Perspektiven der Mathematikdidaktik
Gabriele Kaiser *Hrsg.*

RESEARCH

Paul Gudladt

Inhaltliche Zugänge zu Anteilsvergleichen im Kontext des Prozentbegriffs

Theoretische Grundlagen und eine Fallstudie

MOREMEDIA

Springer Spektrum

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gabriele Kaiser, Sektion 5, Universität Hamburg, Hamburg, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerausbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Reihe herausgegeben von
Prof. Dr. Gabriele Kaiser
Universität Hamburg

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/12189

Paul Gudladt

Inhaltliche Zugänge zu Anteilsvergleichen im Kontext des Prozentbegriffs

Theoretische Grundlagen und eine Fallstudie

Springer Spektrum

Paul Gudladt
Institut für Mathematik, AG Didaktik der
Mathematik
Carl von Ossietzky University of Oldenburg
Oldenburg, Deutschland

Dissertation an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Oldenburg, 2020
Disputation am: 12.06.2020
Erstprüfer: Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf
Zweitprüferin: Prof. Dr. Astrid Fischer, Beisitz: Prof. Dr. Angelika May

ISSN 2522-0799 ISSN 2522-0802 (electronic)
Perspektiven der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-32446-9 ISBN 978-3-658-32447-6 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-32447-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Die Prozentrechnung – so möchte man als mathematischer Experte glauben – ist doch nur ein Rechnen mit Hundertsteln und damit ein kleiner und dazu noch besonders einfacher Teil der Bruchrechnung, der keiner tiefergehenden Beachtung bedarf. Allerdings gibt es wohl kaum ein schulmathematisches Themengebiet aus der frühen Sekundarstufe mit einer höheren Relevanz für den Alltag eines mündigen Erwachsenen. Man denke hier nur an Steuern, Sozialversicherungsbeiträge, Preisvergleiche, Tarifverhandlungen, Möglichkeiten der Energie- und Emissionseinsparung oder natürlich an die Wahlen politischer Gremien. Dabei wird in öffentlichen Diskussionen nicht selten versucht, durch manipulative Darstellungen oder ungenaue Formulierungen in der Prozentrechnung verzerrte Eindrücke zu erwecken. Es ist deswegen gleichermaßen erstaunlich wie besonders gravierend, dass zahlreiche empirische Untersuchungen große Schwierigkeiten vieler Jugendlicher mit diesem Themenbereich nachweisen.

Es ist also für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe besonders wichtig, diese spezielle Art des Vergleichens angemessen zu thematisieren und mit einem tragfähigen Verständnis zu unterfüttern. Nur so werden die Schülerinnen und Schüler im Erwachsenenalter dazu in der Lage sein, die Chancen und Grenzen der Prozentrechnung zur mathematischen Verarbeitung und Interpretation von Aspekten der realen Welt in deskriptiven und normativen Modellen einzuschätzen – und zu diesem ausgesprochen zentralen Aspekt der gesellschaftlichen Mündigkeit wollen wir den Schülerinnen und Schülern insbesondere im Mathematikunterricht verhelfen.

In diese Aufgabe ordnet sich die vorliegende Arbeit aus mathematikdidaktischer Perspektive ein. Es geht vorrangig darum herauszuarbeiten, in welchen verschiedenen Facetten der Prozentbegriff von Jugendlichen in der frühen Sekundarstufe entwickelt werden kann und durch welche Art von Aufgabenstellungen diese Facetten zum Tragen kommen und ggf. weiterentwickelt werden können. Paul Gudladt verfolgt dabei einerseits einen rekonstruktiven Ansatz aus deskriptiver Perspektive, liefert aber andererseits zugleich neue Erkenntnisse für die Gestaltung effizienter Lernumgebungen zum Aufbau eines adäquaten Prozentbegriffs. Das Kerninteresse besteht dabei darin, dass die Jugendlichen nicht nur Rechenverfahren kennen lernen, sondern die hintergründigen mathematischen Strukturen inhaltlich verständig durchdringen können.

Damit reiht sich die Arbeit in die fachdidaktische Tradition der Entwicklungsforschung ein und bereichert gleichermaßen die konstruktive wie die rekonstruktive Perspektive in der Mathematikdidaktik auf hohem Niveau.

Ralph Schwarzkopf

Vorwort

Vorab möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Mein größter Dank gebührt meinem Doktorvater Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf für die ausgezeichnete Betreuung während meiner Promotionszeit. Lieber Ralph, Deine gezielten Fragen und die gemeinsamen Analysen trugen dabei immer wieder dazu bei, den nächsten Schritt zur Fertigstellung gehen zu können. Die Diskussionen gepaart mit Deinen Ratschlägen und Anregungen habe ich immer als wertvoll empfunden. Gleiches gilt für das Lesen meines Manuskriptes und die darauf aufbauenden tiefgehenden Gespräche. Ganz besonders möchte ich mich dafür bedanken, dass Du immer ein offenes Ohr für mich hattest.

Prof. Dr. Astrid Fischer möchte ich für ihre Arbeit als Zweitgutachterin danken. In Gesprächen hast Du mir mit Deinen konkreten Fragen geholfen, Probleme genauer zu umreißen und diese anschließend lösen zu können.

