

DMK | Deutschschweizerische Mathematikkommission

Claudia Albertini
Martin Huber

KALENDER

Kunstwerke aus Mathematik,
Astronomie und Geschichte

HANSER



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Claudia Albertini

Martin Huber

Kalender – Kunstwerke aus Mathematik, Astronomie und Geschichte

HANSER

Autoren:

Dr. Claudia Albertini, PH Zürich und Universität Zürich

Dr. Martin Huber, FH Winterthur



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, sind vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Anne Kurth

Satz: Helge Röpcke, Markus Wessler

Covergestaltung: Max Kostopoulos, unter Verwendung von Grafiken von

© gettyimages.de/MARK GARLICK/SCIENCE PHOTO LIBRARY sowie © shutterstock.com/SpicyTruffel

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Druck und Bindung: Friedrich Pustet GmbH & Co. KG, Regensburg

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46856-6

E-Book-ISBN 978-3-446-46857-3

Vorwort

Vorwort der Deutschschweizerischen Mathematikkommission

Die Deutschschweizerische Mathematikkommission (DMK) stellt sich die Aufgabe, den Mathematikunterricht an den Deutschschweizer Gymnasien zu unterstützen. Neben Formelsammlungen und Aufgabensammlungen zum gymnasialen Stoff für das Grundlagenfach Mathematik entstanden so in unregelmässigen Abständen Themenbücher, mit welchen wir vielfältiges Material für weiterführende Kurse, Projektwochen und Maturaarbeiten auf gymnasialem Niveau zugänglich gemacht haben. In diesem Kontext ist auch das vorliegende Buch zum Thema „Kalender“ zu sehen.

Ich freue mich, Ihnen dieses umfassende Werk zum Thema „Kalender“ präsentieren zu können. Das Buch soll Einzug in Unterrichtssequenzen finden und so den Schülerinnen und Schülern aufzeigen, welche Mathematik sich hinter einem alltäglichen Tool wie dem Kalender verbirgt.

Ich möchte mich bei den beiden Autoren, Claudia Albertini und Martin Huber, für ihren riesigen Aufwand bedanken. Neben der Autorenschaft zeichneten sie auch verantwortlich für den Satz. Des Weiteren bedanke ich mich bei der DMK-internen Projektleiterin, Frau Daniela Grawehr, für ihren grossen Aufwand.

Bonaduz, 4. Februar 2021

Josef Züger, Präsident DMK

Vorwort der Autoren

Das Vergehen der Zeit erleben wir Menschen seit jeher im Wechsel und in der Wiederholung von Tag und Nacht, der Mondphasen und der Jahreszeiten. Der *Sonntag* – lichter Tag und Nacht – ist die Grundeinheit der *Zeit*zählung und der kürzeste der drei *Zeit*zyklen, die man unmittelbar beobachten kann. Jeder Kalender enthält die Grundeinheit des Sonntags, gleichgültig, ob der Tag bei Sonnenaufgang, bei Sonnenuntergang oder um Mitternacht beginnt. Die uns geläufigsten Kalender sind *Sonnenkalender*; als solche versuchen sie primär, die Jahreszeiten abzubilden. Weiter gibt es Kalender, in denen in erster Linie die Mondphasen berücksichtigt werden (sog. *Lunare Kalender*), und unter letzteren gibt es solche, bei denen das

Mondjahr mittels Schaltmonaten immer wieder an das Sonnenjahr angeglichen wird (sog. *Lunisolare Kalender*). Für einen Sonnenkalender ist das massgebliche Zeitintervall das tropische Jahr von ca. 365.2422 d, für einen Mondkalender ist es der synodische Monat von ca. 29.5306 d, wobei 1 d die Länge des mittleren Sonnentags bezeichnet. (Wie an Deutschschweizer Gymnasien üblich, verwenden wir den Dezimalpunkt und nicht das Komma.) Alle uns bekannten Kalendermonate und -jahre beinhalten eine *ganze* Anzahl von Tagen. Die Schaffung eines Kalenders ist offenbar ein *Näherungsproblem mit ganzzahligen Lösungen*. Wir werden uns in diesem Buch auf die Darstellung der Kalender „unseres Kulturkreises“ beschränken. Chinesische, indische und mesoamerikanische Kalender werden hier nicht behandelt.

Dieses Buch richtet sich in erster Linie an Lehrpersonen am Gymnasium und Lehramtsstudierende des Faches Mathematik. Weiter empfehlen wir das Thema „Kalender“ für Klassen des Gymnasiums zur Bearbeitung im Schwerpunktfach „Physik und Anwendungen der Mathematik“ oder im Ergänzungsfach „Anwendungen der Mathematik“. Das Thema „Kalender“ eignet sich auch sehr gut für Projektwochen von Grundlagenfachklassen im Fach Mathematik sowie für Maturaarbeiten. Nicht zuletzt richtet sich das Buch auch an interessierte Laien.

Die Gliederung des Buches in seine Kapitel erklären wir in der nachstehenden Einleitung. Jedes der Kapitel 1 bis 8 besteht aus Haupttext und Vertiefungen sowie einem Aufgabenteil. Es besteht die Möglichkeit, dass der Leser/die Leserin nur den Haupttext liest. Im Aufgabenteil gibt es in den meisten Kapiteln sowohl Aufgaben zum Haupttext als auch solche zu den Vertiefungen. Zur Bearbeitung der Aufgaben empfehlen die Autoren, das ergänzende Kapitel Mathematische Hilfsmittel zu Rate zu ziehen. Ausführliche Lösungen zu den Aufgaben finden sich via Homepage der DMK.

