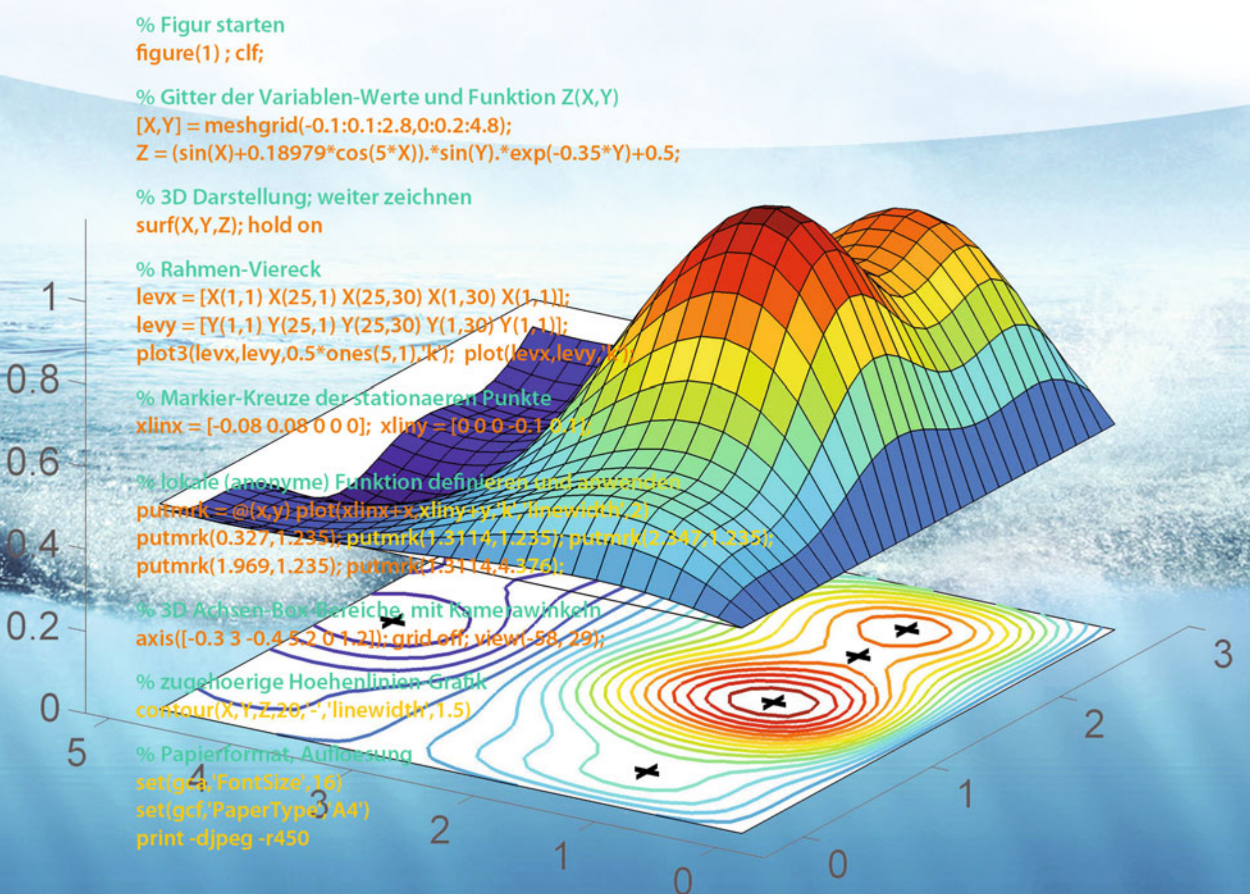
WILEY-VCH

Stefan Adam

# MATLAB und Mathematik kompetent einsetzen

## Eine Einführung für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Zweite Auflage



*Stefan Adam*

**MATLAB und Mathematik kompetent einsetzen**

*Stefan Adam*

# MATLAB und Mathematik kompetent einsetzen

Eine Einführung für Ingenieure und Naturwissenschaftler

2. Auflage

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

**Autor**

***Stefan Adam***
Rue des Parcs 53
2000 Neuchâtel
Schweiz

2. Auflage 2017



**Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.



**Umschlaggestaltung** Adam Design, Weinheim
**Typesetting** le-tex publishing services GmbH, Leipzig

**Print ISBN** 978-3-527-41262-4
**ePDF ISBN** 978-3-527-68028-3
**ePub ISBN** 978-3-527-68026-9
**Mobi ISBN** 978-3-527-68027-6
**obook ISBN** 978-3-527-80170-1

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Dieses Buch widme ich meinen Leserinnen und Lesern!

Ich wünsche Ihnen viel Elan und Entdeckerfreude beim Eintauchen in die Welt von MATLAB und Mathematik!

# Inhaltsverzeichnis

**Vorwort** *XV*

**1 Grundkenntnisse von MATLAB** *1*
1.1 Bekanntschaft schließen mit MATLAB *1*
1.1.1 Die Arbeitsoberfläche von MATLAB *1*
1.1.2 Zum Einstieg: Berechnungen mit einfachen Zahlen *2*
1.1.3 Befehlsstruktur: ein erster Überblick *4*
1.1.4 Berechnung oder Formel-Manipulation? *6*
1.1.5 Tabellen, Vektoren und Matrizen *11*
1.1.6 Hintergrundinformation und Hilfefunktionen *13*
1.1.7 Datenaustausch mit Files *15*
1.2 Grundlagen der Matrizenrechnung *20*
1.2.1 Definitionen und Fachausdrücke *20*
1.2.2 Indizieren der Matrixelemente *24*
1.2.3 Das Transponieren einer Matrix *24*
1.2.4 Addition und Subtraktion von Matrizen *25*
1.2.5 Das Produkt von zwei Matrizen *26*
1.2.6 Die Einheitsmatrix *30*
1.2.7 Kann man durch Matrizen dividieren? *31*
1.3 Matrizenrechnung mit MATLAB *33*
1.3.1 Einstieg in die Matrizenrechnung mit MATLAB *33*
1.3.2 Indizieren in MATLAB *37*
1.3.3 Beispiele zur Schleifenprogrammierung *39*
1.3.4 Turmmatrizen (Permutationsmatrizen) *40*
1.3.5 Einfache Beispiele von linearen Gleichungssystemen *42*
1.3.6 Matrizen zur Darstellung von Daten *43*
1.4 Schritte zum eigenen Programm *46*
1.4.1 Skript-M-Files und Funktions-M-Files *46*
1.4.2 Objekt-Orientiertes Programmieren *52*
1.5 Einfache grafische Darstellungen mit MATLAB *56*
1.5.1 Funktionsdarstellungen *57*
1.5.2 Polygone, Kreise, Sterne *60*
1.5.3 Flächen malen *62*