Der gesamten AG möchte ich vor allem für die unzähligen gemeinsamen Kaffeetrinken danken, in denen es neben spannenden privaten Unterhaltungen auch viele Fachgespräche gab, die einen großen Mehrwert für meinen Blick auf die Mathematikdidaktik mit sich brachten. Jeder und jede Einzelne von Euch hat dabei ein Teil zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen:

Diana Hunscheidt hat mir bei der Konzeption der Aufgaben und beim Finden der Probanden geholfen.

Dr. Birte Julia Spechts Tür stand immer für kurze oder längere Fragen offen und sie half mir ganz besonders bei meiner ersten GDM-Tagung.

Hartmut Köhne stand mir immer für Fragen besonders hinsichtlich der Literatursichtung zur Verfügung und beteiligte sich bei der Vorstellung von Zwischenergebnissen mit Nachfragen und Denkanstößen.

Dr. Anna-Lena Barkley hat mich damals so freundlich in die AG aufgenommen und mit mir das Büro geteilt.

Dr. Marike Roskam stellte stets interessierte Nachfragen, die immer geholfen haben, den aktuellen Prozess zu fokussieren.

André Köhler danke ich für die intensiven mathematikdidaktischen Gespräche, die stets eine interessante Perspektive mit sich gebracht haben.

Dr. Simeon Schwob danke ich vor allem dafür, dass er immer da war, wenn ich Hilfe gebraucht habe. Ganz besonders bedanken möchte ich mich für die Hilfe bei der Bekämpfung von Word-Problemen.

Carolin Lena Danzer und Anna Edamus danke ich dafür, dass ich immer in ihrem Büro vorbeikommen konnte, wenn ich gerade mal etwas anderes als mein Manuskript und die Wände meines Büros sehen musste.

Ein ganz großer Dank gebührt Frau Paulo und Herrn Barkley für den Zugang zu Probanden und die freundliche Aufnahme an der jeweilige Schule sowie den mitwirkenden Schülerinnen und Schülern, die mir Einblick in ihre mathematischen Vorstellungen gewährt haben.

Meiner Frau Jessica danke ich für die unermüdliche Unterstützung, das Rückenfreihalten, Deine liebevollen Worte, wenn es gerade einmal nicht so lief und den fortwährenden Antrieb.

Meiner Mutter Maria und meinem Bruder Maximilian danke ich für die Unterstützung auf meinem bisherigen Lebensweg, denn ohne Euch wäre das alles so gar nicht machbar gewesen!

Vielen Dank!

Oldenburg Paul Gudladt
im Sommersemester 2020

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

> Lehrer: „Hast du das Gefühl, dass du nun mehr über Prozente weißt und damit sicher umgehen kannst?“
>
> Schülerin: „Ich habe das sichere Gefühl, etwas gelernt zu haben und es auch verstanden zu haben, aber ich werde deswegen doch lieber nicht immer ein Prozent ausrechnen, wenn ich es sehe.“ (Heckmann 2014, S. 4)

Dieses Zitat entstammt einem Lehrerschülergespräch, das im Anschluss an eine Unterrichtseinheit zur Prozentrechnung stattfand. Untersucht man die stoffdidaktische und empirische Fachliteratur, beispielsweise Hafner (2011), dann fällt schnell auf, dass die Prozentrechnung vor allem auf die drei Grundaufgaben Ermittlung des Prozentwerts, Grundwerts bzw. Prozentsatzes reduziert wird.

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, welche Argumentationen Jugendlichen nutzen, um die Gleichheit zwischen verschiedenen Darstellungen von Anteilen zu begründen. Unter Darstellungen von Anteilen sind die Variationen desselben Anteils in verschiedenen symbolischen Darstellungsformen gemeint, beispielsweise das umwandeln von Brüchen in Prozente. Die Umwandlungen zwischen diesen Darstellungen (insbesondere zwischen Bruch- und Prozentdarstellung) ist eine der vier Oberkategorien von Aufgaben der Prozentrechnung (Parker und Leinhardt 1995). Diese Überlegungen münden in der ersten Forschungsfrage: A1) Welche Vorstellungen werden aktiviert, wenn Jugendliche verschiedene Darstellungsformen von Anteilen miteinander vergleichen?[1]

[1]Die Forschungsfragen der vorliegenden Arbeit werden in Abschnitt 4.3 jeweils noch in differenziertere Unterfragen aufgeschlüsselt.

P. Gudladt, *Inhaltliche Zugänge zu Anteilsvergleichen im Kontext des Prozentbegriffs*, Perspektiven der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-32447-6_1

Die Kultusministerkonferenz fasst in den Bildungsstandards die Anforderungen an Schüler[2] im Rahmen der Prozentrechnung unter der Leitidee Zahl wie folgt zusammen: „Schülerinnen und Schüler…verwenden Prozent- und Zinsrechnung sachgerecht“[3] (Kultusministerkonferenz 2003). Diese allgemein gehaltene Forderung soll im zweiten Kapitel dieser Arbeit präzisiert werden. In Unterkapitel 2.1 wird der theoretische Rahmen der Prozentrechnung dargestellt. In Unterkapitel 2.2 bietet das Modell der Grundvorstellungen den theoretischen Rahmen für die Bewertung der Tragfähigkeit der Aussagen der Interviewten. Dabei werden vor allem die normativen Grundvorstellungen der Prozentrechnung explizit dargestellt.

