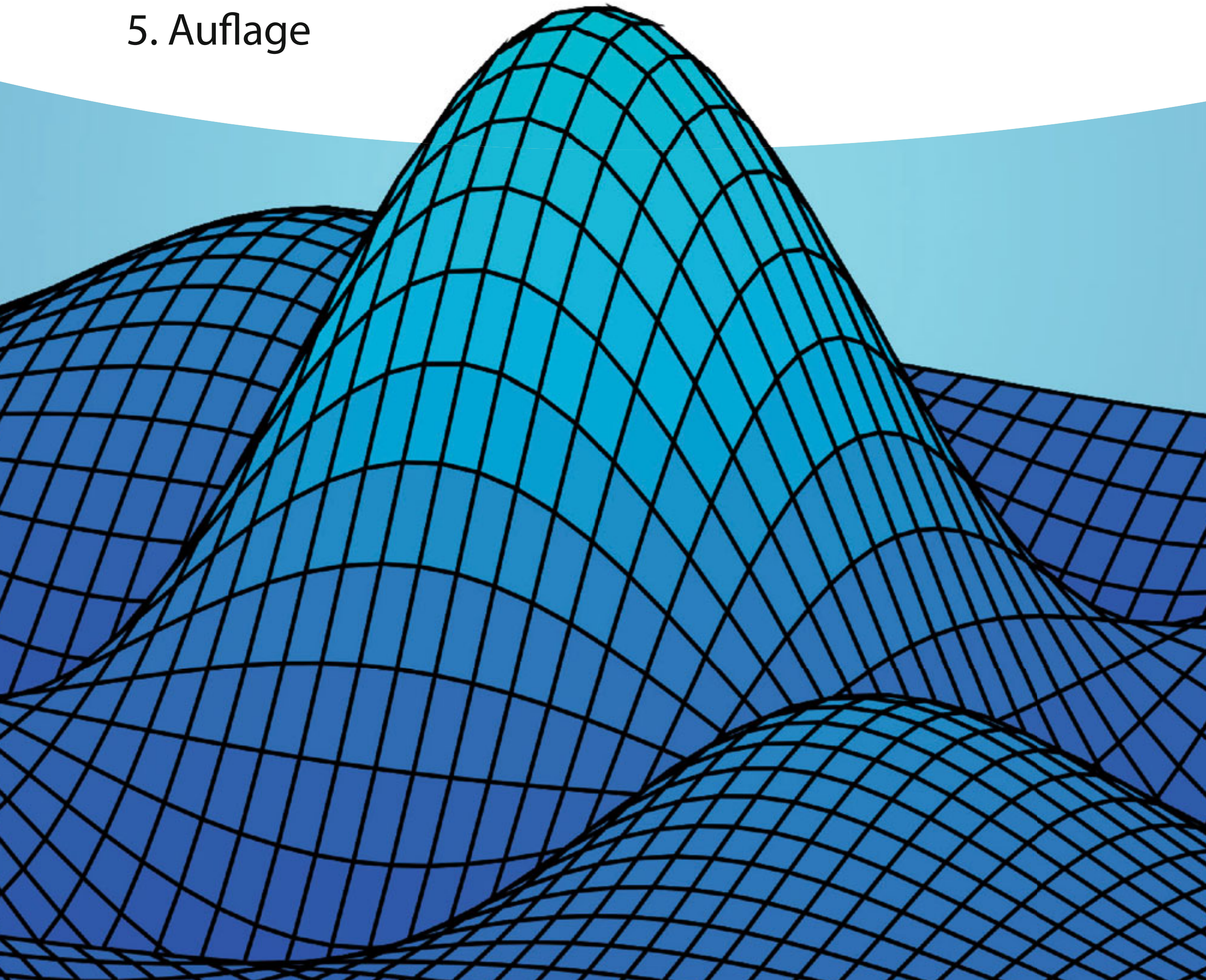
WILEY-VCH

Rainer Ansorge, Hans J. Oberle,
Kai Rothe und Thomas Sonar

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2

Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Integraltransformationen, Funktionen einer komplexen Variablen

5. Auflage



Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2

Differential- und Integralrechnung, Differentialgleichungen, Integraltransformationen, Funktionen einer komplexen Variablen

Rainer Ansorge, Hans J. Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar

5. Auflage

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Autoren

Rainer Ansorge
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Hans J. Oberle
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Kai Rothe
Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Bundesstraße 55
20146 Hamburg

Thomas Sonar
Technische Universität Braunschweig
Institut für Partielle Differentialgleichungen
Universitätsplatz 2
38106 Braunschweig

