser Frage widmen sich die beiden darauf folgenden Kapitel, indem zunächst verschiedene Ansätze zur frühen mathematischen Förderung vorgestellt werden (Kapitel 4) und anschließend erörtert wird, wie eine Förderung mit den verschiedenen Konzeptionen und Materialien im Kindergarten konkret organisiert und umgesetzt werden kann (Kapitel 5). Abschließend werden ausgewählte Evaluationsbefunde und Fördereffekte verschiedener Möglichkeiten zur frühen mathematischen Förderung beschrieben und daraus die leitenden Forschungsfragen dieser Arbeit entwickelt (Kapitel 6).

## 1 Frühkindliche Bildung

In den 1960er und 1970er Jahren wurde die frühkindliche Bildung in Folge des Sputnik-Schocks (1957) viel diskutiert. Danach rückte sie erst wieder zu Beginn des neuen Jahrtausends anlässlich neuerer entwicklungs- und lernpsychologischer Erkenntnisse und der Ergebnisse internationaler Schulleistungsstudien wie TIMSS (Bos, Bensen, Baumert, Prenzel, Selter & Walther 2008) und PISA (Baumert u.a. 2001) wieder in den Fokus der Öffentlichkeit. Wenngleich die Ergebnisse der ersten PISA-Studie nicht in direktem Zusammenhang zur frühkindlichen Bildung stehen, verdeutlichen sie, „dass bereits der Kindergarten seinem Bildungsauftrag nicht adäquat gerecht [wird]“ (Kunze & Gisbert 2007, 20). In Konsequenz dieser Diskussion wurden in den darauffolgenden Jahren in allen deutschen Bundesländern Bildungs- und Orientierungspläne für Kindertageseinrichtungen entwickelt, welche die Grundsätze inhaltlicher Bildungsarbeit festschreiben. Dies macht deutlich, dass Kindertageseinrichtungen heute neben einer Erziehungs- und Betreuungsfunktion auch eine Bildungsfunktion obliegt. Kapitel 1.1 zeigt, wie sich dieser Bildungsauftrag in den letzten Jahrhunderten entwickelt hat und wie er in Form von Orientierungsplänen festgehalten wird. Kapitel 1.2 beleuchtet anschließend einige Aspekte der frühen *mathematischen* Bildung.

### 1.1 Die Bildungsfunktion der Kindertagesstätten

Der Bildungsauftrag, welcher Kindertageseinrichtungen heute zukommt, hat sich in den letzten Jahrzehnten entwickelt und dabei immer wieder verändert. Parallel dazu hat auch eine Veränderung im Bildungsverständnis stattgefunden: weg von einem Verständnis von Bildung als Selbstbildung hin zu einer Vorstellung von Bildung als soziale Konstruktion (Fthenakis, Schmitt, Daut, Eitel & Wendell 2009; Kunze & Gisbert 2007). Dieser ko-konstruktivistische Ansatz nimmt sowohl das Kind als auch den Erwachsenen ernst. Das Kind wird verstanden „als kompetentes Wesen [...], das sich eigenaktiv seine Welt aneignet und sein Wissen aktiv konstruiert“ (Kaufmann 2010, 27), „wobei ihm dies [...] in Gegenwart von und Anregung durch Erwachsene leichter gelingt“ (Lorenz 2012, 98). Diese Neudefinition sowie das Bewusstsein über die große Relevanz frühkindlicher Bildung haben dazu geführt, dass Erziehung und Bildung in Kindertageseinrichtungen zu einem der wichtigsten politischen Themen wurde. Dieses „Thema von höchster

Priorität“ (Fthenakis 2007, 3) bildet den Rahmen der vorliegenden Arbeit und soll daher im Folgenden näher beleuchtet werden.