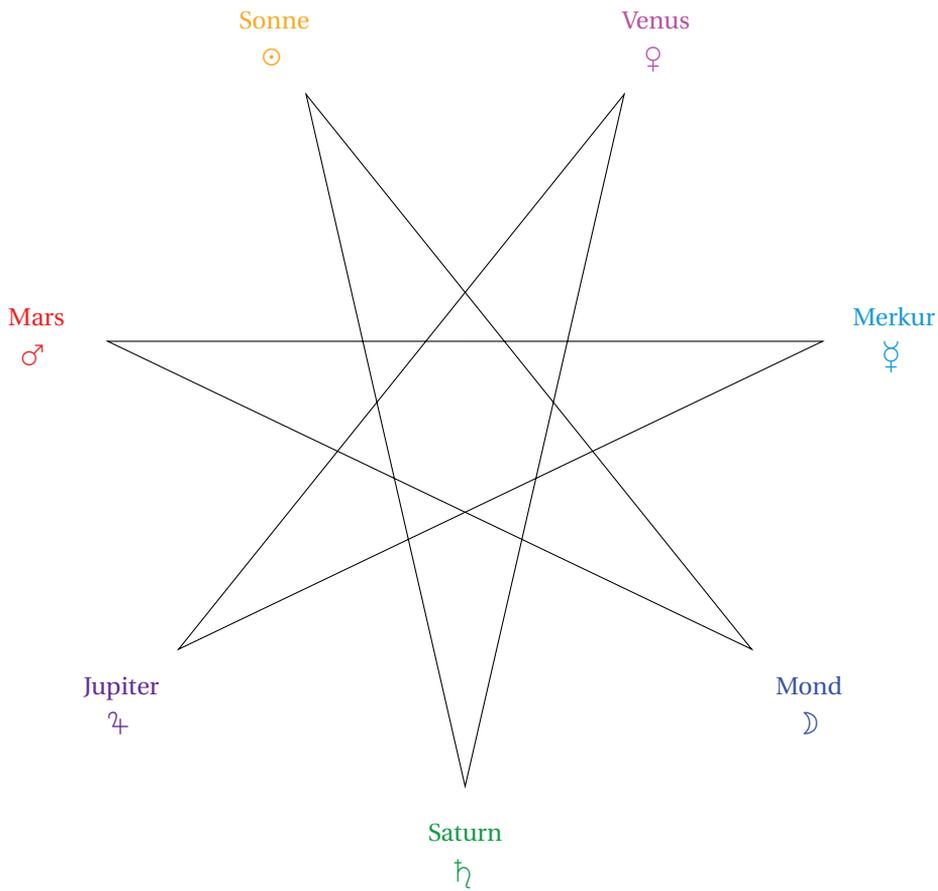
Wir danken der Deutschschweizerischen Mathematikkommission (DMK) und dem Carl Hanser-Verlag für die gute Zusammenarbeit. Besonderer Dank geht an die Projektleiterin Daniela Grawehr, Präsidentin der DMK bis 2018, und an Josef Züger, den aktuellen Präsidenten, der das vollständige Manuskript sehr sorgfältig gegengelesen hat. Wir danken Norbert Hungerbühler (ETH) für seine ideelle und finanzielle Unterstützung sowie dem Altphilologen Karl Philipp, der für uns viele Seiten aus der *Explicatio* des Christoph Clavius zur Gregorianischen Kalenderreform (→ *Dies Dominica*) sowie Texte von Roger Bacon und Nikolaus Kopernikus übersetzt hat. Dank gebührt auch Matthias Grawehr, der sich um die photographischen Abbildungen und deren Rechte gekümmert hat, sowie Rita Gautschy für Ihre Hilfe in Belangen der Geschichte Mesopotamiens. Nicht zuletzt möchten wir uns bei unseren Familien bedanken für die Unterstützung und die Geduld beim langwierigen Entstehungsprozess dieses Buches.

Inhalt

Vorwort	5
Einleitung	10
0.1 Die Sieben-Tage-Woche	12
0.1.1 Die Planetenwoche	13
0.1.2 Die Etablierung der Planetenwoche	16
1 Sonntag	18
1.1 Sonnentag und Sterntag	20
1.1.1 Die Himmelskugel	20
1.1.2 Die tägliche Bewegung der Gestirne	22
1.2 Siderisches und tropisches Jahr	25
1.3 Das heliozentrische System	27
1.4 Antike Sonnenkalender	32
1.4.1 Der Altägyptische Sonnenkalender	32
1.4.2 Der Julianische Kalender	33
1.4.3 Epoche und Ära	35
1.5 Vertiefungen zum Sonntag	35
1.5.1 Die Bahn der Sonne	36
1.5.2 Morgenweite und Tagbogen	43
1.5.3 Der Tierkreis	45
1.5.4 Der Sothis-Zyklus	47
1.6 Aufgaben zum Sonntag	48
2 Montag	52
2.1 Siderischer und synodischer Monat	54
2.2 Lunare und lunisolare Kalender	57
2.2.1 Der Babylonische Lunisolarkalender	57
2.2.2 Der Metonsche Zyklus	60
2.3 Vertiefung zum Montag	61
2.4 Aufgaben zum Montag	63
3 Dienstag	66
3.1 Astronomie in der frühen Neuzeit	68
3.1.1 Nikolaus Kopernikus (1473–1543)	68
3.1.2 Tycho Brahe (1546–1601)	70
3.1.3 Johannes Kepler (1571–1630)	71

3.2	Die Keplerschen Gesetze	73
3.2.1	Die Ellipse	73
3.2.2	Erstes Keplersches Gesetz	75
3.2.3	Zweites Keplersches Gesetz (Flächensatz)	77
3.2.4	Drittes Keplersches Gesetz	77
3.3	Vertiefungen zum Dienstag	78
3.3.1	Astronomische Jahreszeiten	78
3.3.2	Das tropische Jahr und das Äquinoktialjahr	79
3.3.3	Der Einfluss der Periheldrehung	82
3.4	Aufgaben zum Dienstag	84
4	Mittwoch	88
4.1	Anpassungen und Varianten des Sonnenkalenders	90
4.1.1	Der Alexandrinische Kalender	90
4.1.2	Persische Sonnenkalender	92
4.2	Der Jüdische Lunisolarkalender	95
4.3	Vertiefungen zum Mittwoch	102
4.3.1	Der 2820-jährige Zyklus des Persischen Sonnenkalenders	102
4.3.2	Der 19-jährige Zyklus des Jüdischen Kalenders	104
4.3.3	Die exakten Grundlagen der jüdischen Chronologie	105
4.4	Aufgaben zum Mittwoch	112
5	Donnerstag	116
5.1	Die Gregorianische Kalenderreform	118
5.1.1	Die Vorgeschichte	118
5.1.2	Der Gregorianische Kalender	124
5.1.3	Die Nachgeschichte	125
5.2	Der Neujulianische Kalender	129
5.3	Der Französische Revolutionskalender	130
5.4	Der Islamische Kalender	133
5.5	Vertiefung zum Donnerstag	134
5.6	Aufgaben zum Donnerstag	136
6	Freitag	140
6.1	Die Venus-Tafeln des Ammizaduga	142
6.2	Das Julianische Datum	143
6.3	Die astronomische Zeitmessung	146
6.4	Vertiefungen zum Freitag	148
6.4.1	Der Julianische Sonnenzyklus	148
6.4.2	Der Gregorianische Sonnenzyklus	152
6.4.3	Der Indiktionszyklus	154
6.5	Aufgaben zum Freitag	154