5. Auflage 2020

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Print ISBN 978-3-527-41375-1
ePDF ISBN 978-3-527-82290-4
ePub ISBN 978-3-527-82291-1

Umschlaggestaltung SCHULZ Grafik-Design, Fußgönheim, Deutschland
Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig, Deutschland

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur fünften Auflage

Wie schon bei der fünften Auflage des ersten Bandes haben wir bekannt gewordene Druckfehler in diesem Band korrigiert und ansonsten nur behutsam in den Text eingegriffen. Zu Beginn konkretisieren wir noch einmal den Begriff der Stetigkeit für Funktionen mehrerer Veränderlicher bevor die Differenzierbarkeit eingeführt wird, und im Abschnitt über die Taylor-Reihe haben wir die nützliche Multiindexschreibweise eingeführt. Bei der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren haben wir eine geometrische Motivation gegeben. Zur Lösung linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten geben wir neben der Jordanschen Normalform nun auch die Methode der Laplace-Transformation an, wobei wir Resultate aus einem späteren Kapitel vorziehen. Dieses Vorgehen hat sich bereits im Hörsaal bewährt.

Wir danken dem Verlag, insbesondere den Herren Dr. Preuß und Dr. Sendtko, für die uns gegebene Möglichkeit, dieses bewährte Standardlehrbuch, das sich nun bereits seit 25 Jahren auf dem Markt behauptet, erneut zu überarbeiten.

Hamburg und Braunschweig, im September 2019 *Die Verfasser*

Vorwort zur vierten Auflage

Nach der vierten Auflage des ersten Bandes, der gemeinsam mit dem ersten Aufgabenband (Band 3) im letzten Jahr erschien, liegt hiermit der zweite Band unseres Werkes zur Ingenieurmathematik in vierter Auflage vor. Dieser zweite Band erscheint gemeinsam mit dem zweiten Aufgabenband (Band 4), so dass nun das Gesamtwerk vollständig ist.

Auch dieser zweite Band wurde grundlegend überarbeitet und hat in Teilen sogar eine vollständige Neubearbeitung erfahren. Das Kap. 25 (Partielle Differentialgleichungen) wurde völlig neu strukturiert. Wir diskutieren jetzt auch schwache Lösungen im distributionellen Sinn, die in zahlreichen Anwendungen der Ingenieurwissenschaften eine Rolle spielen. Auch schwache Ableitungen und Sobolew-Räume werden eingeführt, die bei der Methode der Finiten Elemente (FEM) unverzichtbar sind. Die Kap. 26 und 27 (Numerische Behandlung linearer Evolutionsgleichungen und Numerische Behandlung linearer Randwertaufgaben) der vorhergehenden Auflagen wurden zu einem Kapitel zusammengefasst und stark gestrafft. Die numerischen Methoden für partielle Differentialgleichungen haben in den letzten Jahren so große Fortschritte gemacht, dass wir im Rahmen eines Lehrbuches zur Ingenieurmathematik nur noch einen kursorischen Überblick geben und auf die immer wachsende Zahl von Lehrbüchern verweisen können. Ebenfalls völlig neu bearbeitet und stark erweitert wurde das Kapitel über die Funktionen einer komplexen Variablen, das nun, im Gegensatz zu den vorhergehenden Auflagen, dem Kapitel zu den Integraltransformationen vorangeht. Durch diese Umstellung war es möglich, auch die Integraltransformationen intensiver und ausführlicher zu behandeln.

Wir danken unseren Studierenden herzlich für ihre konstruktive Kritik, die in diese Neuauflage eingeflossen ist. Insbesondere haben sich die Studierenden, die intensiv mit den Büchern gearbeitet haben, eine dauerhafte Fadenheftung gewünscht. Auch diesem Wunsch hat der Verlag entsprochen, wofür wir sehr dankbar sind. Besonderer Dank gebührt Frau Werner vom Verlag Wiley-VCH, die uns ihr Vertrauen entgegenbrachte, auch als wir gegen Ende etwas in zeitlichen Verzug gerieten. Möge auch diese Neuauflage den Studierenden wie auch den Ingenieurinnen und Ingenieuren in der Praxis von Nutzen sein.

Hamburg und Braunschweig, im Februar 2011 *Die Verfasser*

Vorwort zur dritten Auflage

Die erfreuliche Aufnahme, die unsere ‚Mathematik für Ingenieure' bei den Lesern gefunden hat, macht nun auch hinsichtlich des zweiten Bandes eine weitere Neuauflage notwendig.