1.5.4 Properties von grafischen Objekten *64*
1.6 Übersicht über die wichtigsten Grundbefehle in MATLAB *65*
1.6.1 In MATLAB definierte Operatoren und Grundbefehle *65*
1.6.2 Das Definieren von Zahlen, Matrizen und Vektoren *68*
1.6.3 Schleifen und Bedingungen *70*
1.6.4 Mathematische Funktionen *71*
1.6.5 Grundfunktionen im symbolischen Modus *72*
1.6.6 „struct"- und „cell"-Variablen *73*
1.6.7 Grafische Darstellungen *74*
1.7 MATLAB Grundlagen aktivieren *76*

**2 Auffrischen der Elementarmathematik** *91*
2.1 Basiswissen zum Funktionsbegriff *91*
2.1.1 Funktionen als spezielle Relationen *91*
2.2 Linienplots in MATLAB *96*
2.2.1 Grundfunktionen kennenlernen mit MATLAB *97*
2.2.2 Kurven in Parameterdarstellung *100*
2.2.3 Spiralen *102*
2.2.4 Zykloiden *103*
2.2.5 Weitere Mathematische Klassiker *106*
2.2.6 Die „Versiera di Agnesi" *107*
2.2.7 Interpolationsfunktionen *110*
2.2.8 Ausflug ins Dreidimensionale *114*
2.3 Folgen und Reihen *116*
2.3.1 Arithmetische Folgen und Reihen *117*
2.3.2 Geometrische Folgen und Reihen *119*
2.3.3 Die Anwendung bei Zinsberechnungen *122*
2.3.4 Beherrschbare Unendlichkeit *125*
2.3.5 Fibonacci-Folgen *128*
2.4 Keine Angst vor komplexen Zahlen! *129*
2.4.1 Die Rechenregeln für komplexe Zahlen *130*
2.4.2 Die $n$-ten Einheitswurzeln *134*
2.4.3 Die $n$-ten Wurzeln aus beliebigen Zahlen *135*
2.4.4 Komplexe Zahlen näher kennenlernen *136*
2.4.5 Beschreibung von stationären Schwingungen *138*
2.5 Elementarmathematik aktivieren *141*

**3 Basiswissen zur Linearen Algebra** *151*
3.1 Lineare Gleichungssysteme und ihre Lösbarkeit *151*
3.1.1 Gleichungssystem und zugehörige Matrizengleichung *151*
3.1.2 Die verschiedenen Fälle der Lösbarkeit *152*
3.1.3 Die Bedingungen zur eindeutigen Lösbarkeit – Regularität *152*
3.1.4 Die wichtigsten Fachausdrücke der Lösbarkeitsdiskussion *153*
3.1.5 Lineare Abhängigkeit von Vektoren *154*
3.1.6 Lineare Systeme und ihre Teilräume *158*

3.1.7 Die Determinante einer Matrix *160*
3.2 Anwendungen von linearen Gleichungssystemen *162*
3.2.1 Gleichungssysteme aus Tabellenkalkulationen *162*
3.2.2 Kirchhoff'sche Netze *163*
3.2.3 Statik von Tragwerken *166*
3.2.4 Dünn besetzte Matrizen *169*
3.2.5 Polynombestimmung *169*
3.3 Orthogonalität und Projektionen *171*
3.3.1 Orthogonale Vektoren *171*
3.3.2 Projektionen von Vektoren *173*
3.3.3 Orthogonale Teilräume *175*
3.3.4 Orthogonale Matrizen *175*
3.4 Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme *177*
3.4.1 Die Bedeutung der Dreiecksmatrizen *177*
3.4.2 Der Gauß-Algorithmus *177*
3.4.3 Der Gauß-Algorithmus mit MATLAB *180*
3.4.4 Das Vertauschen von Zeilen: Pivot-Suche *181*
3.4.5 Die L-R-Zerlegung *183*
3.4.6 Der Gauß-Jordan-Algorithmus *185*
3.4.7 Singuläre Systeme *185*
3.4.8 Die Q-R-Zerlegung *187*
3.5 Eigenwerte und Eigenvektoren *190*
3.5.1 Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren *190*
3.5.2 Wiederholte Abbildungen durch Matrizen *192*
3.5.3 Lösungsmethoden für Eigenwertprobleme *193*
3.5.4 Stabilität von Systemen *196*
3.6 Probleme mit der endlichen Rechengenauigkeit *197*
3.6.1 Die Zahlendarstellung im Computer *197*
3.6.2 Auslöschung, Stabilität und Wohldefiniertheit *201*
3.6.3 Die Kondition einer Matrix *203*
3.6.4 Die Option `digits` *204*
3.7 Lineare Algebra aktivieren *205*

**4 Ebenen- und Raumgeometrie** *217*
4.1 Vektoren in der Elementargeometrie *217*
4.1.1 Addition und Subtraktion von Vektoren *218*
4.1.2 Produkte zwischen Vektoren *220*
4.2 Beispiele aus der Raumgeometrie *222*
4.2.1 Geometrische Grundelemente *222*
4.2.2 Geometrische Grundaufgaben *226*
4.2.3 Anwendungsbeispiele *231*
4.3 Längen und Winkel in höheren Dimensionen *232*
4.4 Matrixformulierung geometrischer Abbildungen *236*
4.5 Abbildungen in homogenen Koordinaten *240*
4.5.1 Das Prinzip der homogenen Koordinaten *240*

4.5.2 Homogene Koordinaten in der Ebene *240*
4.5.3 Homogene Koordinaten im Raum *246*
4.6 Vektorgeometrie aktivieren *250*

**5 Funktionensysteme, Fourier-Transformation und Faltung** *259*
5.1 Unendliche Reihen von Funktionen *259*
5.1.1 Potenzreihen *259*
5.1.2 MacLaurin- und Taylor-Entwicklungen *261*
5.1.3 Integration mit Potenzreihen *263*
5.2 Orthogonalpolynome *264*
5.2.1 Orthogonalität von Funktionen *264*
5.2.2 Die Wirkung der Orthogonalität *265*
5.2.3 Tschebyscheff-Polynome *267*
5.3 Fourier-Reihen, Fourier-Transformation *269*
5.3.1 Definition der Fourier-Reihen *269*
5.3.2 Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten *271*
5.3.3 Das Fourier-Spektrum *272*
5.4 Diskrete Fourier-Transformation und FFT *276*
5.4.1 Definition der diskreten Fourier-Transformation *277*
5.4.2 Aliasing, Nyquist-Frequenz, „sampling“ *278*
5.4.3 Das Prinzip der schnellen Fourier-Transformation *280*
5.4.4 M-Files zur Demonstration des FFT-Prinzips *283*
5.5 Die Fourier-Transformation näher kennenlernen *286*
5.6 Die einfache Faltung *289*
5.6.1 Das Prinzip der einfachen Faltung *289*
5.6.2 Die Faltung als Multiplikation von Polynomen *291*
5.6.3 Die Formel zur Faltung von Zahlenfolgen *292*
5.6.4 Beispiele von einfachen Faltungen *294*
5.6.5 Die Faltung von kontinuierlichen Funktionen *295*
5.7 Zirkuläre Faltung – Faltungssatz *295*
5.7.1 Die Definition der zirkulären Faltung *295*
5.7.2 Der Faltungssatz *296*
5.7.3 Zwei- und mehrdimensionale Faltungen *299*
5.8 Funktionssystem- Faltungs- und Fourier-Theorie aktivieren *300*