7 Samstag	158
7.1 Ewige Kalender	160
7.2 Der Altjüdische Sonnenkalender	161
7.3 364-Tage-Kalender mit leeren Tagen	163
7.4 364-Tage-Kalender mit Schaltwochen	166
7.4.1 Der ISO-Wochenkalender	166
7.4.2 Der Ewige Kalender nach Hanke-Henry	167
7.4.3 Die symmetrischen Kalender nach Bromberg	168
7.5 Vertiefungen zum Samstag	169
7.5.1 Schaltjahre im ISO-Wochenkalender	169
7.5.2 Symmetrien im 293-jährigen Schaltzyklus	172
7.6 Aufgaben zum Samstag	173
8 Dies Dominica	176
8.1 Das Osterdatum	178
8.2 Der Alexandrinische Osterzyklus	180
8.3 Die Christliche Zeitrechnung	185
8.4 Die Gregorianische Reform	189
8.5 Vertiefungen zum Dies Dominica	194
8.5.1 Der immerwährende Gregorianische Neulichtkalender	194
8.5.2 Berechnung des Osterdatums	205
8.6 Aufgaben zum Dies Dominica	213
Mathematische Hilfsmittel	217
9.1 Rechnen modulo m und Rundungsfunktionen	218
9.1.1 Division mit Rest	218
9.1.2 Rechnen modulo m	219
9.1.3 Rundungsfunktionen	221
9.2 Kettenbrüche	221
9.2.1 Ein gewöhnlicher Bruch wird zum Kettenbruch	223
9.2.2 Näherungsbrüche eines regulären Kettenbruchs	224
9.2.3 Kettenbruch-Entwicklung für irrationale Zahlen	227
9.2.4 Beste Approximation	231
9.3 Verteilung von Schaltungen	233
9.3.1 Die kanonische Verteilung von Schaltungen	233
9.3.2 Möglichst gleichmässige Verteilung von Schaltungen	236
9.3.3 Schaltungen, die in der Zeiteinheit j_0 beginnen	239
Lösungen	242
Literatur	249
Index	253
Abbildungsverzeichnis	257



Einleitung

In diesem Kapitel wird den Wurzeln der Siebentagewoche und der Planetenwoche nachgegangen. Das einzige astronomische Phänomen, welches einen 7-tägigen Zyklus nahelegt, sind die Mondphasen. Aus dem 7. Jh. v. Chr. gibt es bereits Zeugen eines 7-tägigen Rhythmus und der Verehrung der sieben Planeten als Götter. Die Planetenwoche, d.h. die Zuordnung der Planetengötter zu den Wochentagen scheint im 2. Jh. v. Chr. im hellenistischen Ägypten entstanden zu sein. Die Christen übernahmen die Planetenwoche und trugen damit wesentlich dazu bei, dass sich die 7-Tageweche schliesslich in fast allen Kulturen durchgesetzt hat. Es ist genau dieser 7-Tage-Zyklus, der den Anlass für die Gliederung dieses Buches gibt. Jedes der folgenden sieben Kapitel ist einem Wochentag und dem zugehörigen Planetengott gewidmet. Der Kreis der Wochentage schliesst sich, indem das achte Kapitel nochmals dem Sonntag zugeeignet ist. An dieser Stelle wird der Sonntag als „Dies Dominica“, als Festtag der christlichen Kirche aufgefasst.

0.1 Die Sieben-Tage-Woche

¹ Für periodisch sich wiederholende Anlässe, wie religiöse Rituale oder Markttag, ist der Monat als Periode zu lang.

In jeder Kultur gibt es einen Zeitzyklus, welcher länger als ein Tag und kürzer als ein Monat ist¹. Der Zyklus der Sieben-Tage-Woche hat sich im Laufe der Geschichte in fast allen Kulturen durchgesetzt. Es ist jedoch bei weitem nicht der einzige Zyklus dieser Art. Bekannt sind z.B. das altrömische *Nundinum* (→ *Sonntag*, *Fussnote 35*) und die *Dekade* (Zehn-Tage-Zyklus), die im alten Ägypten gebräuchlich war und im französischen Revolutionskalender eine Neuauflage erfuhr (→ *Donnerstag*, *5.3*). Der Begriff der Woche ist für uns identisch mit dem Sieben-Tage-Zyklus. In vielen Sprachen ist das Wort für „Woche“ unmittelbar vom Wort für die Zahl 7 abgeleitet:

Tabelle 0.1
Woche und Zahl 7

Lateinisch	septimana
Italienisch	settimana
Französisch	semaine
Spanisch/Portugiesisch	semana
Griechisch	hebdomas
Hebräisch	shavua

In diesem Kapitel wird auf folgende Punkte eingegangen:

- die Länge der Woche,
- die Entstehung der Planetenwoche, d.h. die Zuordnung der Planetengötter zu den Wochentagen,
- die Etablierung der Planetenwoche in fast allen Länder der Erde.

Sowohl die Länge der Woche als auch die Zuordnung der Planetengötter haben ihre Wurzeln im Zweistromland (Mesopotamien) und im östlichen Mittelmeerraum, in der Wiege unserer Kultur.

Die Sieben-Tage-Woche ist von der Natur nicht vorgegeben. Ein möglicher Ursprung der Wochenlänge beruht auf den vier Mondphasen Neumond, zunehmender Halbmond, Vollmond und abnehmender Halbmond. Dass sieben Tage der Dauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Mondphasen entsprechen, ist zwar ungenau, aber doch die beste ganzzahlige Approximation dafür.

² Die *Assyrer* lebten im mittleren und nördlichen Mesopotamien. Das Assyrische Reich existierte vom 18. Jh. bis Ende des 7. Jh. v. Chr.

Früher Zeuge eines 7-Tage-Rhythmus (7. Jh. v. Chr. oder früher) ist eine Keilschrifttafel aus der Bibliothek des assyrischen² Königs *Assur-*

banipal (→ *Freitag*, *Fussnote 2*). Auf dieser Tafel werden der 7., der 14., der 19., der 21. und der 28. Tag des Mondmonats Ululu II (→ *Montag*, 2.2.1) als „Tage des Übels“ bezeichnet. An diesen Tagen waren gewisse Tätigkeiten zu vermeiden: „*Der Hirte der zahlreichen Völker isst Fleisch nicht, das auf Kohlen gebraten ist, [...] der König besteigt seinen Wagen nicht, er spricht als Herrscher nicht, [...] ein Arzt reicht einem Kranken die Hand nicht [...]*“ [Liv13, S. 199ff].

