

Iván Egry

Die Physik der Musik und ihrer Instrumente

Von Schallschnellen, Wolfstönen und Liebesfüßen



Die Physik der Musik und ihrer Instrumente

Die Physik der Musik und ihrer Instrumente

Von Schallschnellen, Wolfstönen und Liebesfüßen

Iván Egry

WILEY-VCH

Autor

Prof. Dr. Iván Egry

Am Alten Bahndamm 16a
52072 Aachen
Deutschland

Titelbild

Unter Verwendung einer Abbildung
von GettyImage, ID 140364867/daitoZen
(Guitar Strings).

■ Alle Bücher von WILEY-VCH werden sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag in keinem Fall, einschließlich des vorliegenden Werkes, für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler irgendeine Haftung.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2023 WILEY-VCH GmbH, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Photokopie, Mikroverfilmung oder irgendein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden. Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen oder sonstigen Kennzeichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass diese von jedermann frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie nicht eigens als solche markiert sind.

Print ISBN 978-3-527-41411-6

ePDF ISBN 978-3-527-83695-6

ePub ISBN 978-3-527-83696-3

Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

„Ein Leben ohne Musik ist möglich, aber sinnlos“

(frei nach Loriot)

Vorwort

Dieses Buch hat eine lange Vorgeschichte. Immer schon habe ich mich für die Rolle der Physik auf Gebieten interessiert, die nicht zu ihrem klassischen Anwendungs- und Forschungsbereich gehören, wie z. B. die Physik im Sport oder eben auch in der Musik. Während meines aktiven Berufslebens fehlte mir dafür aber leider die Zeit und Muße. Mit dem Ruhestand drängten diese alten Ideen wieder nach vorne, und so entstand mein Buch über die Physik des Golfs, während meine Pläne für ein Buch über die Physik in der Musik weiter verstaubten. Den Ausschlag gaben schließlich Gespräche und Diskussionen mit Profimusikern, bei denen mir klar wurde, wieviel Nachholbedarf in dieser Hinsicht besteht (um es mal positiv auszudrücken). Dazu kam die erfreuliche Reaktion des Verlags, als ich anfangs meinen Vorschlag, ein solches Projekt in Angriff zu nehmen, vortrug. Dann kam die Coronapandemie, und ich hatte auf einmal viel Zeit und nichts zu tun. In dieser Hinsicht hatte der Lockdown auch seine guten Seiten, die natürlich all den Kummer und das Leid, den der Lockdown verursachte, nicht aufwiegen können.

Die Literaturrecherchen zu diesem Thema führten zurück bis ins 19. Jahrhundert und es zeigte sich, dass große Koryphäen der Physik auf diesem Feld tätig gewesen waren, darunter Helmholtz und Rayleigh. (Anekdote aus Oxford: Beim Dinner fragt die Dame ihren professoralen Tischherrn: „In which fields are you working?“ und er antwortet: „I am not working in the fields.“) Mit Aufkommen der Relativitäts- und Quantentheorie gab es aber auf einmal spannendere Aufgaben und die theoretische Akustik versank in einen Dornröschenschlaf. Durch die Möglichkeiten der modernen Computer und die Entwicklung der elektronischen Musik bekam das Gebiet neuen Auftrieb, weil es jetzt nicht nur möglich war, die komplizierten Differentialgleichungen numerisch zu lösen und Klangentstehung in komplexen Geometrien zu simulieren, sondern auch, weil es neben der Analyse analoger Musik auch gelang, Klänge synthetisch herzustellen.

Dieses Buch kann und soll nicht alle Details der musikalischen Akustik behandeln, aber es soll einen Ein- und Überblick darüber geben, worum es bei diesem Thema geht und was die Physik zur Lösung praktischer Probleme beitragen kann.