**6 Funktionen von mehreren Variablen** *311*
6.1 Grundbegriffe der Funktionen von mehreren Variablen *311*
6.1.1 Die Funktionsdefinition *311*
6.1.2 Grafische Darstellung *312*
6.1.3 Differenzieren von Funktionen mit mehreren Variablen *313*
6.1.4 Illustration der partiellen Ableitung *314*
6.2 Das Bilden von partiellen Ableitungen *318*
6.2.1 Grundprinzip des partiellen Ableitens *318*
6.2.2 Ableitungstabelle für Grundfunktionen *318*
6.2.3 Ableitungsregeln für zusammengesetzte Funktionen *319*

6.2.4 Beispiele von partiellen Ableitungen *319*
6.2.5 Partielle Ableitungen im symbolischen Modus *320*
6.3 Partielle Ableitungen und das totale Differential *321*
6.3.1 Die Formel für das totale Differential *321*
6.3.2 Anwendung zur Berechnung der Volumenausdehnung *322*
6.3.3 Empfindlichkeit der Eigenfrequenz *323*
6.3.4 Kommerzielle Einflussanalyse *323*
6.3.5 Das Optimierungsprinzip in mehreren Variablen *324*
6.4 Höhenlinien- und Flächenplots *325*
6.4.1 Höhenlinien *326*
6.4.2 Dreidimensionale Flächendarstellungen *328*
6.4.3 Die Funktion Meshgrid *330*
6.4.4 Darstellung der Gradientvektoren *330*
6.4.5 Kombinierte Flächen- und Konturdarstellungen *331*
6.5 Ausgleichsrechnung *333*
6.5.1 Geradenfit als Beispiel *333*
6.5.2 Allgemeine lineare Ausgleichsprobleme *335*
6.6 Algorithmen zur Ausgleichsrechnung *337*
6.6.1 Normalengleichungen und Fehlergleichungen *338*
6.6.2 Singular Value Decomposition *342*
6.7 Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren *344*
6.7.1 Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen *344*
6.7.2 Beispiele für Lagrange-Multiplikatoren *346*
6.8 Nichtlineare Gleichungssysteme *347*
6.9 Kenntnisse von Funktionen mehrerer Variablen aktivieren *350*

**7 Differentialgleichungen** *359*
7.1 Die Bedeutung von Differentialgleichungen in Physik und Technik *359*
7.1.1 Was ist eine Differentialgleichung? *360*
7.1.2 Grundtypen von Differentialgleichungen *361*
7.2 Beispiele zu den Differentialgleichungs-Typen *363*
7.2.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen *363*
7.2.2 Partielle Differentialgleichungen *365*
7.3 Analytische Lösungen von Differentialgleichungen *367*
7.3.1 Lösungs-Prinzipien *367*
7.3.2 Beispiele analytischer Lösungen *369*
7.3.3 Oszillatorgleichungen *377*
7.4 Lösungen mit Laplace-Transformationen *381*
7.4.1 Das Lösungsprinzip *381*
7.5 Numerische Lösungverfahren für Anfangswertprobleme *386*
7.5.1 Das Grundprinzip der Lösung von Anfangswertproblemen *386*
7.5.2 Das Euler-Verfahren *387*
7.5.3 Runge-Kutta Verfahren *388*
7.5.4 Explizite und implizite Verfahren *393*
7.6 Anfangswertprobleme mit MATLAB lösen *395*

7.6.1 Radioaktive Zerfälle *395*
7.6.2 Der schiefe Wurf, ein Körper im Gravitationsfeld *397*
7.6.3 Der gedämpfte harmonische Oszillator *400*
7.6.4 Demonstration des Steifheit-Effektes *402*
7.6.5 Geladene Teilchen im Magnetfeld *405*
7.6.6 $E \times B$-Drift: Elektrische und magnetische Felder *406*
7.7 Schnuppern am Chaos *407*
7.7.1 Der Lorenz'sche Strange Attractor *407*
7.8 Kenntnisse über Differentialgleichungen aktivieren *410*

**8 Grundlagen der Statistik** *421*
8.1 Motivation: Überblick über große Datenmengen *421*
8.1.1 Die Schuhgrößen als Beispiel *421*
8.1.2 Schlüsselzahlen zum Charakterisieren von Verteilungen *422*
8.1.3 Die Formeln zur Median-Familie *423*
8.1.4 Die Formeln zu Mittelwert und Standard-Abweichung *425*
8.1.5 Der grafische Test einer Verteilung *428*
8.2 Regressions-Analyse *429*
8.2.1 Korrelations-Untersuchungen für zwei Dimensionen *429*
8.3 Wahrscheinlichkeitsrechnung *433*
8.3.1 Die Grundelemente von Glücksspielen *433*
8.3.2 Anordnungs- und Auswahlformeln *438*
8.3.3 Wahrscheinlichkeit, mathematisch definiert *443*
8.3.4 Beispielprobleme *445*
8.4 Statistische Verteilungen *449*
8.4.1 Dichte und Wahrscheinlichkeitsverteilung *449*
8.4.2 Diskrete Verteilungen *450*
8.4.3 Stetige Verteilungen *453*
8.5 Stichproben und Tests *457*
8.5.1 Der Ablauf einer Stichprobe *457*
8.5.2 Statistische Tests *459*
8.6 Kenntnisse zu den Grundlagen der Statistik aktivieren *462*

**Anhang A MATLAB professionell einsetzen** *467*
A.1 Erweiterungen in grafischer Richtung *467*
A.1.1 Audio-Video-Sequenzen und Webinare *467*
A.1.2 Erstellen von grafischen Benutzeroberflächen mit GUIDE *468*
A.1.3 Simulink *468*
A.2 Die Ausdehnung der Einsatzmöglichkeiten *469*
A.2.1 Erweiterungen im Basispaket *469*
A.2.2 Zusatzpakete *469*
A.2.3 Die weltweite Benutzergemeinschaft *470*
A.2.4 Rüclmeldungen und weitere Beispiele *470*

**Literaturhinweise** *471*

**Zum guten Ende** *473*

**Stichwortverzeichnis** *475*

# Vorwort

## Einführung – Mathematik im Einsatz?

Verweilen Sie einmal ganz kurz bei der Betrachtung Ihrer mathematischen Kenntnisse: Wieviel Mathematik haben Sie schon „gehabt“? Und wieviel davon können Sie umsetzen in die Erarbeitung eines konkreten Berechnungsresultates?