Ein weiterer Zeuge für die Wochenlänge ist die *Sabbatheiligung* in der jüdischen Schöpfungsgeschichte: „*Und Gott segnete den siebten Tag und heiligte ihn, denn an ihm ruhte Gott von all seinem Werk, das er durch sein Tun geschaffen hatte*“ [Zwi07, Gen. 2, 3]. Wie schon erwähnt (→ *Tabelle 0.1*), ist das Wort *shavua* für „Woche“ von Herkunft und Bedeutung eng verknüpft mit dem hebräischen Wort für die Zahl Sieben (→ *Samstag*). Da die Schöpfungsgeschichte erst nach dem babylonischen Exil³ schriftlich niedergelegt wurde, könnte es sein, dass der jüdische 7-Tage-Zyklus ein Erbe des Exils ist.

Die Tradition, jedem Tag der Woche einen Planetengott zuzuordnen, entwickelte sich in zwei Schritten: Zuerst wurden den sieben Planeten Götter zugeordnet und dann wurden – auf einem Umweg über den 24-Stundentag, wie wir im Abschnitt 0.1.1 sehen werden – den sieben Tagen die Planetengötter zugeordnet.

Ende des 7. Jh. vor Chr. waren die Chaldäer das beherrschende Volk im Zweistromland⁴. In der Überzeugung, dass die Planeten das menschliche Schicksal massgeblich beeinflussen, ordneten die Chaldäer den sieben von blosserem Auge erkennbaren Planeten⁵ Gottheiten zu.

Laut Zerubabel waren es aber erst die Griechen, welche diese Tradition übernahmen und zusätzlich die Planetengötter den Wochentagen zuordneten [Zer89, S. 14]. Diese Gepflogenheit etablierte sich wahrscheinlich im zweiten vorchristlichen Jahrhundert in Alexandria⁶ zusammen mit der Einteilung des Tages in 24 Stunden.

0.1.1 Die Planetenwoche

Dieser Abschnitt erklärt die Reihenfolge, in der die Planeten und ihre Gottheiten den Wochentagen zugeordnet sind⁷. Im geozentrischen

³ Zu Beginn des 6. Jh. v. Chr. wurde die jüdische Oberschicht ins babylonische Reich deportiert und dort angesiedelt.

⁴ Der chaldäische König *Nabopolassar* bestieg 625 v. Chr. den Thron von Babylon und gründete das Neubabylonische Reich.

⁵ Die damals bekannten Planeten waren Saturn, Jupiter, Mars, Venus und Merkur. Aber auch Sonne und Mond wurden zu den Planeten gezählt.

⁶ Astronomie und Astrologie waren wahrscheinlich als Folge der Eroberungen *Alexanders des Grossen* (356–323 v. Chr.) von Babylon nach Ägypten gekommen.

⁷ Wir verwenden die deutschen Planetennamen.

System (→ *Sonntag, Fussnote 1*) sind die in der Antike bekannten Planeten wie folgt angeordnet:

Saturn – Jupiter – Mars – Sonne – Venus – Merkur – Mond

8 In der Astrologie wird diese Anordnung der Planeten *Chaldäische Reihe* genannt.

Diese Anordnung entspricht derjenigen der Umlaufzeiten der Planeten vom Saturn mit ca. 29.5 Jahren bis zum Mond mit ca. 29.5 Tagen. Doch wie gelangt man nun zur Abfolge der Planeten⁸, wie sie der Planetenwoche entspricht?

Saturn – Sonne – Mond – Mars – Merkur – Jupiter – Venus

Nach dem römischen Konsul und Geschichtsschreiber Cassius Dio (ca. 163-229 n. Chr.) rührt diese Reihenfolge daher, dass die Planetengötter in der Astrologie auch als Stundengötter oder „Stundenregenten“ auftreten [Zer89, S. 16]. In diesem Sinn wird jeder Stunde der 7-Tage-Woche der Reihe nach eine Gottheit als „Regent“ zugeordnet: Die erste Stunde des ersten Tages (6-7 Uhr) wird von Saturn regiert, die zweite von Jupiter, die dritte von Mars,..., die siebte vom Mond und die achte wieder von Saturn, usw. (→ *Tabelle 0.2*).

Tabelle 0.2 Stunden- und Tagesregenten der Planetenwoche

Stunde	1. Tag	2. Tag	3. Tag	4. Tag	5. Tag	6. Tag	7. Tag
6–7 Uhr	Saturn	Sonne	Mond	Mars	Merkur	Jupiter	Venus
7–8 Uhr	Jupiter	Venus	Saturn	Sonne	Mond	Mars	Merkur
8–9 Uhr	Mars	Merkur	Jupiter	Venus	Saturn	Sonne	Mond
9–10 Uhr	Sonne	Mond	Mars	Merkur	Jupiter	Venus	Saturn
10–11 Uhr	Venus	Saturn	Sonne	Mond	Mars	Merkur	Jupiter
11–12 Uhr	Merkur	Jupiter	Venus	Saturn	Sonne	Mond	Mars
12–13 Uhr	Mond	Mars	Merkur	Jupiter	Venus	Saturn	Sonne
13–14 Uhr	Saturn	Sonne	Mond	Mars	Merkur	Jupiter	Venus
14–15 Uhr	Jupiter	Venus	Saturn	Sonne	Mond	Mars	Merkur
...
...
3–4 Uhr	Saturn	Sonne	Mond	Mars	Merkur	Jupiter	Venus
4–5 Uhr	Jupiter	Venus	Saturn	Sonne	Mond	Mars	Merkur
5–6 Uhr	Mars	Merkur	Jupiter	Venus	Saturn	Sonne	Mond

Da die Division von 24 durch 7 den Rest 3 lässt, wurde der drittletzten Stunde wieder Saturn, der zweitletzten Jupiter und der letzten Stunde des ersten Tages Mars zugeordnet. So kommt es, dass die erste Stunde des zweiten Tages von der Sonne regiert wird. Fährt man so weiter, so sieht man, dass der ersten Stunde des dritten Tages der Mond, der ersten Stunde des vierten Tages der Mars, usw. zugeordnet wurden. Die den ersten Tagesstunden zugeordneten Planeten wurden von den Astrologen zugleich zum „Tagesregenten“ erhoben: Saturn zum Regenten des ersten Tages, die Sonne zum Regenten des zweiten, der Mond des dritten Tages, usw. Die Namen der Wochentage in der Planetenwoche sind also durch die entsprechenden Tagesregenten bestimmt worden.