Das Buch wurde vollständig durchgesehen, bekannt gewordene Fehler wurden beseitigt, das Stichwortverzeichnis wurde überarbeitet.

So hoffen wir, dass beide Bände und der ergänzende Aufgabenband auch weiterhin den Studierenden wie den Praktikern eine deutliche Hilfe sein werden.

Hamburg, im März 2003 *Die Verfasser*

Vorwort zur zweiten Auflage

Nach zwei Neuauflagen des ersten Bandes unserer *Mathematik für Ingenieure* erfordert nun auch der zweite Band auf Grund anhaltender Nachfrage eine weitere Auflage. Neben der Beseitigung inzwischen bemerkter Druckfehler haben wir vor allem dankbar zahlreiche Verbesserungsvorschläge der Kritik und unserer Leser verarbeitet. Auch einigen im Vorlesungsgebrauch zu Tage getretenen didaktischen und sprachlichen Ungeschicklichkeiten wurde Rechnung getragen, das Lehrbuchverzeichnis wurde aktualisiert usw. Der inzwischen als Band 3 dieses Werkes entstandene Aufgabenband ergänzt natürlich auch den Aufgabenbestand der einzelnen Abschnitte dieses Bandes durch zahlreiche weitere Problemstellungen (samt Lösungsvorschlägen).

So hoffen wir, dass insgesamt eine auch zukünftig sowohl den Bedürfnissen der Studierenden wie des Praktikers entgegenkommende seriöse Darstellung der für den Ingenieur und Naturwissenschaftler wesentlichen mathematischen Teilgebiete entstanden ist.

Nach der Übernahme des Akademie Verlages durch Wiley VCH erscheint die Neuauflage nun unter dem Namen dieses Hauses, und wir danken dem jetzigen Inhaber der Publikationsrechte für sein anhaltendes Interesse.

Hamburg, im Juni 2000 *Die Verfasser*

Vorwort

Dieser Band schließt an den ersten Band unserer *Mathematik für Ingenieure* an und widmet sich der Analysis bei mehreren reellen Veränderlichen, den Integralsätzen, gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, der Optimierung, den Speziellen Funktionen, Integraltransformationen und der Funktionentheorie einer komplexen Variablen.

Natürlich ermöglichen diese Hilfsmittel zusammen mit den fortgeschrittenen Kenntnissen der Studierenden in ihren jeweiligen technischen Hauptfächern nun auch in stärkerem Maße als im ersten Band motivierende Modellbildungen aus ingenieurwissenschaftlichen Bereichen.

Wiederum werden nahezu alle angesprochenen mathematischen Teilgebiete durch Einführung in zugehörige numerische Methoden und durch Übungsaufgaben ergänzt.

Hinsichtlich des didaktischen Konzepts verweisen wir auf das Vorwort im ersten Band. Der dort ausgesprochene Dank an all jene Damen und Herren, die das Erscheinen des Werkes erst ermöglicht haben, gilt natürlich für diesen zweiten Band unverändert fort.

Hamburg, im Januar 1994 *Die Verfasser*

17
Differentialrechnung mehrerer Variabler

In diesem Abschnitt behandeln wir die Differentialrechnung von Funktionen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen. Die Funktionswerte mögen dabei Skalare oder allgemeiner Vektoren in einem endlichdimensionalen, normierten Vektorraum sein.

Wie auch bei Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ in einer Variablen, d. h. $D \subset \mathbb{R}$, geht der Differenzierbarkeit von Funktionen in mehreren Veränderlichen die Stetigkeit voraus, die wir im ersten Band in Abschn. 9.1 allgemein definiert hatten. Wie in Definition 9.6 kann die Stetigkeit als Folgenstetigkeit definiert werden. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^m$, dann heißt $\boldsymbol{f}$ stetig an einem inneren Punkt $\boldsymbol{x}^0 \in D$, wenn

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)$$

für alle gegen $\boldsymbol{x}^0$ konvergenten Vektorfolgen aus D gilt. Das ε-δ-Kriterium (Satz 9.7) der Stetigkeit lautet

$$\forall \varepsilon > 0\colon \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall \boldsymbol{x} \in D\colon \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon\,,$$

wobei wir an den Normen die jeweiligen Räume notiert haben. Verwenden wir in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ jeweils die euklidische Norm (in endlichdimensionalen Räumen sind alle Normen äquivalent), dann lautet das ε-δ-Kriterium

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0\colon \quad \exists \delta > 0\colon \quad \forall \boldsymbol{x} \in D\colon\\ \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - x_i^0\right)^2\right)^{1/2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{i=1}^{m} \left(f_i(\boldsymbol{x}) - f_i(\boldsymbol{x}^0)\right)^2\right)^{1/2} < \varepsilon\,.\end{gathered}$$

Mehr noch als im Fall von reellen Funktionen einer Veränderlichen ist der Nachweis der Stetigkeit einer Funktion mehrerer Variablen mit Hilfe des ε-δ-Kriterium eine Kunst, die in der Regel nur für sehr einfache Funktionen gelingt.