An dieser Stelle ist es unbedingt erforderlich, den vielen Menschen zu danken, die zum Gelingen (sagen wir: zur Fertigstellung) dieses Buches beigetragen haben. An allererster Stelle möchte ich meiner Frau Sabine danken, die mich nicht nur bei der Literaturbeschaffung tatkräftig unterstützt hat, sondern auch meine zeitweili-

ge schlechte Laune, wenn es mal wieder nicht weiter ging, ertragen musste. Mein Bruder Andreas hat die Karikaturen gezeichnet, die hoffentlich zum Lesevergnügen beitragen werden. Dafür nochmal herzlichen Dank! Gute Freunde haben die erste Fassung kritisch durchgelesen und dafür gesorgt, dass sprachliche und inhaltliche Fehler gefunden und korrigiert werden konnten. Dies gilt insbesondere für Dr. Susanne Schröder und Prof. Hans-Walter Staudte. Herrn Dr. Andreas Sendtko und Dr. Martin Preuß vom Verlag Wiley-VCH danke ich für ihre freundliche und professionelle Unterstützung. Nicht zuletzt möchte ich den Kollegen, Verlagen und Firmen danken, die mir Abdruckgenehmigungen für die zahlreichen Abbildungen erteilt haben.

Abschließend möchte ich den Lesern danken, dass sie sich für dieses Buch entschieden haben und wünsche ihnen viel Freude und Erkenntnisgewinn beim Lesen.

Aachen, im Dezember 2021

Iván Egry

Inhaltsverzeichnis

Vorwort VII

1	Einleitung	1
	Literatur	4
2	Akustik	7
2.1	Einleitung	7
2.2	Die Wellengleichung	9
2.3	Lautstärke	12
2.4	Harmonische Wellen	14
2.5	Helmholtz-Gleichung	17
2.6	Erzwungene Schwingungen	18
2.7	Frequenzanalyse	20
2.8	Zeit-Frequenz-Analyse	24
2.9	Schallausbreitung in Festkörpern	29
	Literatur	32
3	Musik	35
3.1	Die Notenschrift	35
3.2	Tonintervalle	40
3.2.1	Die reine Stimmung	43
3.2.2	Die gleichstufig temperierte Stimmung	46
3.3	Tonleitern, Tonarten und Akkorde	47
3.3.1	Dur und Moll	48
3.3.2	Die Kirchentonarten	49
3.3.3	Weitere Tonarten	50
3.3.4	Der Quintenzirkel	51
3.3.5	Akkorde	55
	Literatur	58
4	Instrumente	61
4.1	Klassifizierung	61
4.1.1	Orchester	64

4.1.2	Der Helmholtzresonator	66
	Literatur	69
4.2	Saiteninstrumente	70
4.2.1	Gezupfte Saiten	73
4.2.2	Geschlagene Saiten	82
4.2.3	Gestrichene Saiten	90
4.3	Blasinstrumente – Grundlagen	112
4.3.1	Die Webstersche Horngleichung	113
4.3.2	Stehende Wellen in Hörnern	117
4.3.3	Die Impedanz von Hörnern	123
4.3.4	Die Kopplung zwischen Mundstück und Horn	128
	Literatur	131
4.4	Blechblasinstrumente	132
4.4.1	Tonerzeugung	132
4.4.2	Überblick	134
4.4.3	Naturtöne	138
4.4.4	Trompeten	139
4.4.5	Hörner	148
4.4.6	Posaunen	152
	Literatur	155
4.5	Die Orgel	156
4.5.1	Das Instrument	156
4.5.2	Die Orgelpfeife	160
	Literatur	172
4.6	Holzblasinstrumente	174
4.6.1	Tonlöcher und Klappen	178
4.6.2	Flöten	188
4.6.3	Klarinetten	195
4.6.4	Saxophone	205
4.6.5	Oboe und Fagott	209
	Literatur	215
5	Zusammenfassung	219
	Liste der Symbole	223
	Stichwortverzeichnis	227

1

Einleitung

Musik ist ein universales und universelles Phänomen. Sie ist in allen Kulturkreisen vorhanden und sie begleitet uns von der Wiege bis zur Bahre. (Neueren Forschungen zufolge kann bereits der Fötus im Mutterleib Musik wahrnehmen.) Musik kommt in der Natur vor, z. B. als Vogelgezwitscher oder auch als Pfeifen des Windes, und sie ist eine Kunstform. Unser Sinnesorgan zur Wahrnehmung von Tönen und also auch von Musik, ist das Ohr. Musik löst bei jedem Zuhörer Emotionen aus, wenn sie auch manchmal als störend empfunden wird, „dieweil sie mit Geräusch verbunden“. Was genau Musik ist, lässt sich allerdings kaum definieren. Jeder Versuch einer Definition scheitert daran, dass er Randbereiche ausschließt, die, je nach Sichtweise, auch zur Musik gehören. In jedem Fall ist Musik eine zeitliche Abfolge von Tönen (Geräuschen?), die zueinander in Beziehung stehen.