### **1.1.1 Entstehungsgeschichte der Bildungsfunktion – wesentliche Entwicklungslinien**

Bereits im 19. Jahrhundert hatte der Gedanke Bestand, dass dem Kindergarten neben einer Erziehungs- und Betreuungsfunktion auch eine Bildungsfunktion zukommt. Zu dieser Zeit sprach sich der deutsche Pädagoge Friedrich Fröbel für den Kindergarten als erste Stufe des allgemeinen Bildungssystems aus. In den folgenden Jahren wurde wiederholt über den Stellenwert des Bildungsauftrages diskutiert und dieser immer wieder unterschiedlich gewichtet (Kaufmann 2010). Durch den Sputnik-Schock (1957) wurde schließlich die große Bedeutung der Bildung erkannt und das Potenzial des Kindergartens entdeckt. Die daraus resultierenden Diskussionen über den Bildungsgedanken in Kindertagesstätten in den 1960er und 1970er Jahren waren vergleichbar mit den Diskussionen nach PISA zu Beginn des neuen Jahrtausends. Als Ergebnis entstanden damals zwei Ansätze frühkindlicher Bildung: der wissenschaftsorientierte und der funktionsorientierte Ansatz (Kaufmann 2010; Schuler 2013). *Wissenschaftsorientierte Ansätze* empfahlen „Grundlehrgänge für Sprache, Mathematik und Naturwissenschaften“ (Kaufmann 2010, 9). An diesem Bildungsansatz wurde das Fehlen von konkreten Hilfen zur Bewältigung aktueller Lebenssituationen kritisiert (Roßbach 2004). *Funktionsorientierte Ansätze* zielten darauf ab, „dass die Kinder spezielle Fähigkeiten, Qualifikationen und Verhaltensweisen erwerben sollten“ (Kaufmann 2010, 9). Dies führte häufig zu einer Verschulung des Kindergartens, denn „Funktionen“ wurden als isolierte Fertigkeiten verstanden, was die Entwicklung „trägen Wissens“ mit sich brachte. Die beiden beschriebenen Ansätze scheiterten schließlich aufgrund ihrer Form, (welche isolierten Trainingsprogrammen gleich), ihrem schulvorbereitenden Charakter und ihrer Lebensweltferne (Schuler 2012). Daraus resultierte in Deutschland eine Zuwendung zu *situationsorientierten Ansätzen*, das heißt zu einer ganzheitlichen Pädagogik, die die Bewältigung von Lebenssituationen und das „Lernen in Erfahrungszusammenhängen“ (Kaufmann 2010, 9) in den Mittelpunkt stellte. Dabei rückte der Bildungsgedanke erneut in den Hintergrund, sodass die kognitive Förderung in den 1990er Jahren

im Hintergrund blieb (Kaufmann 2010; Schuler 2013). „Eine Renaissance der Bildung als ‚Megathema‘ ist mit den Schulleistungsstudien und der Veröffentlichung ihrer Ergebnisse ab Mitte der 90er Jahre des letzten Jahrhunderts verbunden“ (Royar 2007a, 32). Der Bildungsaspekt geriet somit erst Anfang des 21. Jahrhunderts wieder in den Fokus der Öffentlichkeit, was die Entwicklung *bildungsorientierter Ansätze* mit sich brachte. Diese konkretisieren Ziele für einzelne Bildungsbereiche (Kaufmann 2010; Schuler 2012). Erst in Folge der Jugendministerkonferenz im Jahr 2002 wurden die Kindertagesstätten jedoch konkret dazu „aufgefordert, den Bildungsauftrag in der Kindertagesbetreuung zu intensivieren, im Rahmen ihrer Möglichkeiten konsequent umzusetzen und neue Wege der Gestaltung von Bildungsprozessen zu initiieren“ (Kaufmann 2010, 7), wobei „Kindertagesstätten nicht allein als Spielraum zu verstehen sind und sich auch der Bildung im ganzheitlichen Sinne widmen müssen“ (JMK 2002, 1). Mit diesem „Auftrag“ zur frühkindlichen Förderung ist jedoch nicht gemeint, „Bildungsvorstellungen der Schule unmittelbar auf den Kindergarten zu übertragen oder den Bildungsauftrag des Kindergartens auf eine reine Vorbereitung auf die Schule zu reduzieren“ (ebd., 3). Es geht vielmehr darum, „den frühkindlichen Bildungsauftrag zu präzisieren und vom schulischen Auftrag abzugrenzen“ (Schuler 2012, 5). Im Jahr 2004 wurde schließlich durch den Beschluss der Jugendministerkonferenz (JMK 2004) ein gemeinsamer Rahmen für die Bildung in Kindertagesstätten beschlossen, womit die Rolle (fachlichen) Lernens im vorschulischen Bereich sowie die Anschlussfähigkeit vorschulischen Lernens für das Lernen in der Schule betont werden sollten (Gasteiger 2017). Weitere Ziele dieser Konzeptualisierung sollten sein, fachliche Beliebigkeit zu vermeiden und die Komplexität der Bildungsprozesse überschaubar zu machen (Fthenakis 2007). Auf Grundlage des Auftrags, den gemeinsamen Rahmenplan für die „Bildungsarbeit der Kindertageseinrichtungen“ (JMK 2004, 2) auf Landesebene zu konkretisieren, wurden in allen Bundesländern Bildungs- bzw. Orientierungspläne entwickelt, welche die vorschulische Bildungsarbeit definieren (Kaufmann 2010). „Leider wurden keinerlei Aussagen darüber gemacht, was unter einer ‚Konkretisierung‘ zu verstehen ist oder wie die ‚Angemessenheit‘ der Wege überprüft werden soll“ (Royar 2007a, 34).