Als einfaches Beispiel soll uns die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ aus Beispiel 17.7,

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}\,; & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\,,\\[2ex] 0\,; & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\end{cases}$$

Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2, 5. Aufl.
Rainer Ansorge, Hans J. Oberle, Kai Rothe und Thomas Sonar.

dienen, wobei wir $\boldsymbol{x} = (x, y)^{\mathrm{T}}$ geschrieben haben. Diese Funktion ist im Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (x^0, y^0)^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ *nicht* stetig, was wir mit dem Folgenkriterium zeigen wollen. Der Funktionswert bei $\boldsymbol{x}^0$ ist nach Definition $f(\boldsymbol{x}^0) = f(\mathbf{0}) = 0$, aber für die Folge

$$\boldsymbol{x}_n := \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \end{pmatrix} ,$$

die offenbar gegen $\boldsymbol{x}^0 = \mathbf{0}$ konvergiert, folgt

$$f(\boldsymbol{x}_n) = \frac{x_n y_n}{\left(x_n^2 + y_n^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^2} = \frac{n^4}{4n^2} = \frac{1}{4} n^2 \longrightarrow \infty , \quad (n \to \infty) .$$

In Abschn. 9.2 des ersten Bandes haben wir den Ableitungsbegriff sowohl für skalare, wie auch für vektorwertige Funktionen *einer* reellen Variablen kennengelernt.

Ist $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine skalare Funktion, so ist die Ableitung an einem inneren Punkt x_0 des Definitionsbereichs D, vgl. Definition 9.1, definiert durch den Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Dieser Wert gibt die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x))^{\mathrm{T}} : x \in D\}$$

im Punkt $(x_0, f(x_0))^{\mathrm{T}}$ an.

Ist $\boldsymbol{f} : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}^m$ nun eine vektorwertige Funktion einer skalaren, unabhängigen Variablen x, also $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)^{\mathrm{T}}$, so lässt sich die Ableitung (bei gleicher Definition wie oben) einfach komponentenweise berechnen:

$$\boldsymbol{f}'(x_0) = \left(f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0)\right)^{\mathrm{T}} .$$

Geometrisch beschreibt die Ableitung $\boldsymbol{f}'(x_0)$ in diesem Fall den Geschwindigkeitsvektor der *Kurve* $x \mapsto \boldsymbol{f}(x)$ im Punkt x_0. Die unabhängige Variable wird hierbei als Zeit interpretiert.

Für die Übertragung des Ableitungsbegriffs auf Funktionen mit mehreren unabhängigen Variablen ist diese Interpretation jedoch nicht sinnvoll. Die unabhängige Variable $\boldsymbol{x}$ spielt dann eher die Rolle eines Ortsvektors. Dagegen ist die folgende Interpretation der Ableitung $\boldsymbol{f}'(x_0)$ in diesem Fall nützlich:

Ist $f : \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine skalare, differenzierbare Funktion und ist $x_0 \in D^0$ ein innerer Punkt des Definitionsbereichs D, so ist $f'(x_0)$ die eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{R}$, für die die affin-lineare Funktion (Tangente) $\ell(x) := a(x - x_0) + f(x_0)$ die Funktion f in der Nähe von x_0 „am besten" approximiert, d. h., genau für $a = f'(x_0)$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \ell(x)}{|x - x_0|} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0 .$$

Mit Hilfe des Landau-Symbols, vgl. Definition 9.20, lässt sich diese Beziehung auch folgendermaßen schreiben:

$$f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = o(x - x_0)\,.$$

Diese Charakterisierung der Ableitung $f'(x_0)$ lässt sich nun ohne großen Mühe auch auf Funktionen mit Vektorargumenten übertragen.