Es ist aber auch gar nicht die Aufgabe dieses Buches, das Wesen der Musik zu ergründen. Es geht vielmehr darum, zu diskutieren, wie Musik gemacht wird, eben um die Physik der Musikinstrumente. Der Teilbereich der Physik, der sich mit diesen Fragen beschäftigt, ist die Akustik, genauer die musikalische Akustik. Leider ist dieses Fach aus den meisten Curricula an deutschen Hochschulen verschwunden; auch weltweit gibt es nur wenige Orte, wo zu diesem Thema aktiv geforscht wird. Das ist umso erstaunlicher, da die Musik und ihre Entstehung seit jeher Physiker¹⁾ fasziniert haben, und viele Physiker auch selbst musiziert haben, z. B. Albert Einstein. Das mag daran liegen, dass die Musik in ihrer Struktur der Mathematik sehr ähnlich ist. Die Frequenzen von Tönen, deren Zusammenklängen wir als harmonisch empfinden, stehen in einem einfachen numerischen Verhältnis zueinander, und auch der Rhythmus bzw. die Länge der Noten wird durch einfache Brüche definiert: 4/4-Takt, 3/4-Takt usw. Etwas plakativ könnte man formulieren, dass Musik Mathematik hörbar macht.

Die großen Koryphäen der Musiktheorie sind zuallererst Pythagoras und Hermann von Helmholtz, aber auch der indische Physiker C.V. Raman, der in anderem Zusammenhang (für die nach ihm benannte Raman-Spektroskopie) 1930 den Nobelpreis erhielt und – selbstverständlich – J.W. Strutt (der spätere Baron Ray-

1) In Ermangelung einer besseren Lösung wird in diesem Buch durchgängig das generische Maskulinum verwendet. Damit sind alle Menschen, unabhängig vom Geschlecht, in gleicher Weise und gleichberechtigt gemeint.

leigh) mit seinem Buch *The Theory of Sound*. Diese Forscher haben die Grundlagen durch ihre experimentellen und theoretischen Arbeiten gelegt, auf denen alle späteren Entwicklungen beruhen. Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts gab es noch keine Computer, und die obengenannten Untersuchungen basieren auf aufwendigen analytischen Näherungen der konstitutiven Gleichungen der Akustik. H. von Helmholtz äußerte in seinem Buch die Befürchtung, dass sich diese Probleme wohl nie zufriedenstellend würden lösen lassen. Heutzutage kann man mit Hochgeschwindigkeitskameras die Schallschwingungen sichtbar machen und mit kommerzieller Software die Schallerzeugung und Schallausbreitung in beliebig geformten Hohlräumen simulieren.

Zur Musiktheorie und insbesondere zur Physik der Musikinstrumente gibt es zahlreiche Bücher und Veröffentlichungen, die meisten in englischer Sprache, aber auch einige in Deutsch. Das moderne Standardwerk ist zweifelsohne das Buch von N.H. Fletcher und T.D. Rossing: *The Physics of Musical Instruments*. Leider ist dieses Buch sehr mathematisch und auch für den Fachmann schwer zu lesen. Auf der anderen Seite gibt es viele Versuche, dieses Gebiet dem Laien ohne mathematische Kenntnisse näherzubringen. Hier sind die Bücher von A.H. Benade hervorzuheben, von denen einige auch auf Deutsch erschienen sind, z. B. *Musik und Harmonie*. Manche dieser Bücher scheitern daran, dass sie im Bestreben, allgemein verständlich zu sein, zu stark vereinfachen. Schon Einstein hat gesagt: „Make it as simple as possible, but not simpler.“ Dann gibt es viele Bücher, die sich auf einen speziellen Aspekt oder ein spezielles Instrument konzentrieren. In dieser Hitliste führen die Klarinette und die Geige mit weitem Abstand. Selbstverständlich ist auch auf diesem Gebiet das Internet eine fast unerschöpfliche Quelle. Hier gilt es allerdings, die Spreu vom Weizen zu trennen. Herausragend ist die Website der University of New South Wales (Sydney, Australien). Sie ist didaktisch perfekt aufbereitet und erlaubt auch einen tieferen Einstieg in die Theorie der Musikinstrumente. Ein fantastisches Projekt ist das ständig weiterentwickelte E-Book *Euphonics – The Science of Musical Instruments* von Jim Woodhouse unter <https://euphonics.org>. Ebenfalls lohnenswert ist die Instrumentenkunde der Vienna Symphonic Library.