Wenngleich sich die Vorgaben der Jugendministerkonferenz entsprechend des Prinzips der Ganzheitlichkeit nicht an Fächern oder Wissenschaftsdisziplinen orientieren, werden sechs Bildungsbereiche aufgeführt, an welchen sich die Gestaltung der vorschulischen Bildung orientieren soll (JMK 2004): „Sprache, Schrift, Kommunikation“; „Personale und soziale Entwicklung, Werteerziehung/religiöse Bildung“; „Mathematik, Naturwissenschaft, (Informations-)Technik“; „Musische Bildung/Umgang mit Medien“; „Körper, Bewegung, Gesundheit“ sowie „Natur und kulturelle Umwelten“ (JMK 2004, 4f.). Die Kinder gilt es in diesen Bereichen – ausgehend vom Prinzip der Ganzheitlichkeit – zu fördern, was in den Rahmenplänen der einzelnen Bundesländer Deutschlands sehr unterschiedlich interpretiert wird (Roux 2008).

In diesem Sinne ist der Bildungsgedanke inzwischen fest in den Kindertagesstätten verankert; Kindertageseinrichtungen gelten heute als fester Bestandteil unseres Bildungssystems (Heinze & Grüßing 2009; Schuler 2012). Dennoch sei noch einmal betont, dass der Kindergarten zwar „als Vorbereitung auf schulisches Lernen wahrgenommen [wird], aber eher im Hinblick auf die Motivation für das Lernen. Kognitive Förderung als vorrangiges Ziel wird abgelehnt“ (Kunze & Gisbert 2007, 38).

### **1.1.2 Mathematische Bildung in den Rahmenplänen frühkindlicher Bildung**

„Durch die Benennung von Bildungsbereichen wird deutlich, dass die mathematische Bildung verbindlicher Bestandteil frühkindlicher Bildung ist“ (Schuler 2013, 33). In einigen Bildungsplänen<sup>2</sup> für den Elementarbereich findet man Mathematik allerdings nicht als einzelnen Bildungsbereich, genauso wenig entsprechende Vorschläge zur Umsetzung (Lorenz 2012). „Stattdessen wird Mathematik als integraler Bestandteil in einem Gesamtbereich verortet, der Mathematik, Naturwissenschaft und (Informations-)Technik nebeneinander aufzählt“ (ebd., 96). So auch in dem im Jahr 2004 verabschiedeten gemeinsamen Rahmenplan aller

---

<sup>2</sup> Die Bildungspläne der Bundesländer für die frühe Bildung in Kindertageseinrichtungen werden in den verschiedenen Ländern unterschiedlich benannt (z.B. Orientierungsplan, Bildungs- und Erziehungsplan, Rahmenplan, Bildungskonzeption). In Anlehnung an den Beschluss der Jugendministerkonferenz vom 13./14.05.2004 bzw. den Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 03./04.06.2004 wird der dort gebräuchliche Begriff „Bildungsplan“ auch in der vorliegenden Arbeit für die Pläne aller Bundesländer verwendet.

deutschen Bundesländer: nur an einer Stelle, der Benennung des dritten Bildungsbereichs, wird explizit auf die Mathematik Bezug genommen. Für den Bildungsbereich „Mathematik, Naturwissenschaft und (Informations-)Technik“ gibt der Rahmenplan vor, dass die Kinder „den entwicklungsgemäßen Umgang mit Zahlen, Mengen und geometrischen Formen, mathematische Vorläuferkenntnisse und -fähigkeiten“ (JMK 2004, 4) erwerben sollen. Diese Formulierung gleicht jedoch eher einer allgemeinen Floskel als dem Bestandteil eines erkennbaren Konzepts (Royar 2007a), wobei die „Einbettung der Mathematik zwischen Naturwissenschaft und (Informations-) Technik eher zufällig als systematisch“ (Royar 2007a, 33) erscheint.