Bevor wir diesen Weg in Abschn. 17.2 weiter verfolgen werden, sehen wir uns zunächst eine andere, naheliegende Vorgehensweise an. Hierbei friert man zur Differentiation nach dem Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ alle Komponenten von $\boldsymbol{x}$ bis auf eine Komponente ein und differenziert nun nach dieser verbliebenen skalaren Variablen x_i. Auf diese Weise erhält man nun n verschiedene Ableitungen, nämlich für jede der Variablen x_i, $i = 1, \ldots, n$, nach denen differenziert wird. Welche Bedeutung haben diese *partiellen* Ableitungen und in welchen Zusammenhang stehen sie zu der oben beschriebenen Approximationseigenschaft an die Funktion f?

17.1 Partielle Ableitungen

Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ in n Variablen $(x_1, \ldots, x_n)$.

Halten wir alle Variablen $x_1, \ldots, x_{i-1}$ und $x_{i+1}, \ldots, x_n$ fest und differenzieren nun nach der verbleibenden Variablen x_i, so ergeben sich die **partiellen Ableitungen** von f.

Definition (17.1)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{x}^0 \in D$.

a) f heißt in $\boldsymbol{x}^0$ nach der i-ten Koordinate x_i **partiell differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0) &:= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{e}_i\right) - f(\boldsymbol{x}^0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(x_1^0, \ldots, x_i^0 + t, \ldots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0\right)}{t}\end{aligned}$$

existiert. $\boldsymbol{e}_i$ bezeichnet hierbei den i-ten Einheitsvektor, $i = 1, \ldots, n$.
Der Grenzwert $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0)$ heißt die **partielle Ableitung** von f nach der Variablen x_i im Punkt $\boldsymbol{x}^0 \in D$, vgl. Abb. 17.1.

b) Ist f in allen Punkten $\boldsymbol{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar nach x_i, so heißt f **partiell differenzierbar nach der Koordinate $\boldsymbol{x_i}$** und $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bezeichnet die Abbildung $\boldsymbol{x}^0 \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0)$.
Trifft dies ferner für alle Koordinaten x_i, $i = 1, \ldots, n$, zu, so heißt die Funktion f **partiell differenzierbar**.
Sind darüber hinaus sämtliche partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, auf dem Definitionsbereich D stetig, so heißt f **stetig partiell differenzierbar**, oder eine **$\boldsymbol{C^1}$-Funktion** auf D.

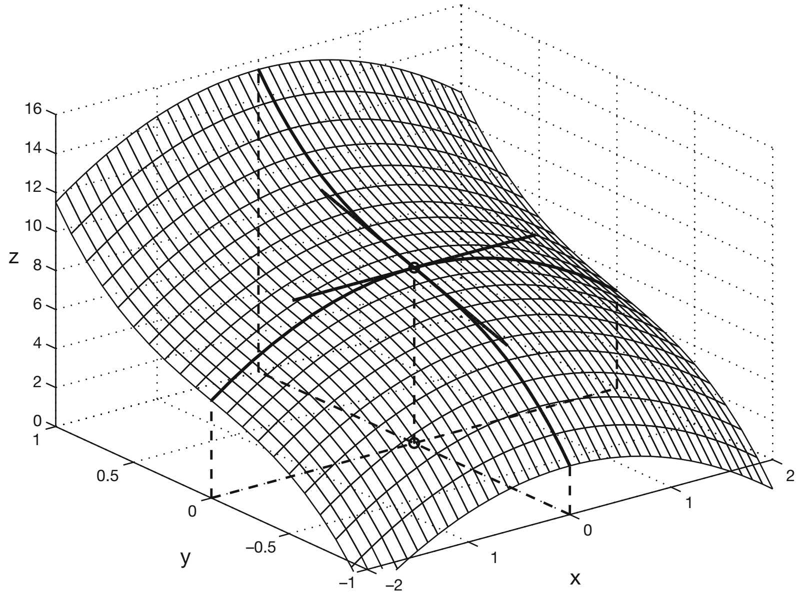


Abb. 17.1 Partielle Ableitungen einer Funktion $z = f(x, y)$.

Bemerkungen (17.2)

a) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}^0)$ ist gerade die übliche eindimensionale Ableitung der „partiellen" Funktion

$$x_i \mapsto f\left(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0\right)$$

an der Stelle x_i^0.

b) Sind die Funktionen f und g auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar, so gelten die üblichen **Differentiationsregeln**:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})\right) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) + \beta \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x})\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})^2}, \quad g(\boldsymbol{x}) \neq 0.$$

c) Für die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$ sind auch die Bezeichnungen $D_i f(\boldsymbol{x}^0)$ und $f_{x_i}(\boldsymbol{x}^0)$ gebräuchlich.