Bei einer großen Zahl von Studierenden der Naturwissenschaft oder der Ingenieurfächer, aber auch bei vielen Praktikern in diesen Berufen ist die Mathematik als abstrakte intellektuelle Beschäftigung wesentlich stärker ausgeprägt als deren tatsächliche Anwendung im Verlauf von Berechnungen. Mit diesem Buch wird ein Weg aufgezeigt, um die zwei Aspekte der Mathematik in ein harmonischeres Gleichgewicht zu bringen.

Dadurch ergibt sich auf natürliche Weise eine spezielle Auswahl bei den zu behandelnden Fragestellungen sowie eine an die Anforderungen der Ingenieure und Naturwissenschaftler angepasste Gewichtung der präsentierten mathematischen Themen. Bei dieser Auswahl der Themen und ihrer Gewichtung steht das Erarbeiten von konkreten, in Zahlen ausdrückbaren Resultaten im Vordergrund. Die hier beim Lösen von konkreten Problemen eingesetzten Teilgebiete der Mathematik gehören daher zum Themenkreis der Angewandten Mathematik sowie der Numerischen Mathematik.

## Das Ziel dieses Kurses

Mit dem Kurs „MATLAB und Mathematik kompetent einsetzen“, angesiedelt in ein bis zwei der mittleren Semester des Ingenieur- oder Naturwissenschaftsstudiums, soll eine Brücke geschlagen werden zwischen den in den unteren Semestern erarbeiteten mathematischen Grundlagen und dem Einsatz der Mathematik in den verschiedenen Ingenieur-Disziplinen sowie in der wissenschaftlichen Modellbildung und Analyse. Dank des tief angesetzten Niveaus der erforderlichen Vorkenntnisse und des vielfältigen Übungsmaterials ist dieses Buch auch hervorragend geeignet zum Selbststudium, für Studenten ebenso wie für erfahrene Praktiker.

Mathematik ist ein wichtiges Werkzeug der Ingenieure und Naturwissenschaftler, dessen Beherrschung einen wesentlichen Teil des Berufserfolges ausmachen kann. Das Ziel dieses Kurses ist deshalb das Herauslösen der Mathematik aus den verstaubten Aktenordnern, das Abbauen von Berührungsängsten und das Einpflanzen in den Katalog Ihrer persönlichen Fähigkeiten. Der Weg zu diesem Ziel ist ein unverkrampfter, spielerischer Umgang mit vielfältigen Berechnungsproblemen, wobei uns das Programm MATLAB sehr gute Dienste leisten wird. MATLAB kann uns den Aufwand der eigentlichen Berechnung abnehmen, dadurch können wir uns auf den Lösungsablauf konzentrieren. Die häufige Verwendung grafischer Darstellungen vermittelt ein verstärktes Verständnis für die Zusammenhänge zwischen mathematischen Strukturen. Gleichzeitig erhalten wir vertiefte Einblicke in die Funktionsweise von Berechnungsabläufen durch die vielfältigen Möglichkeiten, eigene kleine Programme zu erstellen.

Die Kombination der zwei Themen „Mathematik“ und „MATLAB“ bewirkt keine Aufspaltung in zwei Ziele verschiedener Richtung, sondern führt zu einer gegenseitigen Verstärkung der beiden Teile. Die enge Verflechtung der beiden Aspekte fördert das übergeordnete Ziel: Ihre persönliche Kompetenz zum Lösen von Berechnungsproblemen aufzubauen.

### Ein Wort an die Leserinnen dieses Buches

Bei Bezeichnungen von menschlichen Personen trifft man immer häufiger auf die ausführliche Erwähnung beider Geschlechtsformen, wie in „Leserinnen und Leser“ oder auf Kunstwörter wie „LeserInnen“. Zugunsten der flüssigen Lesbarkeit wurde in diesem Buch auf solche Formen verzichtet und durchgehend die althergebrachte einfache Bezeichnung in der männlichen Form verwendet. Mit dieser Form waren in der Bedeutung der deutschen Sprache schon immer alle Menschen beiderlei Geschlechts gemeint. Es wäre schade, wenn sich Personen weiblichen Geschlechts durch diesen Entscheid ausgeschlossen fühlten, denn das Buch möchte ihnen mit dem Einbringen einer ganzheitlichen, bildhaften Komponente in die Mathematik besonders entgegenkommen.

### Die empfohlene Arbeitsweise

Erschrecken Sie nicht! In diesem Vorwort fehlt die Behauptung, dass Sie durch die Benutzung dieses Buches alles wie von selbst, ohne Ihren eigenen Einsatz lernen werden. Das Weglassen eines solchen „verkaufsfördernden“ Versprechens, das dann doch nicht eingelöst werden kann, geschieht mit voller Absicht. Es liegt mir viel daran, meine Leser als vernünftige Partner ernst zu nehmen. Ernsthaftigkeit beim Verfolgen des Ziels, Mathematik zum persönlichen, vielfältig einsetzbaren Werkzeug zu machen, bedeutet den Willen zum Engagement, zur eigenen Mitarbeit. Ernsthaftigkeit bedeutet aber in keiner Weise einen Zwang zur Verkrampfung – im Gegenteil, mit Lockerheit, Kreativität, Phantasie und Experimentierfreude kann man eine größere Arbeitsleistung erbringen ohne dies als Belastung zu empfinden. Dies ist ein Lehr-, Übungs- und Animationsbuch mit Schwergewicht auf der Animation.

Die Vielzahl der Übungen und der breit gestreute Bezug auf verschiedenartige Aspekte der realen Welt möchten zum aktiven Mitmachen animieren. Die häufige Verwendung von grafischen Darstellungen in den Übungsbeispielen und die Hinweise auf bildhafte Modelle zur Veranschaulichung der abstrakten mathematischen Strukturen dient der Einbindung der synthetischen Hirnfunktion in den Lernprozess. Durch dieses Vermeiden der einseitigen Belastung des Gehirns auf der analytischen Seite wird die Erinnerungsfähigkeit wesentlich gesteigert.

Lassen Sie sich mitreißen, Mathematik zu erleben und erfahren Sie durch den praktischen Einsatz von MATLAB die schrittweise Steigerung Ihrer eigenen Fähigkeiten!

**Hinweise zur zweiten Auflage des Buches**

Drei Aspekte fanden bei der intensiven Überarbeitung des Buches für die zweite Auflage besondere Beachtung.

Der wichtigste davon war der Wunsch, die starke Weiterentwicklung von MATLAB einzubinden. Verschiedene neue Datentypen, Einstieg in die Objektorientierte Programmierung, der verstärkte Einbezug von symbolischer Algebra und eine Vielzahl von Hilfsprozeduren für den Umgang mit externen Daten beschreiben einen Teil der weit gehenden Neuerungen.