Angesichts dieser Vielfalt von Veröffentlichungen ist die Frage berechtigt, wozu dieses neue Buch gut sein soll. Zunächst einmal wendet sich dieses Buch in gleicher Weise an Physiker und Musiker. Physik ist nicht Selbstzweck, sondern soll helfen, die Grundlagen der Musik besser zu verstehen. Der Anspruch und das Konzept dieses Buches sind, möglichst einheitlich und systematisch die Physik der Musik und der Musikinstrumente darzustellen. Nur so wird das zugrunde liegende Prinzip sichtbar, und man erkennt, auf wie unterschiedliche Weise die einzelnen Instrumentengattungen die Prinzipien der Klangerzeugung in die Praxis umsetzen. Auf der anderen Seite muss man sich klar machen, dass dieses Gebiet sowohl in Breite als auch in Tiefe so gut wie unerschöpflich ist. Daher bin ich um eine Auswahl nicht herumgekommen; das war eine der großen Herausforderungen beim Schreiben dieses Buches. Diese Auswahl ist sicherlich subjektiv und trägt den externen wie auch meinen eigenen Beschränkungen Rechnung. So wird man vergeblich z. B. nach psychoakustischen, historischen und sozialen Aspekten der Musik suchen. Auch die Raumakustik, wie sie beim Entwurf von Konzertsälen eine Rolle spielt,

wird in diesem Buch nicht behandelt. Bei den Instrumenten habe ich mich auf die beiden wichtigsten Gruppen, die Saiten- und Blasinstrumente, beschränkt.

Wenn man die Wirkungsweise der einzelnen Instrumente nicht nur beschreiben, sondern auch verstehen will, geht das nicht ohne Mathematik. Hier gilt es, sich in der Tiefe zu beschränken. Das angestrebte mathematische Niveau geht über populärwissenschaftliche Veröffentlichungen hinaus, ist aber weniger anspruchsvoll als das einer Fachpublikation. Da jede Formel – auch in einem Sachbuch – die Gefahr birgt, Leser vom Weiterlesen abzuschrecken, habe ich versucht, ihre Anzahl so gering wie möglich zu halten und auf langwierige Herleitungen verzichtet. Die meisten Formeln lassen sich mit Kenntnissen der Schulmathematik verstehen. Einige wenige Formeln, insbesondere Differentialgleichungen, gehen darüber hinaus. Für den naturwissenschaftlich gebildeten Leser enthalten sie relevante Information in Kurzform, für die anderen wird die Bedeutung und der Inhalt dieser Gleichungen in Prosa erklärt und meist auch mit Hilfe von Grafiken veranschaulicht. Da wir uns im Wesentlichen mit Schallwellen beschäftigen werden, ist die Kenntnis der trigonometrischen Funktionen (Sinus- und Kosinusfunktion) hilfreich.

Das Buch beginnt mit einer kurzen Einführung in die Akustik. Dies ist ein mathematisch anspruchsvolles Kapitel. Im Sinne Machiavellis habe ich die größtmögliche Grausamkeit an den Anfang des Buches gestellt. In diesem Kapitel werden die wichtigsten Begriffe wie Schallgeschwindigkeit, Wellenlänge und Frequenz eingeführt und ihr Zusammenhang erläutert. Als wichtiges Hilfsmittel für die Frequenzanalyse wird die Fouriertransformation eingeführt.