Neben der Analyse der genutzten Argumentationen der Interviewten im Rahmen der Prozentrechnung werden in der vorliegenden Arbeit Darstellungsformen der Prozentrechnung untersucht. Unter anderem Walkington et al. (2013) und Scherer (1996a) konnten eine positive Auswirkung des Einbindens von Darstellungen in Aufgaben auf die Lösungsquoten von Schülern zeigen. Bislang wurde in der Forschung aber nur der positive Einfluss dieser Darstellungen erforscht. In der vorliegenden Arbeit wird herausgearbeitet, welche Darstellungen Interviewte nutzen, um die Gleichheit zwischen einer Bruch- und einer Prozentangabe zu begründen. Im zweiten Schritt sollen die Einsatzmöglichkeiten der Arbeitsmittel Prozentstreifen und Hunderterfeld im Rahmen der Prozentrechnung erörtert werden. Zu diesem Zweck liefert das Abschnitt 2.3 eine theoretische Einordnung und eine Begründung, warum im Rahmen dieser Arbeit das Konzept der ikonischen Darstellung nach Bruner genutzt wird (Bruner 1974). Dieses Bestreben lässt sich in der zweiten Forschungsfrage zusammenfassen: A2) Welche Chancen und Schwierigkeiten zeigen ikonische Darstellungen zur verständigen Auseinandersetzung mit verschiedenen Darstellungsformen von Anteilen?

In Kapitel 3 wird der Forschungsstand der letzten zwanzig Jahre zum Thema Prozentrechnung strukturiert dargestellt. Dabei erfolgt die Strukturierung an Hand der folgenden Kategorien: Erfolgsquoten, typische Fehlermuster, Aufgabenformate, Vorwissen zur Prozentrechnung, Interventionsstudien. Die Auswertung der PISA-2000-Studie lässt sich in diese Struktur nicht einbetten, daher wird sie in Abschnitt 3.3 gesondert dargestellt. Eine wesentliche Motivation den thematischen Schwerpunkt auf die Prozentrechnung zu setzen, war die folgende Forderung von Jordan et al. zum Ende ihrer Arbeit: „Die Fachdidaktik ist gefordert, Methoden und Kenntnisse über Lehr- und Lernstrukturen für einen adäquaten Umgang [im Themengebiet Prozentrechnung] zu schaffen“ (Jordan et al., 2004)

---

[2]Der Einfachheit halber wird hier und im Folgenden nur das generische Maskulin genutzt, damit sind jedoch alle Geschlechter adressiert.

Im abschließenden Unterkapitel 3.7 werden aus den Ergebnisse der theoretischen Ausarbeitung die Ableitungen für die Forschungsfragen der vorliegenden Arbeit zusammengefasst.

Kapitel 4 enthält die methodischen und methodologischen Grundfragen dieser Arbeit. Diese werden aufgeteilt in die zwei Bereiche konstruktive Perspektiven (4.1) und rekonstruktive Überlegungen (4.2). In Unterkapitel 4.1.5 werden die Bedingungen des empirischen Experiments erläutert.

Da sich die vorliegende Arbeit als Design-Research versteht, unterlag auch die Konstruktion der Aufgaben, die zur Erhebung genutzt wurden, rekonstruktiven Prinzipien. Gemäß dem zyklischen Vorgehen im Design-Researchs wurden Pilotstudien durchgeführt, in deren Folge es zu Überarbeitungen der genutzten Aufgaben kam. Die Aufgaben der Pilotstudien werden in Unterkapitel 4.1.3 dargestellt und es werden die jeweiligen Gründe dafür erläutert, dass die Aufgaben überarbeitet oder verworfen wurden. Anschließend werden in Unterkapitel 4.1.4 die Aufgaben dargestellt, die zur Durchführung der Hauptuntersuchung genutzt wurden. Die genutzten Aufgaben werden sowohl methodisch, als auch auf Basis der Forschungsergebnisse begründet. Anschließend wird erläutert, warum nur die ersten sechs Aufgaben zur Auswertung herangezogen wurden.

In Teilkapitel 4.2.1 wird erläutert, weshalb sich die vorliegende Arbeit der interpretativen Unterrichtsforschung zuordnet. Mit dieser Ausführung geht der Wechsel von einer konstruktiven zu einer rekonstruktiven Perspektive einher. Da jedes Forschungsvorhaben, das sich der interpretativen Unterrichtsforschung zuordnet, eine Verbesserung des Unterrichtsgeschehens zum Ziel hat, lautet die dritte Forschungsfrage: Welche Schlussfolgerungen können für das Vorgehen im Unterricht gezogen werden?

Zur Systematisierung der Argumentationen der Interviewten wird die Methode der Abduktion genutzt. Die zugrundeliegende Theorie wird in Unterkapitel 4.2.2 dargestellt. Die einzelnen Interviews wurden transkribiert und die Argumentationen mit Hilfe des Toulmin Schemas dargestellt. Das zugrundeliegende Vorgehen wird in Teilkapitel 4.2.3 und 4.2.4 dargestellt.