Zum Zweiten war mir durch die Lektüre der Bücher von Verena Steiner bewusst geworden, dass ein Text einen gewissen Rhythmus braucht. Die Anforderungen an die Konzentration des Lesers dürfen nicht konstant auf dem höchsten Niveau verbleiben, es braucht immer wieder Erholungsphasen. Abwechslung zwischen dem Eintauchen in Details und dem Überblicken des Erlebten erleichtert das Lernen. Deshalb wurden überall Merkpunkte eingefügt und das Stichwortverzeichnis wurde intensiv überarbeitet.

Als Drittes möchte ich das schon in der ersten Auflage wichtige Ziel nochmals unterstreichen, den Leser zu aktivieren. Es besteht ein entscheidender Unterschied zwischen dem passiven Durchlesen eines mathematischen Themas und dem kreativen Akt, selbst eine Lösung zu einem Problem zu finden.

Einige technische Änderungen müssen noch kurz erwähnt werden: Die Daten-CD der ersten Auflage wurde durch einen Zugriff auf das Internet ersetzt. Beispiele von M-Files, sowie die Lösungen zu den Übungen wurden ebenfalls ins Internet verschoben. Dadurch konnten die Beispiel-Lösungen mit ausführlicheren Erklärungen versehen werden.

Der Leser findet die Daten bei www.wiley-vch.de/textbooks/ (suchen Sie bitte nach „A" wie Adam) unter dem Punkt „Dozentenmaterial". Zugriff darauf erhalten Sie mit der E-Mail-Adresse adam@wiley-vch.de und dem Passwort:

**hGcR3**.

Ein neues Kapitel mit einer Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik fand seinen Platz anstelle der Musterlösungen. Das ehemals separate Kapitel zur symbolischen Algebra wurde auf die einzelnen Themen verteilt.

*Stefan Adam*

# 1
# Grundkenntnisse von MATLAB®

## 1.1
## Bekanntschaft schließen mit MATLAB

### 1.1.1
### Die Arbeitsoberfläche von MATLAB

Der Start der Applikation MATLAB[1] erfolgt abhängig vom Betriebssystem auf unterschiedliche Weise:

- in den Microsoft Windows Systemen und Mac's durch einen Doppelklick auf das Icon von MATLAB oder durch Anwählen des Untermenüs in der Abfolge `Programme -> ... -> MATLAB`
- auf Unix/Linux-Systemen durch Eintippen des Kommandos `matlab &` (Starten von MATLAB mit dem Programmnamen und installieren als unabhängigen Prozess durch das Zeichen „&".) Bei neueren Desktop Manager Programmen kann MATLAB ebenfalls durch Anwählen eines Icons gestartet werden.
  Achten Sie darauf, dass im Kommandomodus das Startkommando `matlab &` in Kleinbuchstaben eingegeben wird, obwohl Sie den Markennamen MATLAB immer in Großbuchstaben gesetzt sehen.

Darauf erscheint kurz das quadratische MATLAB-Markenzeichen, Banner genannt. Dieses Bild ist die Visualisierung der Schwingung einer L-förmigen Membran. Kurz danach zeigt sich das in drei vertikale Streifen unterteilte Hauptfenster von MATLAB.

Die meisten Aktionen spielen sich im mittleren Streifen im **Kommandofenster** ab (Fenstertitel: Command Window): Eingabe von Berechnungs-Befehlen, Abfrage von Daten und Hilfstexten, sowie Aufruf von Funktionen und Programmen. Ebenfalls im Kommandofenster erfolgt die Ausgabe von Resultaten, kurzen Texten und Fehlermeldungen.

Die Hilfsfenster in den beiden Seitenstreifen vermitteln nützliche Information zum aktuellen Dateipfad und zu bisher ausgeführten Befehlen, sowie zu den dabei erzeugten Daten.

1) MATLAB® ist ein eingetragenes Warenzeichen von The MathWorks Inc., Natick, MA, USA.

*MATLAB und Mathematik kompetent einsetzen*, 2. Auflage. Stefan Adam.

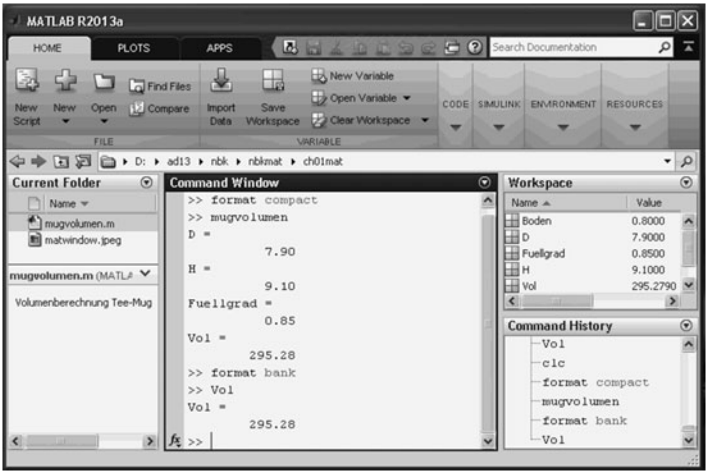


**Abb. 1.1** Das Hauptfenster von MATLAB.

Im Kommandofenster, anschließend an die zwei nach rechts zeigenden Winkel >> wartet MATLAB auf die Eingabe des nächsten Befehls. Eventuell muss der Text-Cursor noch mit der Maus dorthin gesetzt werden. Bei einer längeren Berechnung kann sich die Eingabe-Bereitschaft verzögern.

Grafische Darstellungen werden in unabhängigen Fenstern mit der Bezeichnung `figure` (und einer nachfolgenden Zahl) gezeigt.

MATLAB-Befehle bestehen aus direkten Anweisungen zum Ausführen einer Berechnung, Zuweisungen von Daten, Aufrufen von Funktionen oder vielseitigen Kombinationen davon.

### 1.1.2 Zum Einstieg: Berechnungen mit einfachen Zahlen

Das Programm MATLAB ist ein äußerst vielseitiges Werkzeug für alle Arten von Berechnungen und Simulationen. Somit muss logischerweise das Rechnen mit einfachen Zahlen darin enthalten sein: Nachdem Sie MATLAB gestartet haben, können Sie also als Einstieg ein paar einfache Berechnungen eintippen wie z. B.:

```
>> 2 + 5 <ret>
```

(Das Drücken der <return>-Taste am Zeilenende wird im Weiteren stillschweigend vorausgesetzt)

Die Resultatausgabe versieht den Resultatwert mit dem Namen `ans`:

```
   ans =
          7
>> 2 * 5 + 7
```

Jede neue Berechnung überschreibt `ans` mit dem neuen Wert.

```
  ans =
        17
```

```
>> 7^2                     (die MATLAB-Schreibweise für 7², also 7 hoch 2 = 7 · 7)
   ans =
         49                und als Gegensatz
>> 2^7
   ans =
         128               und auch noch
>> 2^-7
   ans =
         0.0078            (hier genügen 4 Dezimalstellen nicht)
>> format long             (verlangt Ausgabe mit 15 Dezimalen)
   ans =
         0.007812500000000
>> format short            (Format zurücksetzen)
```