Beispiele (17.3)

a) Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) := 3xz + y\sin(x) + ze^y$ ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3z + y\cos(x)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x) + ze^y\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x + e^y$$

b) Der Schalldruck einer räumlich eindimensionalen Schallwelle ist gegeben durch die Funktion

$$p(x, t) := A\sin(\alpha x - \omega t)\,.$$

Die partielle Ableitung $\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha A\cos(\alpha x - \omega t)$ beschreibt dann zu einem festen Zeitpunkt t die örtliche Änderung des Schalldrucks. Analog beschreibt $\frac{\partial p}{\partial t} = -\omega A\cos(\alpha x - \omega t)$ an einem festen Ort x die zeitliche Änderung des Schalldrucks.

c) Die Zustandsgleichung eines idealen Gases lautet $pV = RT$. Dabei ist p der Druck, V das Volumen und T die (absolute) Temperatur des Gases. Ferner bezeichnet R die universelle Gaskonstante.
Jede der drei Größen p, V und T lässt sich vermöge der obigen Zustandsgleichung als Funktion der beiden anderen Variablen auffassen:

$$p = p(V, T) = \frac{RT}{V}\,, \qquad V = V(p, T) = \frac{RT}{p}\,, \qquad T = T(p, V) = \frac{pV}{R}\,.$$

Durch Berechnung der zugehörigen partiellen Ableitungen und unter Verwendung der Zustandsgleichung lässt sich folgern:

$$\frac{\partial V}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial T} = -\frac{\partial V}{\partial T}\,.$$

Definition (17.4)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}$ sei im Punkt $\boldsymbol{x}^0 \in D$ (nach allen Koordinaten) partiell differenzierbar. Der Vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^0)\right)^{\mathrm{T}}$$

heißt der **Gradient** der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}^0$.

Dabei wird der symbolische Vektor $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})^{\mathrm{T}}$ **Nabla-Operator** genannt. Er ist nach der Form eines hebräischen Musikinstrumentes benannt.

Für den Gradienten ist mitunter auch die Schreibweise $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}^0) := \nabla f(\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}$ als Zeilenvektor gebräuchlich. Wir werden im Folgenden beide Schreibweisen verwenden.

Bemerkung (17.5)
Sind die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ auf der offenen Menge D partiell differenzierbar, so gelten die folgenden **Differentiationsregeln**:

$$\begin{aligned}\nabla(\alpha f + \beta g) &= \alpha\nabla f + \beta\nabla g\\ \nabla(f\cdot g) &= g\cdot\nabla f + f\cdot\nabla g\\ \nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\cdot\nabla f - f\cdot\nabla g}{g^2}\,, \quad g(\boldsymbol{x}) \neq 0\,.\end{aligned}$$

Beispiele (17.6)
a) Für die Funktion $f(x, y) := \mathrm{e}^x \cdot \sin y$ erhält man

$$\nabla f(x, y) = (\mathrm{e}^x \sin y, \mathrm{e}^x \cos y)^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^x(\sin y, \cos y)^{\mathrm{T}}\,.$$

b) Es bezeichne $r(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ die euklidische Norm des Vektors $\boldsymbol{x}$. Durch Differentiation ergibt sich

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r}\,, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

und damit $\nabla r = \frac{\boldsymbol{x}}{r}$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$.

c) In Verallgemeinerung des Beispiels b) erhält man mittels der Kettenregel für $k \in \mathbb{Z}$:

$$\nabla r^k = k r^{k-1}\nabla r = k r^{k-2}\boldsymbol{x}\,, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\,.$$

d) Wir betrachten zwei Körper (Satellit und Erde) mit den Massen m und M. Der kleine Körper befinde sich in $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, der große Körper im Ursprung. Beide Körper werden durch die Gravitation angezogen. Das Gravitationskraftfeld, dass auf den Körper in $\boldsymbol{x}$ wirkt, ist gegeben durch $\boldsymbol{K} = -\gamma mM\boldsymbol{x}/r^3$. Dabei ist γ die Gravitationskonstante. Aufgrund der Beziehung c) sehen wir nun, dass es eine Funktion Φ gibt, nämlich $\Phi(\boldsymbol{x}) := \gamma mM/r$, für die $\nabla\Phi = \boldsymbol{K}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ gilt. Man sagt, Φ ist ein Potential für das Gravitationsfeld $\boldsymbol{K}$.

Erstaunlicherweise lassen sich jedoch nicht alle Eigenschaften der Differentialrechnung einer Variablen ohne Weiteres auf den Fall partieller Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlichen übertragen. So genügt beispielsweise die partielle Differenzierbarkeit i. Allg. nicht, um hiermit die Stetigkeit einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ garantieren zu können. Man vergleiche dagegen Satz 9.23a) für Funktionen einer Variablen.