Auf Basis dieser Überlegungen werden in Unterkapitel 4.3 die gesamten Forschungsfragen zusammengefasst und begründet.

In Kapitel 5 werden die rekonstruierten Antwortkategorien einer jeden Frage dargestellt und, soweit vorhanden, an Hand der Literatur begründet. Darauf aufbauend werden in Unterkapitel 5.2 hypothetische Interviewverläufe dargestellt.

In Kapitel 6 werden die Interviewverläufe, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit analysiert werden, detailliert dargestellt und interpretiert. Sie werden in Reihenfolge der jeweils genutzten ikonischen Darstellung vorgestellt.

Im abschließenden Kapitel 7 werden in Unterkapitel 7.1 die Forschungsfragen beantwortet und in Abschnitt 7.2 Anknüpfungspunkte für zukünftige Forschung identifiziert.

2 Didaktische Überlegungen

Der inhaltlichen Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Prozentrechnung, auch wenn andere Anteilsvorstellungen in die Aufgaben mit einfließen. In Unterkapitel 2.1 wird der Prozentbegriff didaktisch und fachlich aufgearbeitet. Anschließend werden in Unterkapitel 2.2 sowohl allgemeine als auch spezifisch auf die Prozentrechnung bezogene Grundvorstellungen dargelegt, die bei der Analyse als Diagnosemittel fungieren werden. Abschließend wird in Unterkapitel 2.3 der zweite inhaltliche Schwerpunkt dieser Arbeit, die ikonischen Darstellungen, theoretisch dargelegt.

2.1 Der Prozentbegriff

In diesem Unterkapitel werden die Facetten des Prozentbegriffs und der Prozentrechnung aufgezeigt. Dieses Thema hat großen Wert, da es einen starken Alltagsbezug aufweist und den Schülern in ihrem Leben immer wieder begegnet. Aus fachwissenschaftlicher Sicht ist es nicht von besonderem Interesse, da es sich lediglich um einen Sonderfall der Bruchrechnung handelt (Scholz 2003, S. 16).

Zunächst wird der historische Verlauf der Prozentrechnung skizziert, anschließend werden die im Rahmen der vorliegenden Arbeit relevanten Begriffe diskutiert. Zuletzt werden die Standardaufgaben der Prozentrechnung und Lösungsstrategien vorgestellt.

P. Gudladt, *Inhaltliche Zugänge zu Anteilsvergleichen im Kontext des Prozentbegriffs*, Perspektiven der Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-32447-6_2

2.1.1 Historische Entwicklung des Prozentbegriffs

Den historischen Verlaufs der Prozentrechnung exakt darzustellen, erscheint schwierig, da in zahlreichen Epochen bereits Vorläufer der Prozentrechnung erscheinen. Parker und Leinhardt (1995, S. 430 f.) wählen den Ansatz, die historische Entwicklung der Prozentrechnung tabellarisch darzustellen. Tropfke (1980, S. 530) führt die Babylonier (2100 v. Chr.) als eine der ersten Zivilisationen an, die in Verhältnissen rechneten. Verhältnisangaben wurden in einem 60er-System dargestellt. Im zweiten Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung finden sich in China erste Verwendungen von Anteilen im Handel, beispielsweise in der *rule of three*, mit der auf Basis von Proportionalität Größen berechnet:

„Multiply the fruit by the desire and divide by the measure. The result will be the fruit of the desire." (Merzbach und Boyer 2011, S. 233).

Erste Gesetzestexte, die auf die Prozentrechnung verweisen, finden sich in Indien um 300 v. Chr. So mussten zum Beispiel fünf Prozent der Gewinne bei Glücksspielen an den Staat abgegeben werden. Im römischen Steuerrecht finden sich unter Kaiser Augustus erste Verweise auf die Grundideen der Prozentrechnung, ohne dass diese so genannt wurde. (Berger 1989, S. 7)

Das heutige Verständnis der Prozentrechnung und ihre Form gehen auf italienische Handelsleute zurück, bestätigte Aufzeichnungen reichen bis ins fünfzehnte Jahrhundert zurück. Erste Abwandlungen des Symbols der Prozentrechnung % finden sich um 1650, womit der Wandel von einer konkreten Menge zu einer abstrakten Beziehung eingeleitet wurde (Parker und Leinhardt 1995, S. 432). Das Symbol nahm viele Stationen (*per ceto, pceto*, pc°, p0/0)bis man Mitte des 19. Jahrhunderts auf die Angabe *per* verzichtete und aus dem Bruch $\frac{0}{0}$ das heute benutzte Symbol % wurde (Berger 1989, S. 8).