Wie bei einem Taschenrechner können große oder sehr kleine Zahlen mit einem Exponenten-Zusatz („E" oder „e", gefolgt von positiver oder negativer ganzer Zahl) eingegeben werden: (Beispiel Flugzeit des Lichtes von der Sonne zur Erde: 150 Millionen km dividiert durch 300 000 km/s)

```
>> 150E6 / 300e3
   ans =
         500.0000          Resultat in Sekunden
>> tlichtmin = ans/60      geläufiger in Minuten
   tlichtmin =
         8.3333
```

Für die Berechnung der mittleren Dichte der Erde werden mit Vorteil zuerst die Variablen Radius und Masse definiert

```
>> Erad = 6371*1000 ;      inkl. Umwandlung km in m
>> Emass = 5.9736e24;      in kg
>> Edicht = Emass/(4*pi/3*Erad^3)
   Edicht =
         5.5147e+03        in kg/m³, in bekannten Einheiten 5,5 kg/L
```

Nun noch eine näher liegende Berechnung:

```
>> Vol = (7.9-2*0.3) ^ 2 * pi /4 * (9.1-0.8) ...
         * 0.85
   Vol =
         295.2790
```

In der obigen Volumenberechnung ist es fast unumgänglich, dass man auch den darin vorkommenden Zahlen, und nicht nur dem Resultat, einen Namen zuweist. Das hilft, die durchgeführte Berechnung zu verstehen und zu dokumentieren. Dadurch wird aber die Eingabe mehrzeilig. Am besten schreibt man die Befehle in ein **Skript**.

Skripts sind Dateien mit dem Namen-Zusatz „`.m`" (sogenannte M-Files), in denen eine Serie von MATLAB-Befehlen als reiner Text aufgelistet ist. Am besten erstellt man M-Files mit dem MATLAB-eigenen Editor. Dessen Fenster erscheint im Mittelstreifen oberhalb des Command Window, wird aber mit Vorteil abgekoppelt in ein separates Fenster.

Das M-File `mugvolumen.m` hat in unserem Beispiel die folgende Form:

```
%  Volumenberechnung Tee-Mug
D = 7.9 ;
H = 9.1 ;
Wand = 0.3; Boden = 0.8;
Fuellgrad = 0.85;
Vol = (D-2*Wand)^2 *pi/4 * (H-Boden) * Fuellgrad
```

Sobald dieses File unter dem Namen `mugvolumen.m` abgespeichert ist, bewirkt der Befehl >> `mugvolumen` (Filename, aber ohne Zusatz!) die Ausführung der darin aufgezeichneten Befehle. Das Resultat ist dasselbe wie beim einzeiligen Befehl

```
Vol =
       295.2790
```

Der Mug fasst 295 $cm^3$, also knapp drei Deziliter.

### 1.1.3 Befehlsstruktur: ein erster Überblick

Aus diesen einfachen Beispielen ersieht man bereits einige Grundprinzipien von MATLAB, welche in der Anwendung immer wieder auftreten:

> Die Zahl $\pi = 3{,}141\,592\ldots$ für die Kreisberechnung ist vordefiniert und unter dem Namen `pi` abrufbar.

Bei **Skript-M-Files** wird eine Reihe von Befehlen in ein Textfile mit dem Filenamen-Zusatz `.m` geschrieben. Der ganze Block gelangt dann durch Eintippen des Filenamens (ohne den Zusatz `.m`) zur Ausführung.

Das Arbeiten mit ganzen Blöcken (Skripts) von Befehlen heißt in der Informatik Makro-Programmierung. (Ausblick: Im Innern eines Blocks können in beliebiger Tiefe auch andere Blöcke aufgerufen werden; Rekursion ist aber nur für Funktionen erlaubt.)

Die Steuerung der **Bildschirm-Ausgabe** erfolgt mit `format ..`
(Beispiel: Feinstruktur-Konstante und Inverse)

| Befehl | Stellen | $\alpha$ | $1/\alpha$ |
|---|---|---|---|
| `format short` | 4 | 0.0073 | 137.0360 |
| `format long` | 15 | 0.007297352569800 | 1.370359990743064e+02 |
| `format long e` | 15 | 7.297352569800e-03 | 1.370359990743064e+02 |
| `format bank` | 2 | 0.01 | 137.04 |

Für Zeilenabstände eng/locker mit: `format compact/format loose`.

**Merkpunkte: Konventionen der Kommandosprache**

- **Zeilen:** MATLAB-Befehle stehen meinst einzeln, jeder in einer Zeile. Lange Befehle können durch drei Punkte `...` am Ende der Zeile eine Fortsetzung verlangen (auch mehrfach).
- **Ausgabesteuerung durch Befehls-Abschluss:** Nach der Ausführung eines Befehls wird das dazugehörige Zwischenresultat im Kommandofenster angezeigt.
  Durch einen Strichpunkt am Zeilenende wird diese Ausgabe unterdrückt.
- **Mehrere Befehle in einer Zeile:** Mehrere Befehle können durch Komma oder Strichpunkt getrennt in dieselbe Zeile geschrieben werden. Komma als Trennung bewirkt Zwischenresultat-Ausgabe, Strichpunkt wie bei einzelnen Befehlen dessen Unterdrückung.

**Merkpunkte: Verwendung von Namen/Variablennamen**

- Die zu verarbeitenden Zahlen, sowie Zwischen- und Schlussresultate in MATLAB sollten **Namen** (= Variablennamen, Bezeichner) erhalten. Diese können später dazu dienen die mathematischen Größen wieder zu verwenden und helfen erst noch die Übersicht zu bewahren.
- Für jede Berechnung kann der Programmbenutzer den Resultatnamen durch die Formulierung `'name' =` vorgeben, wie z. B. in `c2 = a^2 + b^2` (gefolgt von `c = sqrt(c2)` für die Berechnung der Hypotenuse nach Pythagoras).
- **Namen** sind in MATLAB empfindlich auf **Groß- und Kleinschreibung** (englisch: „case sensitive"). Somit ist also `A` etwas anderes als `a`.
  Namen müssen mit einem Buchstaben beginnen, dahinter dürfen auch Zahlen enthalten sein. Ungewohnt ist, dass keine Bindestriche in den Namen erlaubt sind (auch nicht bei Filenamen), weil MATLAB diese als Minuszeichen interpretiert.
- Als Reaktion auf das Eintippen eines bereits definierten Variablennamens gibt MATLAB den unter diesem Namen gespeicherten Wert (bzw. die Werte bei Vektoren und Matrizen) auf dem Bildschirm (im Kommandofenster) aus.
- Falls der Benutzer bei einer Berechnung keinen Resultatnamen angibt, setzt MATLAB immer automatisch denselben Allerweltsnamen `ans` ein (Kurzform von „answer"). Dies erlaubt unmittelbar nach der Berechnung noch die Zuweisung an einen richtigen Namen z. B. durch `c2 = ans`.
- **Vorsicht!** Bei jeder Berechnung (Wertzuweisung) wird der Resultatname ohne Warnung mit dem neuen Wert überschrieben! Sie haben also keine

andere Chance, das vorhergehende `ans` zurückzugewinnen, außer indem Sie die dazugehörige Berechnung von Grund auf neu ausführen!
Ähnlich ergeht es Ihnen, wenn Sie zweimal hintereinander
`a = 'Berechnung'` schreiben, dann ist das vorherige `a` überschrieben.
**Fazit:** Wählen Sie nicht zu kurze und vielfältige Variablennamen!