Beispiel (17.7)
Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}\,, & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0)\\ 0\,, & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0)\,,\end{cases}$$

f ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar mit $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, sowie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^3}\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(x^2+y^2)^2} - 4\frac{x y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

für $(x, y) \neq (0,0)$.

Andererseits ist die Funktion f aber in $(x_0, y_0) = (0,0)$ nicht stetig! Wir haben bereits zu Anfang des Kapitels gesehen, dass der Grenzwert der Folge $f(1/n, 1/n)$ für $n \to \infty$ die Unstetigkeit in $(x_0, y_0) = (0,0)$ zeigt.

Um aus der partiellen Differenzierbarkeit einer Funktion auf deren Stetigkeit schließen zu können, benötigt man eine zusätzliche Eigenschaft, beispielsweise die Beschränktheit aller partiellen Ableitungen dieser Funktion. Diese Bedingung ist gerade in Beispiel 17.7 verletzt!

Satz (17.8)
Ist $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung eines inneren Punktes $\boldsymbol{x}^0 \in D$ partiell differenzierbar und sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, dort beschränkt, so ist f im Punkt $\boldsymbol{x}^0$ stetig.

Beweis.
Zu einem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ und $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_\infty < \varepsilon$ bilden wir:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0) = & \left[f(x_1, \ldots, x_n) - f\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0\right)\right] \\ & + \left[f\left(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0\right) - f\left(x_1, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0\right)\right] \\ & \vdots \\ & + \left[f\left(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)\right]\,. \end{aligned}$$

Für jede der obigen Differenzen betrachten wir f als Funktion nur einer Variablen, nämlich: $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \cdot\,)$, $f(x_1, \ldots, x_{n-2}, \cdot\,, x_n^0), \ldots, f(\,\cdot\,, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Alle diese partiellen Funktionen einer Variablen sind nach Voraussetzung differenzierbar und damit auch stetig in der Nähe von x_j^0, $j = n, n-1, \ldots, 1$. Somit lässt sich auf die obigen Differenzen jeweils der erste Mittelwertsatz, vgl. Satz 10.8, anwenden und man erhält mit geeigneten Zwischenstellen $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0) = & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n)\ \left(x_n - x_n^0\right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\ \left(x_1, \ldots, x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_n^0\right)\ \left(x_{n-1} - x_{n-1}^0\right) \\ & \vdots \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_1}\ \left(\xi_1, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)\ \left(x_1 - x_1^0\right)\,. \end{aligned}$$

Nun sind die partiellen Ableitungen nach Voraussetzung in der Umgebung $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_\infty < \varepsilon$ beschränkt: Man erhält daher aus der obigen Relation eine Abschätzung der Form:

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^0)| \leq C_1 \, |x_1 - x_1^0| + \ldots + C_n \, |x_n - x_n^0| \, .$$

Daher folgt $f(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_\infty \to 0$, also die Stetigkeit von f in $\boldsymbol{x}^0$. ■

Bemerkung (17.9)
Die Voraussetzungen des Satzes 17.8 sind erfüllt, falls f **stetig** partiell differenzierbar ist. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, sind dann nämlich aufgrund der Min-Max-Eigenschaft von stetigen Funktionen, vgl. Satz 9.13, auf einem Kompaktum $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\|_\infty \leq \varepsilon$ beschränkt!

Stetig partiell differenzierbare Funktionen sind mithin immer auch stetig.

Höhere Ableitungen

Definition (17.10)
Eine skalare Funktion f sei auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen sind dann selbst wieder Funktionen $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$, und wir können uns fragen, ob diese wiederum partiell differenzierbar sind. Ist dies der Fall, so erhalten wir hiermit die **partiellen Ableitungen zweiter Ordnung** der Funktion f.

Induktiv definieren wir für $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} \right) , \qquad k \geq 2 \, .$$

Die Funktion f heißt ***k*-fach partiell differenzierbar**, falls alle partiellen Ableitungen der Ordnung k

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = D_{i_k} D_{i_{k-1}} \ldots D_{i_1} f = f_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}} \, , \; \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$$

gemäß der obigen Definition auf D existieren.

Sind diese partiellen Ableitungen zudem alle stetig, so heißt die Funktion f ***k*-fach stetig partiell differenzierbar**, oder eine **C^k-Funktion** auf D, $k = 1, 2, 3 \ldots$

Darüber hinaus werden stetige Funktionen üblicherweise auch als **C^0-Funktionen** bezeichnet. Ferner heißen Funktionen, die beliebig oft stetig partiell differenzierbar sind, **C^∞-Funktionen**.