Der nächste historische Schritt ist die Loslösung des Prozentbegriffs vom reinen Handel und hin zu einem allgemeineren Gegenstand von Mathematik, zum Beispiel zum Zwecke der Darstellung und des Vergleichs von Daten. Damit einher geht die Entwicklung von einem rein situativen Verständnis des Begriffes hin zu einem vielfältigeren Verständnis. Auch diese Entwicklung ist erkennbar an Hand von zwei Worten, die eine konkrete Zahlenangabe beinhalten, (*per cent* als pro Hundert) zu einem mathematischen Symbol (%). (Parker und Leinhardt 1995, S. 434)

2.1.2 Bezugsfelder

Während die lexikalische Definition der Prozentrechnung als Zusatz zu Zahlenangaben, die sich auf die Vergleichszahl 100 beziehen (Brockhaus 2006, S. 212) eindeutig ist, bestehen für eine mathematisch und mathematikdidaktisch eindeutige Definition des Prozentbegriffs Hürden. Nach Berger (1989, S. 10) kann dies aus zwei Gründen nicht einwandfrei funktionieren: Zum einen sind die Sachsituationen, in denen die Prozentrechnung Anwendung findet, zu vielfältig; zum anderen lässt sich das Thema mathematisch nicht eindeutig zuordnen, da es sich in mehrere Teilbereiche gliedert. Berger spricht dabei sogar von einem „Definitionschaos“. Um sich jedoch einer Definition des Prozentbegriffs anzunähern, werden im Folgenden Sachsituationen und Alltagsbeispiele von Prozentrechnung, die verschiedenen mathematischen Aspekte sowie die Begriffe der Prozentrechnung dargestellt.

2.1.2.1 Sachsituationen und Alltagsbeispiele

Der Ursprung der Prozentrechnung liegt im Handel und reicht, wie beschrieben, bereits weit in die Geschichte zurück. Da sie auch heute im wirtschaftlichen Handeln eine wichtige Rolle spielt (Pöhler 2018, S. 9), ist der Aufbau von Fähigkeiten in diesem Gebiet für Schüler auch in Hinsicht auf die Vorbereitung für den Berufsalltag wichtig. Die zahlreichen Erwähnungen dieses Sachverhalts in der Fachliteratur für Lehrkräfte weist auf einen diesbezüglichen Konsens hin (ebd.). Kaiser (2011, S. 37 ff.) führt folgende Beispiel aus dem Berufsleben an: Rabatte gewähren; Auflockerung des Aushubs auf einer Baustelle; prozentuale Verluste berücksichtigen und angeben; Rezepte umsetzen; Mehrwertsteuerberechnung; maximale Steigungen einhalten, zum Beispiel beim Straßenbau.

Parker und Leinhardt (1995, S. 422) weisen zudem darauf hin, dass die Prozentrechnung auch in anderen Unterrichtsfächern notwendige Voraussetzung für einen Lernerfolg ist, so etwa in der Chemie für den korrekten Umgang mit Reaktionsgleichungen. Pöhler (2018, S. 9) listet weitere Anwendungsbeispiele des Prozentbegriffs im Alltag auf:

- Etwa Mehrwertsteuer; lockende Rabattangebote
- statistische Angaben in Medien (etwa Wahlergebnisse; Meinungsumfragen; Arbeitslosenzahlen), die teilweise in Form von Diagrammen dargestellt werden,
- Bankgeschäfte (etwa Steuern und Zinsen)
- Angabe zur Zusammensetzung oder zum Nährstoffgehalt von Nahrungsmitteln
- Angabe zur Zusammensetzung der Stoffe in Kleidungsstücken
- relative Vergleiche in unterschiedlichen Bereichen (etwa Auslastung von Parkhäusern mit unterschiedlichen Parkplatzanzahlen; Sieghäufigkeiten oder Trefferquoten im Sport)

Bereits in den Verwendungssituationen der Prozentrechnung sieht Meißner (1982, S. 122 ff.) Aspekte der fachlichen Einordnung. Er legt drei typische Verwendungssituationen von Prozenten dar. Dabei unterteilt er Sachsituationen in zwei Dimensionen: 1. Anteilssituationen, bei denen zwei Mengen mit einander verglichen werden, stellen eine „statische mengentheoretische Inklusion" dar (ebd). Ein Beispiel wäre die Frage, wie viel Prozent der deutschen Bevölkerung im letzten Jahr krank war. 2. Zuordnungssituationen unterstehen keiner statischen Sicht, im Fokus steht die Darstellung einer Veränderung. Beispielsweise die Frage nach dem prozentualen Zuwachs des Bruttosozialprodukts. Weiterhin unterscheidet Meißner die Sachsituationen in Bezug auf den Grad ihrer Allgemeinheit beziehungsweise in Bezug auf die Art der Gesetzmäßigkeit. Er unterteilt diesbezüglich in drei Gruppen:

Die erste Gruppe unterliegt keiner Proportionalität, da es nur um den funktionalen Zusammenhang zwischen einem Grundwert und einem Prozentwert geht. In die zweite Gruppe fallen Situationen, in denen eine Proportionalität unterstellt wird, die real nicht vorhanden ist. Als Beispiel führt Meißner eine Arbeitslosenstatistik an, bei der von der bundesweiten Quote auf Regionen geschlossen wird. Die dritte Gruppe bilden Situationen, die einer eindeutigen Proportionalität unterliegen.

Anteilssituation werden in Unterkapitel 2.2 genauer betrachtet.

2.1.2.2 Mathematische Aspekte der Prozentrechnung

Auch wenn die Prozentrechnung aus fachwissenschaftlicher Sicht „recht uninteressant" (Scholz 2003, S. 16) ist, spielen doch mehrere Aspekte unter fachlicher Betrachtung eine Rolle. Im Folgenden werden die Bezugsfelder Bruchrechnung, Schlussrechnung und Proportionalität im Hinblick auf die Prozentrechnung untersucht.