In den konkretisierten Plänen der einzelnen Länder fallen die Ausführungen zur Mathematik als Bildungsbereich in großem Maße unterschiedlich aus, was sowohl den Umfang als auch den Inhalt betrifft (Gasteiger 2010; Kaufmann 2010). So erwähnen einige Bildungspläne nur beiläufig einzelne mathematische Kompetenzen (vor allem das Zählen), andere leisten eine umfassendere Darstellung der mathematischen Bildung und nennen auch andere Aspekte wie das räumliche Denken (Fthenakis u.a. 2009). „Aber nur in den wenigsten Bundesländern erhält die Fachkraft genauere Hinweise, welche Kompetenzbereiche zur mathematischen Bildung gehören und wie sie diese im Einklang mit frühpädagogischen Prinzipien umsetzen kann“ (ebd., 13). Es finden sich somit keine einheitlichen Aussagen darüber, welche Aspekte die mathematische Bildung abdecken soll. Auch der Stellenwert der Mathematik im Rahmen der vorschulischen Bildung wird sehr unterschiedlich eingeschätzt (z.B. Benz, Peter-Koop & Grüßing 2015; Royar 2007a).

Im Rahmenplan des Landes Bremen sucht man vergebens nach einem mathematischen Bildungsbereich. Der Orientierungsplan für die baden-württembergischen Kindertageseinrichtungen fasst die Mathematik im Bildungs- und Entwicklungsfeld Denken, wobei die Aussagen über Mathematik „durchweg oberflächlich und allgemein“ (Royar 2007a, 37) bleiben. In den Plänen aus Brandenburg, Schleswig-Holstein und Rheinland-Pfalz wird die Mathematik gemeinsam mit den Naturwissenschaften in einem Bildungsbereich genannt. In den Plänen aller anderen bisher nicht genannten Länder findet man von anderen Bildungsbereichen unabhängige, mathematikspezifische Hinweise, wobei sich diese deutlich

im Umfang (zwischen 2 und 21 Seiten) unterscheiden. „Unterschiede ergeben sich weiterhin in Bezug auf die Adressaten, die Inhalte und Ziele sowie auch auf die propagierten Methoden“ (Peter-Koop 2009, 49).<sup>3</sup> Die Ursache für diese großen Unterschiede zwischen den einzelnen Bildungsplänen liegt zum einen vermutlich darin, dass es bisher keine derartigen Pläne und damit auch keine verlässlichen Erfahrungswerte gab, welche man zur Orientierung nutzen konnte. Der gemeinsame Rahmenplan des Jahres 2004 war die einzige Vorgabe, an welcher sich die Länder bei der Ausgestaltung ihrer länderspezifischen Pläne orientieren konnten. Zum anderen waren die Autorengruppen sehr unterschiedlich zusammengesetzt (Gasteiger 2010). Trotz vielfältiger Unterschiede zwischen den Bildungsplänen für den Elementarbereich der einzelnen Länder, haben diese immerhin gemeinsam, „dass die mathematischen Kompetenzen neben den sprachlichen, sozialen usw. zunehmend an Bedeutung gewinnen“ (Royar & Streit 2010, 11).

Insgesamt kann festgehalten werden, „dass die Mehrzahl der 16 Dokumente hinsichtlich ihres fachlich-theoretischen Hintergrunds sowie ihrer Ziele, Inhalte, Methoden und konkreten Handlungsansätze eher oberflächlich und unverbindlich ausfällt“ (Peter-Koop 2009, 50). Damit sind die Pläne für die pädagogische Arbeit der verantwortlichen frühpädagogischen Fachkräfte wenig hilfreich, nicht zuletzt aufgrund ihrer fehlenden Anschlussfähigkeit an die Bildungspläne des Primarbereichs (Benz u.a. 2015; Peter-Koop 2009).