Das nächste Kapitel behandelt die eigentliche Musiktheorie. Töne, Obertöne, Akkorde, Tonleitern und die verschiedenen Stimmungen (reine Stimmung, wohltemperierte Stimmung) werden diskutiert. Der Leser erfährt, dass „Cent“ in der Musiktheorie keine Währungseinheit und „Komma“ kein Satzzeichen ist. Es ist dieses Kapitel, in dem der enge Zusammenhang zwischen Mathematik und Musik besonders sichtbar wird.

Die folgenden Kapitel sind das Kernstück des Buches und behandeln die Physik der Musikinstrumente. Dabei beschränken wir uns auf die beiden wichtigsten Instrumentklassen, die Saiten- und die Blasinstrumente. Saiteninstrumente heißen auch Chordophone („Saitenklinger“), und die Blasinstrumente sind Aerophone („Luftklinger“). Wir verzichten auf die Diskussion der Perkussionsinstrumente (Trommel, Pauke, Becken, Xylophon ...) , weil sie sich durch ihr Prinzip der Tonerzeugung zu stark von den beiden oben genannten Gruppen unterscheiden. Genauso fehlt das archaischste aller Musikinstrumente: die menschliche Stimme. Im Grunde genommen gehört sie zur Gruppe der Chordophone, wobei die Stimmbänder die Rolle der Saiten übernehmen. Um die Stimmbildung zu verstehen, bedarf es neben physikalischer auch anatomischer Kenntnisse. Sie zu modellieren und mathematisch zu beschreiben, ist sehr kompliziert und würde den Rahmen dieses Buches sprengen.



© A. Egry.

Jedes Kapitel enthält auch ein Literaturverzeichnis, in dem sowohl die verwendete als auch weiterführende Literatur zur Vertiefung des jeweiligen Themas angegeben ist. Es erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und ist eine rein subjektive Auswahl.

Alles in allem soll dieses Buch sowohl ein Lesebuch als auch ein Nachschlagewerk sein. Manche Musiker werden vielleicht das eine oder andere Aha-Erlebnis haben und ihr Instrument besser verstehen. Interessierte Physiker werden womöglich überrascht sein über die komplexen Zusammenhänge bei der Tonentstehung. Ihnen sei gesagt, dass die in diesem Buch vorgestellten Theorien und Modelle in jedem Fall das Prinzip korrekt wiedergeben, aber nicht ausreichen, subtile Details vollständig abzubilden. In seinem Buch erzählt Benade, dass Instrumentenbauer geringschätzig auf die physikalischen Modelle herabschauen, weil sie weit hinter ihrer handwerklichen Erfahrung zurückbleiben. Das hat sich seitdem grundlegend geändert, beleuchtet aber die grundsätzliche Problematik.

Übrigens: Wer das Buch bis zu Ende gelesen hat, wird auch erfahren, was es mit Schallschnellen, Wolfstönen und Liebesfüßen auf sich hat.

Literatur

Die beiden Klassiker sind zweifelsohne:

- Helmholtz, H. (1981). *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. Frankfurt am Main: Minerva Verlag; (im Original erschienen bei Vieweg, Braunschweig, 1863).
- Strutt, J.W. (2011). *The Theory of Sound*. Cambridge University Press; (im Original erschienen bei MacMillan, London, 1877).

Die heutigen Standardwerke sind:

- Fletcher, N.H. und Rossing, T.D. (1998). *The Physics of Musical Instruments*, Heidelberg: Springer.
- Hall, D. (2008). *Musikalische Akustik*. Schott: Mainz.

- Hirschberg, A., Kergomard, J. und Weinreich, G. (Hrsg.) (1995). *Mechanics of Musical Instruments*. New York: Springer.
- Chaigne, A. und Kergomard, J. (2016). *Acoustics of Musical Instruments*. New York: Springer.
- Nederveen, C.J. (1998). *Acoustical Aspects of Woodwind Instruments*, revised edition. Northern Illinois University Press.
- Campbell, M., Gilbert, J. und Myers, A. (2021). *The Science of Brass Instruments*. New York: Springer.

Fast formelfreie lesenswerte Bücher sind:

- Benade, A.H. (1960). *Musik und Harmonie – Die Akustik der Musikinstrumente*. München: Kurt Desch Verlag.
- Winkler, K. (1992). *Die Physik der Musikinstrumente*. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft, Akademischer Verlag.
- Reuter, C. und Auhagen, W. (2014). *Musikalische Akustik*. Laaber: Laaber Verlag.