Die Prozentrechnung stellt einen Spezialfall der Bruchrechnung dar, definiert über den Nenner 100 als Standardrepräsentanten einer Äquivalenzklasse. So enthält Beispielsweise die Äquivalenzklasse alle Brüche oder, weitergefasst, alle Anteile, die dem Bruch $\frac{45}{100}$ und der rationalen Zahl 0,45 entsprechen (Berger 1989, S. 33). Der Vorteil der Verwendung des Nenners 100 ist die einfache Umformbarkeit von gemeinen Brüchen zu Dezimalzahlen. Andere Nenner, wie zum Beispiel 60 oder 120, bringen wiederum den Vorteil einer hohen Anzahl gemeinsamer Teiler mit. Durch den gemeinsamen Nenner sind, unter der Bedingung eines gemeinsamen Bezugswerts, Vergleiche, Addition und Subtraktion einfacher zu bewerkstelligen. (Appell 2004, S. 23)

Auch die Schlussrechnung als weiterer fachlicher Bezug der Prozentrechnung stellt kein eigenständiges mathematisches Themengebiet dar (Berger 1989, S. 20).

Nach Kirsch (1978) ist die Schlussrechnung[1] vom Körper der rationalen Zahlen abzugrenzen. Dies begründet er unter anderem mit den daher entstehenden Problemen mit negativen Zahlen und der 0 (Kirsch 1978, S. 392). Adlelfinger (1982, S. 54) sieht in der Schlussrechnung nur das isomorphe Verändern zweier Größen und wird von Schüler als „Proportions-Umgehungs-Strategie" genutzt.

Proportionalität (und damit auch die Dreisatzrechnung) definiert Kirsch (2002, S. 6) als Abbildung eines Größenbereichs in einen anderen Größenbereich über die Menge der positiven rationalen Zahlen, $\mathbb{Q}^+$, durch eine Abbildungsvorschrift. Bei der Prozentrechnung ist dabei einer der Größenbereiche immer eine Prozentangabe. Darauf aufbauend formuliert er die folgenden, für die Prozentrechnung entscheidenden mathematischen Bedingungen für die Abbildungsvorschrift:

1. Die Vervielfachungseigenschaft[2] gilt für jedes $r \in \mathbb{R} : \varphi(rA) = r\varphi(A)$ (Kirsch 1978, S. 399). Für die Prozentrechnung bedeutet dies: das r-fache des Prozentwerts entspricht dem r-fachen Wert der zugeordneten Größe.
2. Die Isotonie besagt mathematisch: Wenn A<B, dann $\varphi(A) < \varphi(B)$ (ebd.). Für die Prozentrechnung bedeutet dies: Ist ein prozentualer Wert kleiner als ein anderer, ist auch seine zugeordnete Größe kleiner.
3. Die Additionseigenschaft besagt: $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ (a. a. O., S. 401). Für die Prozentrechnung bedeutet dies: Die Addition zweier Prozentwerte entspricht der Addition ihrer jeweils zugeordneten Werte.
4. Unter der Gleichheit der Verhältnisse versteht Kirsch mathematisch $\varphi(A) : \varphi(B) = A : B$. Für die Prozentrechnung bedeutet dies: Das Verhältnis zweier prozentualer Angaben entspricht dem Verhältnis der beiden zugeordneten Werten.
5. Auf der Basis der bisher genannten Abbildungsvorschriften lässt sich die Proportionalitätskonstante (Hafner 2011, S. 34) begründen: $\frac{\varphi(A)}{A} = \frac{\varphi(B)}{B} = k = const$. Der Quotient k aus zugeordnetem Wert und Prozentwert ist immer gleich groß, im Fall der Prozentrechnung 1 %. Die Konstante ist zur Prüfung der Proportionalität bei empirisch gewonnen Daten notwendig. Ob das Verhältnis der Einheiten (Beispielsweise $\frac{\%}{\text{EUR}}$) inhaltlich sinnvoll ist, bedarf einer stoffdidaktisch Ausarbeitung.

Berger (1989, S. 20 ff.) formuliert die „mathematische Struktur der Prozentrechnung" als Bezugsgebiete der Abbildung eines Größenbereichs auf sich, Abbildung eines Größenbereichs in Q^+ und von-Hundert-Rechnung. Da diese Aspekte die

[1]Nach Griesel (2015, S. 14) gleichzusetzen mit der Dreisatzrechnung

[2]Begriff nach Hafner (2011, S. 33)

Lösungsstrategien teilweise untermauern, werden sie zu einem späteren Zeitpunkt dargestellt.

In diesem Abschnitt wurden verschiedene fachmathematische Verzahnungen mit der Prozentrechnung aufgezeigt. In Unterkapitel 2.2 wird dezidiert auf den multiplikativen Aspekt der Prozentrechnung und den Bezugswert eingegangen.

2.1.2.3 Begriffsklärung

Zur Vollständigkeit des Prozentbegriffs gehören die Grundbegriffe, die im Folgenden diskutiert werden.