Die Reihenfolge der Planeten in der Planetenwoche kann sehr schön in der Form eines Heptagramms (eines Siebensterns) dargestellt werden:

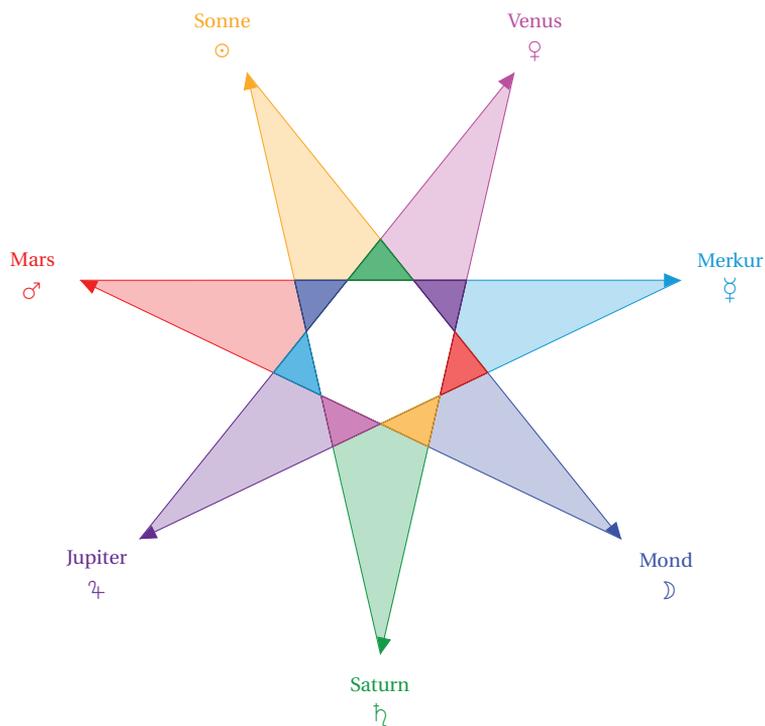


Bild 0.1
Planetenwoche als
Siebenstern

0.1.2 Die Etablierung der Planetenwoche

Es ist zu vermuten, dass Julius Cäsar die Idee der Planetenwoche nach seinem Sieg im Alexandrinischen Krieg (48/47 v. Chr.) von Ägypten nach Rom brachte, von wo sie sich allmählich im ganzen Reich verbreitete. Dies legte den ersten Stein für die Etablierung der Planetenwoche. Frühe noch erhaltene Zeugen der Planetenwoche im römischen Reich sind eine Inschrift und ein Fresko in Pompeji (vor 79 n. Chr.) sowie ein Parapegma (Steckkalender), welches 1812 im Wandputz eines römischen Hauses nahe bei den Trajansthermen gefunden und von den Entdeckern ins 4. Jh. datiert wurde [Bul20]. Die sieben Planetengötter sind in der Reihenfolge der Wochentage dargestellt.

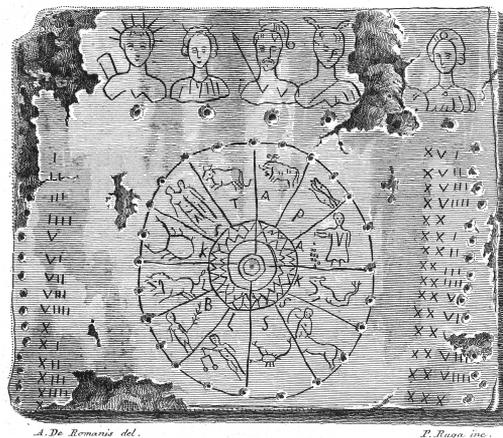


Bild 0.2
Parapegma von den
Thermen des Trajan.
Das durch Erosion
zerstörte Original
wird hier in einer
Zeichnung von 1822
wiedergegeben

Die frühen Christen betrachteten sich durchaus noch dem Judentum zugehörig und beachteten auch dessen Zeitordnung. Zusammen mit der Sabbathheiligung übernahmen sie die Siebentagewoche, deren Tage nach dem zeitlichen Abstand zum Sabbat benannt wurden. Der Sonntag entsprach somit dem ersten, der Montag dem zweiten, der Dienstag dem dritten Tag nach dem Sabbat, usw. Im Laufe der Ablösung vom Judentum feierten die Christen neben dem Sabbat auch den Sonntag als den „Tag des Herrn“ (→ *Dies Dominica*), denn die Auferstehung Jesu Christi von den Toten ereignete sich nach allen vier Evangelien des Neuen Testaments am „ersten Tag der Woche“ [Zwi07, z.B. Johannes 20, 1-18].

Als die christliche Kirche sich vom Judentum trennte und sich selbstständigte, wurde die Einhaltung des Sabbats aufgegeben und nunmehr nur noch der Sonntag geheiligt⁹. Die Kirche behielt den jüdischen Sieben-Tage-Zyklus bei und übernahm gleichzeitig die Tagesnamen der Planetenwoche, da sie auch die Zeitordnung des Römischen Reiches zu berücksichtigen hatte. *Damit verschmolz der jüdische 7-Tage-Zyklus mit der griechisch-römischen Planetenwoche.* Unter Konstantin dem Grossen (römischer Kaiser 306-337) begann der Aufstieg des Christentums zur wichtigsten Religion im Imperium Romanum. Im Jahr 321 wurde die Planetenwoche im römischen Reich für verbindlich erklärt. Gleichzeitig wurde der Sonntag als Fest- und Ruhetag offiziell im Kalender verankert und anstelle des römischen Saturntages an den Wochenanfang gesetzt.