### 1.1.4
### Berechnung oder Formel-Manipulation?

MATLAB kann beides! Für Formel-Manipulation braucht man allerdings den Zusatz „symbolic toolbox" (in Studentenlizenz enthalten).

In der **Berechnungs-Umgebung**, im normalen Arbeits-Modus von MATLAB werden Zahlen verarbeitet, um damit ein **in Zahlen ausdrückbares Resultat** zu erhalten. Den verwendeten Variablen müssen also vor ihrer Verwendung Zahlenwerte zugeordnet werden. Sonst kommt die Fehlermeldung `Undefined function or variable`.

Die verwendeten Namen werden bei ihrer ersten Zuweisung automatisch deklariert. (Im Gegensatz zu vielen anderen Programmiersprachen.)

Im **Symbolic-Modus** (Formel-Modus) müssen alle in einer Formel verwendeten symbolischen Variablen als solche deklariert werden. Das erfolgt z. B. mit dem Befehl `syms s t u` (Variablen durch Leerschläge getrennt).

Das **Ziel des symbolischen Rechnens ist eine Formel.** Darum wird diese Art der Verarbeitung auch Formel-Modus genannt. Eingegebene Formeln werden umgestellt oder vereinfacht, zu gegebenen Ausdrücken werden Ableitungen oder unbestimmte Integrale ermittelt; von Gleichungssystemen oder Differentialgleichungen werden analytische Lösungen bestimmt.

#### Übungen zur expliziten Schreibweise von Produkten

Die Tatsache, dass in MATLAB das Multiplikationszeichen immer explizit geschrieben werden muss, braucht für den Anfang ein wenig Übung. Daraus ergibt sich eine glänzende Gelegenheit, die binomischen Formeln aufzufrischen.

Weil dies für beide Arbeits-Modi gilt, ergibt sich ein direkter Quervergleich zwischen Berechnung und Formel-Manipulation.

#### Binomische Formeln im Symbolic-Modus

Der Symbolic-Modus zeigt diese Formeln mit Hilfe der Funktion `expand()`:

```
% Deklaration von s und t als symbolische Variablen
syms s t
expand( (s-t)^2)
ans = s^2 - 2*s*t + t^2
expand( (s-t)^3)
ans = s^3 - 3*s^2*t + 3*s*t^2 - t^3
expand( (s-t)^4)
ans = s^4 - 4*s^3*t + 6*s^2*t^2 - 4*s*t^3 + t^4
```

und wieder zurück

```
factor(ans)
ans = (s-t)^4
```

und nur so zum Spaß:

```
expand((s-t)^50)
```

Versuchen Sie nun selbst, die ausmultiplizierte Form von `(s-t)^2` und `(s-t)^3` einzugeben. Achten Sie auf die Eingabe aller Multiplikationszeichen.

Testen Sie Ihre Eingabe mit `factor(ans)`.

#### Binomische Formeln im Berechnungs-Modus

Im Berechnungs-Modus müssen zuerst den Variablen `a` und `b` Zahlenwerte zugewiesen werden.

Der Test, ob Sie die Formel richtig eingegeben haben ergibt sich aus dem Zahlenwert (es muss gelten $p3 = q3$, $p4 = q4$ etc.)

Fehlende Multiplikations-Operatoren ergeben die Fehlermeldung `Unexpected MATLAB expression` oder `Undefined function or variable 'ab'`. Ergänzen Sie die fehlenden Terme bei den Fragezeichen!

```
a = 10 , b = 2
p3 = (a-b)^3
q3 = a^3 - 3*a^2*b + 3*a*b^2 - b^3 }
p4 = (a-b)^4
q4 = a^4 - 4*a^3*b + 6*a^2*b^2  ..?
p5 = (a-b)^5
q5 = a^5 - 5*a^4*b + 10*a^3*b^2  ..?
```

#### Merkpunkt: Der Multiplikations-Operator

- Die **Multiplikation** von zwei nebeneinander stehenden Größen muss durch das **„$*$"-Zeichen** explizit verlangt werden. Bei Zahlen ist dies auch in der Mathematik erforderlich: 22 bedeutet etwas anderes als $2 * 2$ (bzw. $2 \cdot 2$ ). Bei der Verwendung von Buchstaben als symbolische Zahlen darf man jedoch in der Mathematik die Kurzform $2ab$ schreiben statt $2 * a * b$.
  In MATLAB wird hingegen immer die ausführliche Schreibweise verlangt, also ist nur `2*a*b` eine richtige Eingabe. Diese Konvention gilt übrigens bei fast allen Programmiersprachen.

#### Klammern in algebraischen Ausdrücken

Die Prioritätsregeln für arithmetische Operatoren werden populär mit dem Satz „Punkt-Rechnung kommt vor Strich-Rechnung" memorisiert (mit Multiplikations-Punkt und Divisions-Doppelpunkt).

Nochmals genau definiert gilt:

- Addition „+" und Subtraktion „−" haben tiefste Priorität;
- Multiplikation „∗" und Division „/" die nächst höhere und
- Potenzieren „ˆ" die höchste.

konkret: bei $4 + 5 * 3^2$ muss zuerst $3^2 = 9$ berechnet werden, dann $5 * 9 = 45$ und am Schluss $4 + 45 = 49$.

Um eine Abweichung davon zu erzwingen braucht man Klammern.

In MATLAB sind für die Strukturierung von arithmetischen Ausdrücken **ausschließlich runde Klammern** erlaubt.