1. Mit dem Grundwert wird das Ganze oder 100 % beschrieben. Der Grundwert kann je nach Anwendungssituation (vgl. Unterkapitel 2.2.5) den Ursprung einer Veränderung oder einen Vergleichswert darstellen (Berger 1989). Unabhängig der jeweiligen Anwendungssituation wird dem Grundwert 100 % zugeordnet (Pöhler 2018, S. 16). Bei speziellen Anwendungen wurden Konventionen festgelegt, was als Grundwert anzusehen ist. So wird beispielsweise bei der Berechnung einer Mehrwertsteuer der Nettopreis als Grundwert definiert (Berger 1989, S. 11).
2. Prozentwert: Werden Anteile eines Ganzen oder „ein Vielfaches des Ganzen“ betrachtet, wird vom Prozentwert gesprochen (Meierhöfer 2000, S. 10). Es handelt sich formal um ein $\frac{p}{100}$-faches des Grundwerts, wobei $p \neq 100$ sein muss (Hafner 2011, S. 38). Je nach Verwendungssituation kann auch ein Vergleich von zwei elementfremden Mengen von Interesse sein, dabei ist zu entscheiden, welche Menge der Grundwert und welche Menge der Prozentwert ist. (Pöhler 2018, S. 17)
3. Der Prozentsatz gibt das „Verhältnis von zwei Größen in Form eines Hundertstelbruchs an“ (Berger 1989, S. 11). Je nach Interpretation kann der ganze Bruch oder nur der Nenner gemeint sein (ebd.). Sill (2010, S. 9) fordert zur besseren sprachlichen Verständlichkeit, dass der Prozentsatz immer in der Form „p%“ angegeben sein muss, da er nur so auch im Alltag Erwähnung findet. Abschließend formuliert Sill (a. a. O., S. 10), in Anlehnung an Naumann (1987):

   > „Auf die Bezeichnung „Prozentsatz“, die im Alltag kaum vorkommt, kann im Rahmen des sicheren Wissens und Könnens verzichtet werden. Alle Prozentaufgaben lassen sich auch ohne diesen Begriff formulieren.“

Neben den bekannten Grundbegriffen sei noch auf die Erweiterung Pöhlers (2018, S. 17) hingewiesen. Pöhler möchte der problematischen Mehrdeutigkeit des Begriffs Prozentwerts durch weitere Ausdifferenzierung entgegenwirken:

> „[…][D]er Betrag, um den eine Größe in Situationsmustern mit Veränderungen vermehrt bzw. verringert wird, [soll] nicht ebenfalls mit dem Begriff Prozentwert belegt werden. Stattdessen soll – mit dem Ziel der Vermeidung einer mehrdeutigen Verwendung des Begriffes – für die adressierte Differenz zwischen Grund- und Prozentwert der Ausdruck absolute Differenz etabliert werden. In Äquivalenz dazu, sei für die Differenz zwischen 100 % und dem Prozentsatz der Terminus prozentuale Differenz eingeführt.“

Mit diesem Ansinnen verfolgt Pöhler das Ziel, die Termini Prozentwert und Prozentsatz eindeutig verwenden zu können, ohne eine Differenzierung nach Verwendungssituation im Sinne von Erhöhung und Verminderung voranstellen zu müssen. Zusätzlich solle der Begriff des neuen Prozentwerts benutzt werden, da die Begriffe verminderter und vermehrter Grundwert nur Situationen einer tatsächlichen Veränderung abdecken könnten. Dies wäre bei folgender Frage aber nicht inkludiert: Eine Steigerung von 25 % entspricht 50€. Wie viel Euro beträgt der neue Prozentwert?

2.1.2.4 Definition

In Bezug auf das „Definitionschaos“ (Berger 1989, S. 9) soll zu Beginn dieses Abschnitts kurz über der Begriff der Definition diskutiert werden: Die folgenden Beispiele Bergers lassen sich eher als Begriffsklärungen verstehen, da sie nur die Teilbeziehungen der Prozentrechnung beleuchten, sie seien aber dennoch genannt:

1. Prozentrechnung kann als ein Rechenverfahren verstanden werden, bei dem die Werte a1 und a2 miteinander verglichen werden. Dabei ist die Grundzahl 100 die Bezugsgröße. Mithilfe der Variablen Δa1 und Δa2 sowie p1 und p2, lassen sich alle Werte miteinander in Beziehung setzen: $100 = \Delta a1{:}p1$ und $a2{:}100 = \Delta a2{:}p2$ dabei bezeichnet ai den Grundwert, Δai den Prozentwert und pi den Prozentsatz.
2. Mit Hilfe der Maßzahl p können zwei Größen P und G miteinander in Verbindung gebracht werden.
3. Zum Vergleich von Bruchteilen eigenen sich Hundertstelbrüche am besten. Dabei entspricht $\frac{1}{100}$ 1 % und $\frac{p}{100}$ p %.
4. Die Begriffe der Prozentrechnung stehen im Rahmen der „Grundproportion“ im folgenden Verhältnis zueinander:
Prozentwert:Grundwert = Prozentsatz:100

5. Der prozentuale Anteil einer Größe wird als hundertster Teil oder als das 0,01-fache interpretiert.

Dabei bezieht sich Berger auf verschiedene Quellen. Auffällig ist, dass die Definitionen unter mathematischer Betrachtung danach unterschieden werden können, ob sie primär der Bruchrechnung oder der Schlussrechnung unterstehen. Sprachlich stehen vor allem die Grundbegriffe und Verwendungssituationen im Fokus der Definition.