Vorträge und Dokumente im Internet:

- Lücke, W. (2003). Theorie zur Physik der Musikinstrumente, www.wolfgang-luecke.de/skripten/musi.pdf (zuletzt aufgerufen am 13.08.2021).
- Kemp, Y. (2010). Die Physik der Musikinstrumente, <https://www.desy.de/~kemp/talks/music/19012010/19012010.html> (zuletzt aufgerufen am 13.08.2021).
- Lohse, T. und zur Nedden, M. (2007). Die Physik der Musikinstrumente, www-hera-b.desy.de/people/nedden/lectures/02_03/musik/musik.ppt (zuletzt aufgerufen am 13.08.2021).
- Lapp, D. (o. J.). The Physics of Music and Musical Instruments, <http://kellerphysics.com/acoustics/Lapp.pdf> (zuletzt aufgerufen am 13.08.2021).
- Website der University of New South Wales (Sydney, Australien) (o. J.). <http://newt.phys.unsw.edu.au/music/> (zuletzt aufgerufen am 13.08.2021).
- Instrumentenkunde der Vienna Symphonic Library (2002–2022). <https://www.vsl.co.at/de/Academy/Instrumentology> (zuletzt aufgerufen am 13.08.2021).
- Webseite von J. Woodhouse (o. J.). Euphonics – The science of musical instruments. <https://euphonics.org> (zuletzt aufgerufen am 04.10.2021)
- Stockholm Music Acoustics Conference (SMAC) (2013). <http://www.speech.kth.se/smac-smc-2013> (zuletzt aufgerufen am 13.08.2021).

Darüber hinaus enthält natürlich Wikipedia <https://de.wikipedia.org/wiki/Musik#> (zuletzt aufgerufen am 13.08.2021) viele exzellente Seiten zu Akustik und Musikinstrumenten.

2

Akustik

2.1 Einleitung

Schallwellen sind Dichte- bzw. Druckschwankungen in einem Medium. Dieses Medium kann gasförmig, flüssig oder fest sein, aber es muss materiell vorhanden sein. Schall kann sich im Vakuum nicht ausbreiten. (Dieser Tatsache sind sich offenbar einige Regisseure von Science-Fiction-Filmen nicht bewusst, die ihre Raumschiffe mit einem merkwürdigen Surren durch die Weiten des Universums fliegen lassen.) Die Akustik untersucht die Ausbreitung von Schallwellen. Als solche ist sie eine Teildisziplin der Kontinuumsmechanik. Im Gegensatz dazu untersucht die Optik die Ausbreitung von Licht. Licht ist eine elektromagnetische Welle, und daher ist die Optik ein Teilgebiet der Elektrodynamik. Elektromagnetische Wellen benötigen kein Medium, um sich auszubreiten, sie existieren auch im Vakuum. Diese Tatsache hat viele Physiker des 19. Jahrhunderts, die in theoretischer Akustik ausgebildet waren, sehr gestört. Sie konnten sich nicht vorstellen, dass Wellen per se existieren, ohne eine Trägersubstanz. Um aus diesem Dilemma herauszukommen, formulierten sie die Äthertheorie. Der Äther war eine masselose Substanz, die als Medium für die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen sorgte und den gesamten Raum ausfüllte. Einen experimentellen Nachweis des Äthers gab es nicht. Darüber hinaus ist die Äthertheorie nicht mit der speziellen Relativitätstheorie vereinbar, so dass man sie letztlich aufgeben musste.

Die Kontinuumsmechanik – und damit auch die Akustik – ist eines der mathematisch anspruchvollsten Gebiete der Physik. Damit ist auch dieses Kapitel eines der mathematisch anspruchvollsten im ganzen Buch. Es ist aber unerlässlich, die Begriffe und Größen der Akustik, die im Buch immer wieder vorkommen, einzuführen und zu diskutieren, ebenso wie die Gesetze, die die Dynamik dieser Größen bestimmen.