**Das Horner-Schema im Formel-Modus** Das Horner-Schema zur Auswertung von Polynomen liefert einen weiteren, eindrücklichen Quervergleich zwischen Formel-Manipulation und Berechnung. Zuerst die Darstellung im Formel-Modus:

Das Polynom 4. Grades $P4 = q_4 * x^4 + q_3 * x^3 + q_2 * x^2 + q_1 * x + q_0$ mit den Koeffizienten $q_4, q_3, q_2, q_1, q_0$ kann im Formel-Modus als normales Polynom definiert werden, wie oben dargestellt. In der Schreibweise des Horner-Schemas werden alle Faktoren „$x$" einzeln ausgeklammert. Der Formel-Modus enthält eine Funktion zur Erzeugung des Horner-Schemas aus der normalen Polynomdarstellung. Diese wird anschließend aufgerufen.

```
>>syms  q4 q3 q2 q1 q0 x
>>P4 = q4*x^4 +  q3*x^3 + q2*x^2 + q1*x +  q0
>>P4H = (((q4*x + q3)*x + q2)*x + q1)*x + q0
>>P4Hf = horner(P4)
P4Hf =
q0 + x*(q1 + x*(q2 + x*(q3 + q4*x)))
```

**Das Horner-Schema im Berechnungs-Modus** Um ein Polynom numerisch, im Berechnungs-Modus zu bearbeiten, müssen wir den Koeffizienten konkrete Zahlen zuweisen. Wir nehmen das Beispiel: $P4N = x^4 + x^3 - 6 * x^2 - 4 * x + 8$ und dessen Auswertung am Wert $x = 1{,}5$. (Nicht vergessen, den symbolic-Status von $x$ zu beenden!)

Die Koeffizienten fassen wir in einer Zahlenfolge mit dem Namen `cf` zusammen. Dies geschieht durch Einschließen in eckige Klammern.

```
>>clear x
>>cf = [1  1  -6 -4  8];
>>x = 1.5;
>>pval=(((cf(1)*x +cf(2))*x +cf(3))*x +cf(4))*x +cf(5)
pval =
      -3.0625
```

**Berechnung mit einem Funktions-M-File** Von da ist es nun ein kleiner Schritt zum Erstellen einer ersten selbst programmierten Funktion. Dazu schreibt man die folgenden Zeilen in ein Textfile mit dem Namen `hornereval.m` (schon die zweite Art von M-File).

```
function pv = hornereval(cv, xv)
% function pv = hornereval(cv, xv)  Polynom-Evaluation
%   cv = Koeffizienten-Folge, absteigend,
%   xv = auszuwertende x-Positionen (Vektoren erlaubt)
nkoef = length(cv);
pv = cv(1);     % Start der Polynomwert(e)
for cnum = 2:nkoef  % in jedem Schritt: (..)*xv + cv(cnum)
   pv = pv.*xv + cv(cnum); % '.*' erlaubt xv-Vektoren
end
```

Sobald dieses File abgespeichert ist, funktioniert der Befehl

```
>>pval = hornereval(cf,1.5)
pval =
      -3.0625
```

Aber beliebige andere Koeffizienten-Folgen und ganze Zahlenfolgen (Vektoren) von $x$-Werten sind ebenso möglich. Das Prinzip einer Funktion mit Parameterübergabe und Resultatrückgabe erlaubt die vielfache Anwendung eines einmal programmierten Berechnungsablaufes mit immer neuen Datensätzen.

**Merkpunkte zum Funktions-Beispiel**

- Die Funktionsdeklaration in der ersten Zeile enthält das Codewort `function` gefolgt von den Rückgabeparametern, dem Gleichheitszeichen, dem Funktionsnamen und den Eingabeparametern in runden Klammern.
  Der Filename (ohne `.m`) muss mit dem Funktionsnamen übereinstimmen.
  Mehrere Rückgabeparameter werden in eckige Klammern eingeschlossen. Den Rückgabeparametern müssen im Innern der Funktion Werte zugewiesen werden.
- Der Punkt vor dem Multiplikations-Stern verhindert, dass MATLAB die Multiplikation als Matrizenprodukt einstuft. Punkt-Stern verlangt dagegen elementweise Multiplikation.
- Die Kommentare (nach dem %-Zeichen) bei der Funktionsdeklaration werden beim Befehl `help hornereval` angezeigt, sind also eine Mini-Dokumentation.
- Der Befehl im Innern der for-Schleife wird für die Werte der Schleifenvariablen `cnum` = 2,3,4, etc. bis `nkoef` je einmal ausgeführt.

Die neue Funktion ist bereit zur Anwendung, verbunden mit einer Grafik:

```
xpt = -3:3; xfin = -3.5:0.1:3.5;    % x grob / fein
ppt = hornereval(cf,xpt)     % Funktionswerte zu xpt
pfin = hornereval(cf,xfin); % Funktionswerte zu xfin
%  grafische Darstellung
plot(xpt,ppt,'+') ; hold on ;
plot(xfin,pfin) ; grid on; hold off;
```

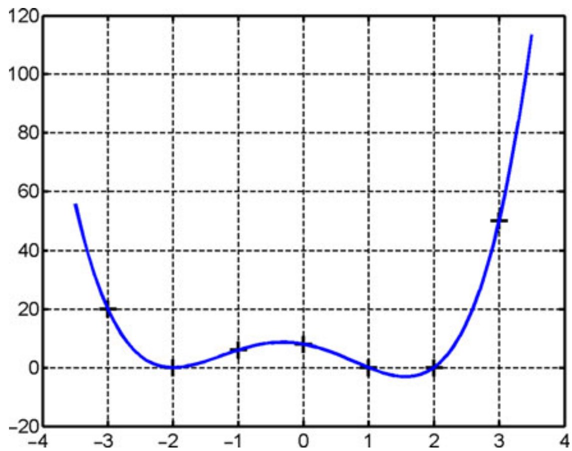



**Abb. 1.2** Grafik des Beispiel-Polynoms.

**M-Files**

Die reiche Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten von MATLAB beruht darauf, dass komplexe Berechnungsaufgaben auf einfachste Weise in Teilaufgaben zerlegt werden können. Die in MATLAB vorhandenen Zerlegungsmechanismen reichen von einfachen Skript-M-Files über Funktions-M-Files bis zu Klassendefinitionen der Objektorientierten Programmierung.

**Achtung!** Die Bezeichnung M-File verwendet traditionell ein großes „M“, obwohl der Namen-Zusatz „`.m`“ klein geschrieben wird.

Bei einem **Skript-M-File** werden einfach alle MATLAB-Befehle zum Erledigen einer Teilaufgabe in ein File mit dem Namenzusatz „`.m`“ geschrieben. Die Eingabe des entsprechenden Namens in MATLAB lässt dann diese Befehlsfolge ablaufen. Man nennt die Funktionalität in der Informatik auch Makroaufruf.

Die Verwendung von **Funktions-M-Files** ist eng damit verwandt. Beim Aufruf werden der Funktion allerdings Parameter übergeben, die in runden Klammern an den Funktionsnamen angehängt werden. In den meisten Fällen haben Funktionen auch einen oder sogar mehrere Rückgabeparameter; dies ist aber nicht unbedingt erforderlich.

Ein großer Teil der vielfältigen, in MATLAB zur Verfügung stehenden Befehle beruht auf solchen Funktions-M-Files. Für komplexere Anwendungen werden