Dieser Abschnitt schließt mit der folgenden Annäherung an eine für die vorliegende Arbeit gültige Begriffsbestimmung, die möglichst viele Aspekte in sich vereinen soll: Der Prozentbegriff unterliegt dem Zweck des Herstellens einer Vergleichsbasis. Die Basis 100 bietet den Vorteil der Umwandlung zu Dezimalzahlen und ermöglicht es, auch den Dreisatz als Berechnungsmethode einzusetzen. Je nach Verwendungssituation werden Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz in ein multiplikatives Verhältnis zueinander gestellt.

2.1.3 Aufgabentypen der Prozentrechnung

Im Rahmen der Prozentrechnung bieten sich vielfältige Aufgabentypen an. Parker und Leinhardt (1995, S. 424) zählen Schraffieren, Umwandeln, Problemsituationen und die Grundaufgaben (im Englischen *exercises*) auf.

Der Terminus Umwandeln meint die mathematische Gleichsetzung aus Bruch, Dezimalzahl und Prozentangabe. Die Aufgabenstellung verlangt die Ermittlung der gefragten symbolischen Anteilsangabe zur vorgegebenen Angabe. Dieser Aufgabentyp bildet den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit. Da die Aufgaben von Interviewten verlangen, zu begründen, weshalb zwei Anteilsdarstellungen gleichwertig sind (in Abgrenzung zum reinen symbolischen Überführen) wird im Folgenden die Formulierung der „Gleichheit der Darstellung einer Anteilsangabe“ genutzt.

Das Schraffieren findet im Kapitel zu den Lösungsmethoden eine eigenständige Nennung, da schraffieren die Basis des Ansatzes Van den Heuvel-Panhuizens (2003) bildet. Der zugrundeliegende Aufgabenkontext verlangt das Einzeichnen eines prozentualen Anteils an einer Fläche. Unter Problemsituationen sind Aufgaben zu verstehen, die einem Sachkontext unterliegen, aus dem prozentuale Anteile zu entnehmen sind. In diesem Zuge müssen die Werte auch den entsprechenden Grundbegriffen zugeordnet werden und der fehlende Wert ermittelt werden. (Parker und Leinhardt 1995, S. 424)

Die Grundaufgaben setzten sich aus den drei Grundbegriffen der Prozentrechnung zusammen. Sie sind dadurch definiert, dass zwei Angaben angegeben sind und die dritte gesucht ist. Durch Veränderungssituationen können auch noch weitere Aufgaben hinzukommen (Berger 1989, S. 11). Die Darstellung Pöhlers (2018, S. 21) soll im Folgenden verwendet werden, um eine strukturierte Übersicht über Grundaufgaben und einen Ausschnitt erweiterter Aufgabentypen zu bieten. Dabei ist die von ihr genutzte Spalte mit Beispielhaften Situationsmustern an dieser Stelle ausgelassen, da die den Situationsmustern zugrundliegenden Grundvorstellungen erst zu einem späteren Zeitpunkt der vorliegenden Arbeit dargestellt werden.

Abbildung 2.1 zeigt das Suchen des Prozentwerts (Typ I) dieser ist historisch gesehen die erste Grundaufgabe der Prozentrechnung, aus der die anderen beiden entstanden sind (Typ II und III) (Parker und Leinhardt 1995, S. 450, nutzen die selbe Nummerierung). Die Aufgabe des gesuchten Grundwerts (Typ III) ist dabei scheinbar aus Sicht des Alltagsbezugs kritisch zu sehen: „Der dritte Fall scheint für uns eine mathematische Kreation zu sein, die genutzt wird um die Triade zu vervollständigen, damit all drei möglichen Fälle zur Anwendung kommen“[3]

Generell folgen die drei Grundaufgaben unterschiedlichen Vorstellungen (vgl. Unterkapitel 2.2), aber auch der mathematische Hintergrund unterscheidet sich je nach Grundaufgabe. Wenn der Prozentsatz gesucht ist, steht beispielsweise eine Bruchgleichung im Vordergrund, während die Aufgabenstellung beim gesuchten Prozentwert einer funktionalen Betrachtung unterliegt (ebd.). Als Beispiel für die funktionale Betrachtung des Prozentwertes ist der Prozentoperator (auch beim Dreisatz) zu nennen.

Die in der Abbildung 2.1 dargestellten Aufgaben IV–XI unterstehen den von Pöhler (2018, S. 17) definierten Begriffen absolute Differenz und prozentuale Differenz, vergleichbar mit den Begriffen vermehrter Grundwert und verminderter Grundwert (Meierhöfer 2010, Hafner 2011). Aufgaben dieser Struktur enthalten vor allem Situationen einer Verminderung/Vermehrung um einen gegebenen Prozentsatz p %. Beispiele dafür sind Rabatte und die Erhöhungen der Mehrwertsteuer.

[3]Deutsche Übersetzung des Autors. Originalzitat: „Case 3 seems to us to be a mathematical creation, designed to complete the triad (three unknowns, therefore three possible equations)“ (ebd.).