Für C^2-Funktionen ist die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung berechnet werden, unerheblich. So erhält man beispielsweise für die Funktion $f(x, y) := x^3 \sin y + x^4 y^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 \cos y + 2x^4 y) = 3x^2 \cos y + 8x^3 y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 \sin y + 4x^3 y^2) = 3x^2 \cos y + 8x^3 y\,.$$

Tatsächlich ist aber die Stetigkeit der partiellen Ableitungen hierbei eine unentbehrliche Voraussetzung.

Satz (17.11): Vertauschbarkeitssatz von Schwarz[1]
Ist $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion auf der offenen Menge D, so gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\boldsymbol{x})\,, \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in D\,.$$

Beweis.
Da für die Aussage des Satzes offenbar nur die Koordinaten x_i und x_j eine Rolle spielen, genügt es, o. B. d. A. den Fall $n = 2$ sowie $i = 1$ und $j = 2$ zu betrachten.

Sei also $(x^0, y^0) \in D$ und $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass

$$Q := \{(x, y) : |x - x^0| \le \varepsilon \;\wedge\; |y - y^0| \le \varepsilon\} \subset D\,.$$

Für $(x, y) \in Q$ mit $x \neq x^0$ und $y \neq y^0$ berechnen wir den Ausdruck

$$A(x, y) := f(x, y) - f(x^0, y) - f(x, y^0) + f(x^0, y^0)\,.$$

Unter zweifacher Anwendung des Mittelwertsatzes in einer Variablen finden wir

$$\begin{aligned}
A(x, y) &= (f(x, y) - f(x^0, y)) - (f(x, y^0) - f(x^0, y^0))\\
&=: Z_1(y) - Z_1(y^0)\\
&= Z_1'(\eta_1)\,(y - y^0)\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_1) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(x^0, \eta_1\right)\right)(y - y^0)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(\xi_1, \eta_1)\,(x - x^0)\,(y - y^0)
\end{aligned}$$

mit Zwischenwerten $\xi_1 = x^0 + \theta_1(x - x^0)$ und $\eta_1 = y^0 + \widetilde{\theta}_1(y - y^0)$, $0 < \theta_1, \widetilde{\theta}_1 < 1$.

1) Hermann Amandus Schwarz (1843–1921); Halle, Zürich, Göttingen, Berlin.

Eine andere Zusammenfassung der Terme in $A(x, y)$ ergibt

$$\begin{aligned} A(x, y) &= (f(x, y) - f(x, y^0)) - (f(x^0, y) - f(x^0, y^0)) \\ &=: Z_2(x) - Z_2(x^0) \\ &= Z_2'(\xi_2)(x - x^0) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2, y^0)\right)(x - x^0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\xi_2, \eta_2)(x - x^0)(y - y^0) \end{aligned}$$

mit Zwischenwerten $\xi_2 = x^0 + \theta_2(x - x^0)$ und $\eta_2 = y^0 + \widetilde{\theta}_2(y - y^0)$, $0 < \theta_2, \widetilde{\theta}_2 < 1$.

Da $x \neq x^0$ und $y \neq y^0$ vorausgesetzt wurde, folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\xi_1, \eta_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\xi_2, \eta_2)\,.$$

Bilden wir nun den Grenzwert dieser Ausdrücke für $(x, y) \to (x^0, y^0)$, so erhält man aufgrund der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x^0, y^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x^0, y^0)\,.$$

■

Folgerung (17.12)
Ist f eine C^k-Funktion, $k \geq 2$, so kann man die Reihenfolge der Differentiationen zur Berechnung der partiellen Ableitungen von f bis zur k-ten Ordnung beliebig vertauschen

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\, \partial x_{i_{k-1}} \ldots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_k}\, \partial x_{j_{k-1}} \ldots \partial x_{j_1}}\,,$$

wobei $(j_1, \ldots, j_k)$ eine beliebige Permutation von $(i_1, \ldots, i_k)$ ist.

Beispiele (17.13)

a) Dass die Stetigkeit der partiellen Ableitungen eine wichtige Voraussetzung für Vertauschbarkeit der Ableitungsreihenfolge ist, zeigt das folgende Beispiel. Die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,, & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig und zweifach partiell differenzierbar. Eine explizite Berechnung der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung ergibt jedoch

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0) = -1 \\ f_{yx}(0, 0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0) = +1\,. \end{aligned}$$