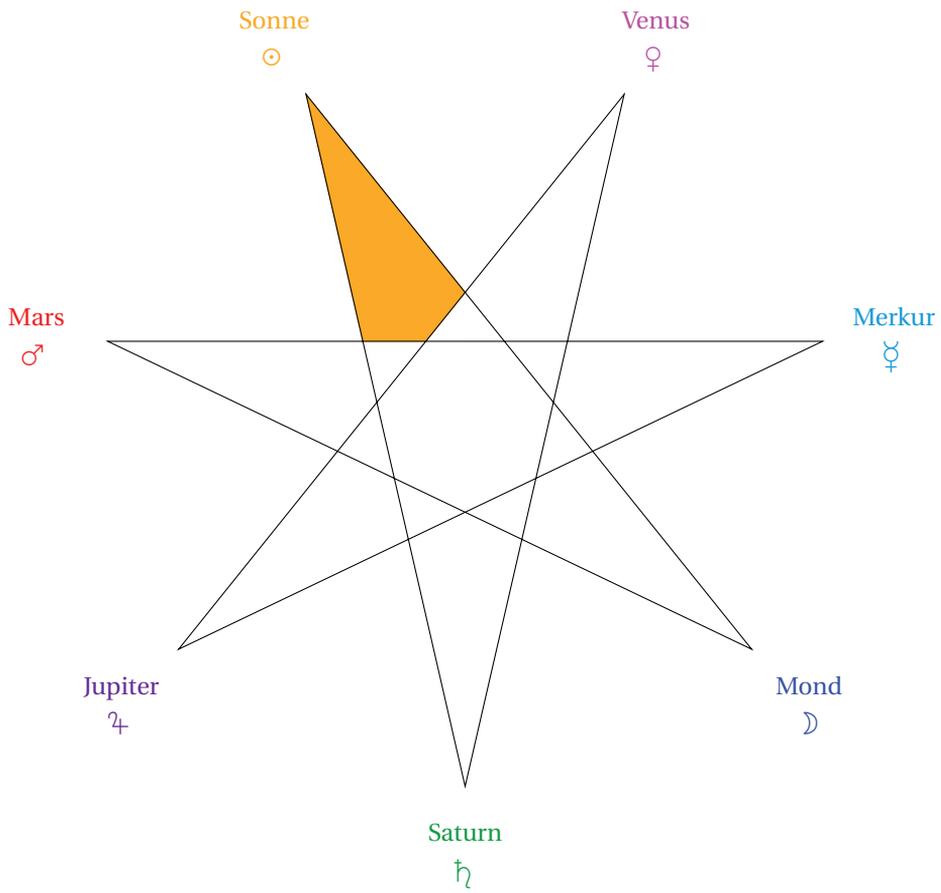
Im Raum der romanischen Sprachen ist, mit Ausnahme von Sonntag und Samstag, die Planetenwoche auch heute noch vollständig erhalten. In den germanischen Sprachen wurden die römischen Götternamen ersetzt durch die Namen der vergleichbaren germanischen Gottheiten (→ *Tabelle 0.3*): Mars wird ersetzt durch Tyr (auch Ziu genannt), Merkur durch Odin (Wotan), Jupiter durch Thor (Donar) und Venus durch Friya (Frigg).

⁹ Der Apostel Paulus schreibt im Brief an die Kolosser: „Darum soll niemand über euch zu Gericht sitzen in Sachen Speise und Trank, Fest, Neumond oder Sabbat...“ [Zwi07, Kolosser 2,16].

Tabelle 0.3 Die Namen der Wochentage in verschiedenen Sprachen Europas

Lateinisch	Italienisch	Französisch	Englisch	Deutsch
dies solis	Domenica	Dimanche	Sunday	Sonntag
dies lunae	Lunedì	Lundi	Monday	Montag
dies martis	Martedì	Mardi	Tuesday	Dienstag
dies mercurii	Mercoledì	Mercredi	Wednesday	Mittwoch
dies iovis	Giovedì	Jeudi	Thursday	Donnerstag
dies veneri	Venerdì	Vendredi	Friday	Freitag
dies saturni	Sabato	Samedi	Saturday	Samstag

Es ist nicht bekannt, dass der Sieben-Tage-Zyklus seit seiner Übernahme durch das Imperium Romanum jemals unterbrochen worden sei. Selbst das Dekret von Papst Gregor XIII., durch welches im Oktober 1582 zehn Tage aus dem Kalender gestrichen wurden, berücksichtigte die Folge der Wochentage (→ *Dies Dominica, Fussnote 28*).



☉ Sonntag

Dieses Kapitel ist der Sonne, dem Planeten des Sonntags, gewidmet. Die Sonne ist das Zentralgestirn unseres Planetensystems. Sie bestimmt zwei der drei unmittelbar wahrnehmbaren Zeitzyklen: den Zyklus von Tag und Nacht und den Zyklus der Jahreszeiten. In diesem Kapitel wird ersichtlich, dass der Tag und das Jahr, je nachdem, ob man die Sonne oder die Fixsterne als Bezugssystem nimmt, eine andere Bedeutung und insbesondere eine andere Dauer haben.

Der Altägyptische Sonnenkalender und der Julianische Kalender sind die ersten Kalender, die in diesem Buch betrachtet werden. Wir nennen sie die Sonnen-
Urkalender. Schon früh etablierte sich in Ägypten ein bürgerliches Jahr mit der Länge von 365 Tagen. Der Versuch, alle vier Jahre einen Schalttag einzufügen, scheiterte zunächst. Diese Idee wurde dann von Julius Cäsar wieder aufgegriffen und setzte sich schliesslich in der Form des Julianischen Kalenders durch.

1.1 Sonnentag und Sterntag

¹ Dabei wird die Erde als ruhendes Zentrum des Universums angenommen.

In der **geozentrischen** Betrachtungsweise¹ ist die Sonne das Gestirn, welches allein Tag und Nacht verursacht. Dass die Zeit vergeht, haben die Menschen seit eh und je vor allem durch diesen Zyklus von Tag und Nacht wahrgenommen. Aber was ist ein Tag und wie lange dauert er genau? Wir werden diese Frage mit Hilfe des Modells der Himmelskugel beantworten und dabei feststellen, dass sich die Sonne und die Fixsterne am Himmel unterschiedlich bewegen, und dass es darum notwendig ist, zwei verschiedene Tagesbegriffe zu definieren: den *Sonnentag* und den *Sterntag*.

1.1.1 Die Himmelskugel

Wenn wir in einer klaren Nacht den Sternenhimmel beobachten, können wir die Distanz zu den einzelnen Sternen nicht einschätzen. Es scheint uns, als wären sie alle etwa gleich weit von uns entfernt. Das uralte Weltbild, wonach die Sterne auf einer Kugeloberfläche liegen, entspricht genau dieser Vorstellung. Dieses Bild wird in der Astronomie auch heute noch verwendet: Die Sterne werden auf eine Kugeloberfläche *projiziert*. Letztere nennt man **Himmelskugel**. Der Radius dieser Kugel wird als „sehr gross“ angenommen, jedoch nicht näher festgelegt.

Fast alle Himmelskörper, die wir beobachten können, ändern ihre *gegenseitige Lage* auf der Himmelskugel nicht – oder nur so wenig, dass die Änderung mit bloßem Auge nicht wahrnehmbar ist. Wir nennen sie deshalb **Fixsterne**. Schon in der Antike unterschied man zwischen Fixsternen und Wandelsternen (Planeten), wobei zu letzteren auch Sonne und Mond gezählt wurden (→ *Einleitung*, *Fussnote 5*). Man glaubte damals, dass die Fixsterne auf der Himmelskugel angeheftet sind².