## 1.2 Frühe mathematische Bildung

„Junge Kinder fassen Mathematik an‘: Nach dieser Devise sollen Kindern [in vorschulischen Einrichtungen] Möglichkeiten geboten werden, die Welt der Mathematik zu entdecken“ (Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg 2006, 101). Ausgehend davon sollen in diesem Kapitel Begründungslinien für eine *frühe* mathematische Förderung aufgezeigt (Kapitel 1.2.1) sowie die wesentlichen Etappen der mathematischen Bildung aus den letzten Jahrzehnten

---

<sup>3</sup> Detaillierte Anmerkungen zu und Vergleiche zwischen den Bildungsplänen für Kindertageseinrichtungen der verschiedenen Länder finden sich beispielsweise in Royar 2007. Die Bezeichnungen für die Rahmenpläne in den einzelnen Ländern sowie deren genauen Inhalte sind einzusehen unter <http://www.bildungserver.de/Bildungsplaene-der-Bundes-laender-fuer-die-fruehe-Bildung-in-Kindertageseinrichtungen-2027.html>.

dargestellt werden (Kapitel 1.2.2). Ebenso wird ein Überblick über Bereiche früher mathematischer Bildung gegeben (Kapitel 1.2.3).

### 1.2.1 Begründung früher mathematischer Bildung

„Das Bewusstsein dafür, dass frühe mathematische Förderung notwendig und sinnvoll ist, um den Kindern gute Ausgangsbedingungen für das weitere Lernen zu ermöglichen, schärfte sich in den letzten Jahren immer mehr“ (Gasteiger 2010, 65). Neben neueren lernpsychologischen und entwicklungspsychologischen Erkenntnissen konnten auch Befunde aus der Bildungsforschung sowie der Hirnforschung aufzeigen, dass Zusammenhänge zwischen den individuellen Vorkenntnissen von Kindern und ihren schulischen Leistungen bestehen (z.B. Alloway & Alloway 2010; Biedinger & Becker 2006; Klatte 2007; Krajewski & Schneider 2009). In der vorliegenden Arbeit wird ausschließlich auf Erkenntnisse im Zusammenhang mit der Bedeutung der *mathematischen Bildung* im Vorschulalter für das spätere schulische *Mathematiklernen* näher eingegangen.

„Mathematiklernen ... jetzt also schon vom *Kindergarten* bis zum Studium? Ist denn die Mathematik wirklich so wichtig, dass man bereits im Kindergarten mit dem Mathematiklernen anfangen muss[?]“ (Gutschke & Heydt 2009, 9, Hervorhebung im Original)

Diese Frage kann durchaus mit *ja* beantwortet werden. Welche Begründungen dieser Antwort und damit einer frühen mathematischen Förderung zugrunde liegen, wird im Folgenden aufgezeigt.

#### ***Frühe mathematische Kompetenzen haben einen großen Einfluss auf das spätere, schulische Mathematiklernen.***

Bereits die Längsschnittstudien SCHOLASTIK (Helmke & Weinert 1997) und LOGIK (Weinert 1998; Weinert & Schneider 1999; Schneider 2008) legten die Vermutung nahe, dass „Kinder, die über Vorwissen in Mathematik aus der Vorschulzeit verfügen, [...] vermutlich ‚die Nase vorn haben‘, wenn es im mathematischen Anfangsunterricht oder im fortschreitenden Grundschulunterricht um den Erwerb neuer Kompetenzausschnitte geht“ (Hellmich 2008, 88f.). Befunde zahlreicher Studien aus den vergangenen Jahren bestätigten dies, indem sie zeigten, dass bestimmte Aspekte mathematischen Vorwissens, über welche Kinder vor Schuleintritt verfügen, Vorhersagen über deren Mathematikleistungen in der Grundschule ermöglichen (z.B. Dornheim 2008; Krajewski 2003; Weißhaupt,

Peucker & Wirtz 2006; vgl. auch folgenden Abschnitt). Auch in der zweiten PISA-Erhebung konnten mit Blick auf die Dauer des Kindergartenbesuches Zusammenhänge zwischen den mathematischen Fähigkeiten der 15-jährigen Jugendlichen und der frühkindlichen Bildung aufgezeigt werden (Prenzel, Heidemeier, Ramm, Hohensee & Ehmke 2004). Vorliegende Forschungserkenntnisse zeigen außerdem, „dass sich defizitäre Entwicklungen mathematischer Basiskompetenzen bereits im Vorschulalter zeigen und häufig im Verlauf der Schulzeit erhalten bleiben“ (Heinze & Grüßing 2009, 15). Diese Untersuchungsergebnisse verweisen in ihrer Gesamtheit darauf, dass dem Vorwissen und den ersten mathematischen Fähigkeiten von Kindern im vorschulischen Bereich eine große Bedeutung zukommt, wenn es darum geht, mathematische Kompetenzen bei Kindern im Grundschulalter zu erklären. Infolgedessen ist davon auszugehen, dass eine frühe Anregung mathematischer Lernprozesse großen Einfluss auf die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen der Kinder haben kann (Gasteiger 2010; Hellmich 2008). Die Erkenntnis, dass „wichtige mathematische ‚Vorläuferkenntnisse‘“ (Royer 2007a, 36) sich deutlich vor Schulbeginn entwickeln, verdeutlicht den großen Stellenwert explizit mathematischer früher Bildung.