² Die Himmelskugel wurde deshalb *Firmamentum* (Himmelsfeste) genannt.

Um die für das Himmelskugelmodell benötigten Begriffe einführen zu können, ist es zunächst notwendig, dass die Erde eine gewisse Ausdehnung hat. Abhängig vom Standort des Beobachters auf der Erdoberfläche definieren wir (→ *Bild 1.2*):

- Die **natürliche Horizontebene** ist die Tangentialebene an die Erdoberfläche im Standort des Beobachters.

- Der **natürliche Horizont** ist der Schnittkreis der natürlichen Horizontebene mit der Himmelskugel.
- Die **Vertikallinie** ist die Gerade, welche durch den Standort des Beobachters geht und auf der Horizontebene senkrecht steht.
- Der obere Schnittpunkt der Vertikallinie mit der Himmelskugel heisst **Zenit**, der untere **Nadir**.

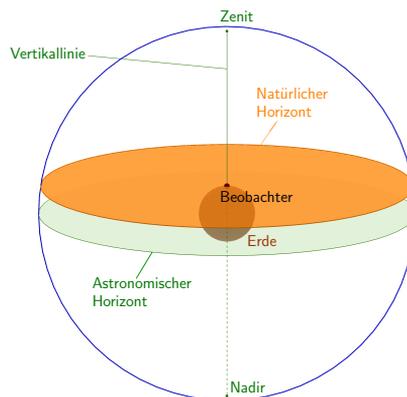


Bild 1.1 Landschaftshorizont

In der Alltagssprache ist der Horizont die Linie, welche Himmel und Erde trennt. Diesen Horizont nennen wir in der Folge *Landschaftshorizont*. Falls wie im Bild 1.1 weder Gebäude noch Berge am Landschaftshorizont beteiligt sind, stimmt die Projektion des Landschaftshorizontes auf die Himmelskugel mit dem natürlichen Horizont überein³. Parallel zur natürlichen Horizontebene geht die **astronomische Horizontebene** durch den Erdmittelpunkt, welche auch das Zentrum der Himmelskugel ist. Den Schnittkreis der astronomischen Horizontebene mit der Himmelskugel nennen wir den **astronomischen Horizont**.

³ Dabei wird die Augenhöhe des Beobachters vernachlässigt.

Bild 1.2
Natürlicher und astronomischer Horizont



Mit diesen Definitionen und Bezeichnungen kann nun das **Himmelskugelmodell** beschrieben werden. Wie bereits erwähnt ist der Radius der Himmelskugel nicht festgelegt. Da die Sterne sehr weit von der Erde entfernt sind, gelangt man zur Vorstellung, dass dieser Radius sehr gross und der Erdradius im Vergleich dazu verschwindend klein ist. Man lässt deshalb den Erdradius auf Null schrumpfen. Dadurch wird die Erde zum Mittelpunkt der Himmelskugel und der natürliche und der astronomische Horizont fallen zusammen (→ *Bild 1.3*).

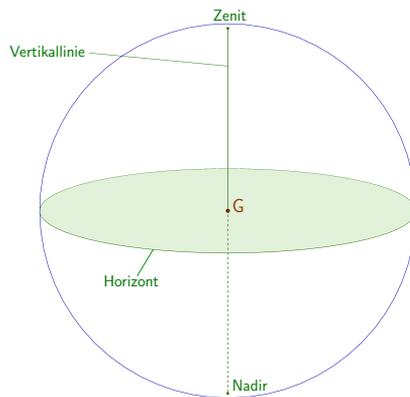


Bild 1.3
Himmelskugelmodell: Die Erde ist der *Mittelpunkt* und wird in den Bildern mit *G* bezeichnet

Die Begriffe *Zenit*, *Nadir* und *Vertikallinie* beziehen sich auf den Ort des Beobachters und behalten ihren Sinn.

1.1.2 Die tägliche Bewegung der Gestirne

Wenn wir den Sternenhimmel von einem festen Standort aus beobachten, stellen wir fest, dass die Fixsterne nicht am selben Ort bleiben. Fotografieren wir den Nachthimmel in einer Langzeitbelichtung oder durch additives Zusammensetzen einer Sequenz von Aufnahmen, so könnten wir z.B. *Bild 1.4* erhalten. Wir erkennen, dass alle Fixsterne sich um dieselbe Achse drehen. Diese Achse nennt man **Weltachse**. Die Weltachse trifft die Himmelskugel im sogenannten **Himmelsnordpol**⁴ und im für uns auf der Nordhalbkugel unsichtbaren **Himmelsnordpol**. Auf der Fotografie fällt der Himmelsnordpol mit den Mittelpunkten der Kreisbogen zusammen. Im Himmelskugelmodell liegen diese Mittelpunkte auf der Weltachse. In der Nähe des Himmelsnordpols befindet sich der Polarstern. Dem urtümlichen Weltbild entsprechend, haben die Fixsterne auch in unserem

⁴ Man beachte, dass der Himmelsnordpol und der Zenit im Allgemeinen nicht übereinstimmen.

Modell ihren festen Ort auf der Himmelskugel. Dies bedeutet, dass sich die Himmelskugel zusammen mit den Fixsternen gleichförmig um die Weltachse dreht.

Bild 1.4

Rotation der Fixsterne um den Himmelsnordpol



Der Grosskreis⁵, welcher durch die Himmelspole und den Zenit (Z) geht, heisst **Himmelsmeridian**⁶. Der Himmelsmeridian trifft den Horizont im **Nordpunkt N** und im **Südpunkt S** . Die Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Himmelskugel geht und auf der Weltachse senkrecht steht, ist die **Äquatorebene**. Ihr Schnittkreis mit der Himmelskugel heisst **Himmelsäquator**. Der Himmelsäquator schneidet den Horizont im **Ostpunkt E** und im **Westpunkt W** . In den Bildern verwenden wir die Bezeichnungen a für den Himmelsäquator, w für die Weltachse und v für die Vertikallinie. Die vier Punkte N , E , S und W des Horizonts, welche den lokalen geographischen Himmelsrichtungen entsprechen, werden **Kardinalpunkte** genannt (→ Bild 1.5).