***Eine frühe Förderung mathematischer Fähigkeiten kann der Entwicklung schulischer Rechenschwierigkeiten vorbeugen.***

Früher mathematischer Förderung kommt auch eine präventive Funktion zu, denn „für Kinder, die im Kindergartenalter über wenige numerische Vorkenntnisse verfügen, besteht [...] das Risiko, beim Mathematiklernen Schwierigkeiten zu bekommen. Für die mathematische Entwicklung ist es also wichtig, dass die Vorkenntnisse möglichst früh gefördert werden“ (Moser Opitz 2010, 148). Diesbezüglich liegen zahlreiche Befunde zur Vorhersage und Früherkennung von Rechenschwierigkeiten vor, wobei in den verschiedenen Studien unterschiedliche „Risikofaktoren“ (im Sinne verschiedener Aspekte mathematischen Vorwissens) herausgearbeitet wurden.

Krajewski (2003) konnte beispielsweise die prädiktive Funktion von Mengenvorwissen (Seriation, Mengenvergleich, Längenvergleich) sowie Zahlenvorwissen (Zählfertigkeiten, Zahlenwissen, elementare Rechenfertigkeiten) zeigen. Bestätigt wurde dies von Kaufmann (2003). Dornheim (2008) sowie Weißhaupt

u.a. (2006) konnten als Hauptprädiktoren das zahlenbezogene Vorwissen herausarbeiten. Dies belegt auch eine finnische Längsschnittstudie (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi 2004), in der sich insbesondere frühe Zählfertigkeiten als mächtige Vorhersagevariable für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten erwies. In einigen der genannten Untersuchungen wurde zudem deutlich, dass unspezifische Merkmale wie die Gedächtniskapazität oder die allgemeine Intelligenz nur einen geringen prädiktiven Wert bei der Vorhersage von Mathematikleistungen haben (Dornheim 2008; Krajewski 2003; Weißhaupt u.a. 2006). „Zwischen späteren mathematischen Schulleistungen und bereichsspezifischem Wissen, [das heißt mathematischen Kompetenzen], können engere Zusammenhänge festgestellt werden als zwischen mathematischen Schulleistungen und gemessener Intelligenz“ (Benz u.a. 2015, 7). Wenngleich verschiedene Studien Zusammenhänge zwischen verschiedenen Facetten der Intelligenz und den kindlichen Leistungen im Fach Mathematik nachweisen konnten (z.B. Bullock & Ziegler 1997; Cattell, Weiß & Osterland 1997; Esser & Wyschkon 2011), hat die Intelligenz allein nur geringen Einfluss auf die Problemlösefähigkeiten von Kindern (Schneider & Stern 2000; Stern 1998, 2003). „Defizite in der Intelligenz können dabei durch Vorwissen im Bereich Mathematik kompensiert werden, Defizite im mathematischen Vorwissen durch die Intelligenz dagegen nicht“ (Schneider, Küspers & Krajewski 2013, 57).

Eine gezielte, frühe Förderung, die auf die Entwicklung von mengen- und zahlbezogenen Kompetenzen fokussiert, kann Defizite bei den Kindern ausgleichen und damit schulischen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen vorbeugen (Peter-Koop, Grüßing & Schmitman gen. Pothmann 2008). „Angesichts der erheblichen seelischen Belastungen, die massive Rechenschwierigkeiten für die Kinder und ihre Familien mit sich bringen, gilt es, durch rechtzeitige Intervention in vorschulischen Einrichtungen präventiv zu arbeiten und die Kinder gezielt zu fördern“ (Grüßing & Peter-Koop 2007, 177). In diesem Sinne scheint insbesondere die Förderung von Kindern mit Defiziten in den genannten Kompetenzen im Vorschulalter unabdingbar.