Die täglichen Bahnen der Gestirne werden im Folgenden als Kreise angenommen, welche parallel zum Himmelsäquator auf der Himmelskugel liegen⁷. Ein solcher Kreis wird **Parallelkreis** genannt. Der in Bezug auf die Horizontebene höchste Punkt einer Gestirnsbahn heisst **oberer**, der tiefste **unterer Kulminationspunkt**. Beide Kulminationspunkte liegen auf dem Himmelsmeridian (→ Bild 1.5).

⁵ Ein **Grosskreis** auf einer Kugel ist ein Kreis, dessen Ebene durch das Kugelzentrum geht.

⁶ Man beachte, dass der Himmelsmeridian vom Standort abhängig ist.

⁷ Für Fixsterne gilt das exakt, für Planeten, Sonne und Mond nur näherungsweise.

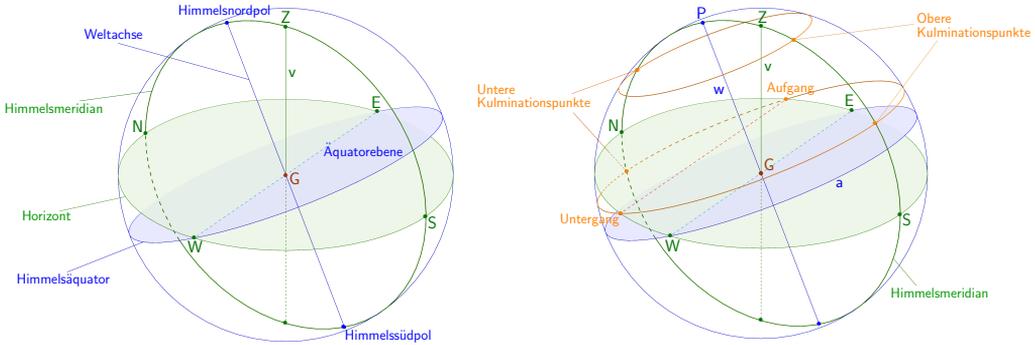


Bild 1.5
 Links: Himmelskugel mit Horizont, Weltachse und Himmelsäquator; rechts: tägliche Bahn der Gestirne

Die Fixsterne, deren tägliche Bahn vollständig beobachtet werden kann, heißen **Zirkumpolarsterne** (*circum* ist lateinisch und bedeutet *um herum*). Viele Gestirnsbahnen sind nicht vollständig beobachtbar. Eine solche Bahn schneidet den Horizont in ihrem **Aufgangs-** und **Untergangspunkt** (→ *Bild 1.5*). Bei Sonne, Mond und Planeten variieren Aufgangs- und Untergangspunkt im Laufe eines Jahres beträchtlich; im Gegensatz dazu sind diese Punkte bei den Fixsternen stets am selben Ort.

Nun sind die notwendigen astronomischen Begriffe eingeführt, damit Sonnen- und Sterntag definiert werden können: Der **wahre Sonnentag** ist die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden oberen Kulminationen der Sonne. Wegen des zweiten Keplerschen Gesetzes (→ *Dienstag, 3.2.3*) und der Schiefe der Ekliptik⁸ ist die Länge dieser Zeitspanne nicht konstant. Aus diesem Grund denkt man sich eine fiktive *mittlere Sonne*, welche gleichförmig durch den Himmelsäquator läuft, und bezieht die *mittlere Sonnenzeit* auf diese. Das Zeitintervall zwischen zwei oberen Kulminationen der mittleren Sonne heißt **mittlerer Sonnentag**, dessen Länge wir im Folgenden als Zeiteinheit verwenden und mit 1 d bezeichnen. Der mittlere Sonnentag wird in 24 gleich lange (sog. *äquinoktiale*) Stunden eingeteilt (1 d = 24 h = 86400 s). Die Dauer des *wahren* Sonnentags kann, je nach Jahreszeit, bis zu 50 s vom Mittelwert abweichen.

⁸ Für die Definition der Ekliptik siehe Abschnitt 1.2.

⁹ Eine präzisere Definition verwendet den Frühlingspunkt (→ *Abschnitt 1.2*) anstelle eines Fixsterns.

Der **Sterntag** ist die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden oberen Kulminationen desselben Fixsterns⁹. Ein Sterntag ist also das Zeitintervall, welches die Himmelskugel für eine volle Drehung um

die Weltachse benötigt. Er ist ca. 4 m kürzer als der Sonnentag. Genauer dauert er gegenwärtig

$$23\text{h } 56\text{m } 4.1\text{s} = 86164.1\text{s} \quad (1.1)$$

Wieso der Sterntag kürzer ist als der Sonnentag, wird später erklärt (→ *Abschnitt 1.3*).

1.2 Siderisches und tropisches Jahr

Auch beim Jahresbegriff kommt es darauf an, welches Bezugssystem man wählt. Eine naheliegende Möglichkeit besteht darin, den Fixsternhimmel als Referenz zu betrachten. Wie bereits erwähnt ist ein Sonnentag länger als ein Sterntag. Anders ausgedrückt, dreht sich die Sonne aus Sicht der Erde langsamer um die Weltachse als die Himmelskugel mit den Fixsternen. Man sagt auch, die Sonne bewege sich *rückläufig* gegenüber den Fixsternen. Das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der Sonne am selben Fixstern heisst **siderisches Jahr** (oder *Sternjahr*). Im Laufe eines siderischen Jahres addiert sich die tägliche Differenz von knapp 4 Minuten zu einem vollen Sterntag (→ *Abschnitt 1.3*). Wie die meisten astronomischen Grössen ist auch die Dauer des siderischen Jahres nicht konstant. Als Referenzwert geben wir die Dauer des Sternjahres 2000 an. Sie beträgt

$$365\text{d } 6\text{h } 9\text{m } 9.5\text{s} \approx 365.256360\text{d} \quad (1.2)$$

Man gelangt hingegen zum Begriff des *tropischen* Jahres, wenn man als Bezugssystem die geschlossene Kurve auf der Himmelskugel wählt, welche die Sonne innerhalb eines siderischen Jahres gegenüber den Fixsternen rückwärts durchläuft. Diese Kurve ist ein Grosskreis und wird **Ekliptik** genannt (→ *Bild 1.6*). Im Gegensatz zur Bahn eines Fixsterns ist die Ekliptik nicht parallel zum Himmelsäquator. Die Ebene der Ekliptik war im Jahr 2000 gegenüber der Äquatorebene im Mittel um

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21.4'' \quad (1.3)$$

geneigt. Den Winkel ε nennt man die **Schiefe der Ekliptik**. Dieser Winkel variiert langperiodisch mit einer Periode von ca. 41 000