Zunächst einmal müssen wir uns etwas näher mit der Definition einer Welle befassen. Viele denken dabei sicher an Wasserwellen, wie sie z. B. auf den Strand auflaufen, oder an die Riesenwellen, die die Surfer lieben, oder aber an Wellen in Kanälen. Leider sind alle diese Wellen schlechte Beispiele, weil sie viel zu kompliziert sind. Wir wollen Schallwellen als eine räumlich und zeitlich periodische Störung des Gleichgewichtszustands des Trägermediums definieren. Wellen haben eine Ausbreitungsrichtung und eine Auslenkungsrichtung. Wenn beide parallel zueinander

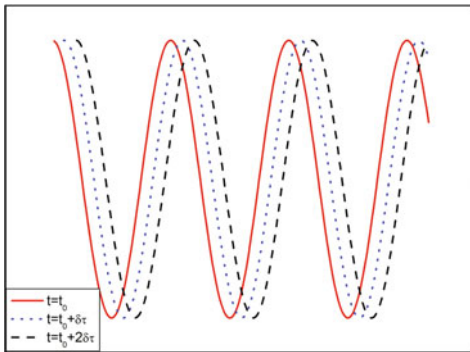


(a)

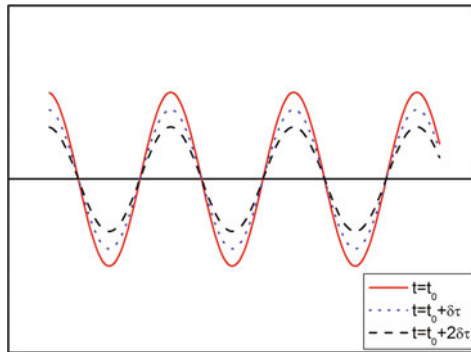


(b)

Abb. 2.1 Eine ebene Welle (a) © F. Balck; und eine zweidimensionale Kugelwelle (b) © R. Michaud/Pixabay.



(a)



(b)

Abb. 2.2 Laufende Welle (a) und stehende Welle (b).

sind, handelt es sich um eine longitudinale Welle. Schallwellen in Gasen sind longitudinal. Wenn Auslenkungsrichtung und Ausbreitungsrichtung senkrecht zueinander stehen, handelt es sich um transversale Wellen. Elektromagnetische Wellen sind transversal, aber auch Schallwellen in Festkörpern können transversal sein. Wellen haben eine Wellenfront. Dies ist eine Fläche gleicher Phase, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht. Bei ebenen Wellen ist die Wellenfront eine Ebene, bei Kugelwellen eine Kugelschale, wie in Abb. 2.1 gezeigt. Neben laufenden Wellen gibt es auch stehende Wellen. Diese entstehen durch die Überlagerung zweier in entgegengesetzte Richtung laufende Wellen. Dies kann z. B. durch Reflexion einer Welle an einer Wand entstehen. Bei stehenden Wellen sind die Phasen ortsfest, d. h. die Schwingungsknoten und Schwingungsbäuche bewegen sich nicht. Den Unterschied zwischen laufender und stehender Welle zeigt Abb. 2.2. Stehende Wellen sind für die Erzeugung von Tönen und Klängen essentiell, ohne sie gäbe es keine Musik.

Im Folgenden wollen wir die Bewegungsgleichung für Schallwellen in Gasen, die Wellengleichung, aus den Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik herleiten. Dazu brauchen wir eine Gleichung für die Massenerhaltung, die Kontinuitätsgleichung, eine Gleichung für die Impulserhaltung und die Zustandsgleichung für Ga-

se. Gegen Ende des Kapitels betrachten wir die Schallausbreitung in Festkörpern. Wir wissen zwar aus der Erfahrung, dass Schallwellen in Gasen existieren, dennoch ist es nicht trivial, dass die Gleichungen der Hydrodynamik und Thermodynamik solche Lösungen zulassen.

2.2 Die Wellengleichung

Der Zustand eines Gases ist durch die Zustandsgrößen Druck p , Dichte ρ und Temperatur T vollständig bestimmt. Für Schallwellen sind Druck und Dichte entscheidend, eine Schallwelle erzeugt keine nennenswerte Temperaturänderung. Wir können diese Größen wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \delta p \\ \rho &= \rho_0 + \delta \rho \\ T &= T_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dabei sind p_0 , ρ_0 und T_0 die Gleichgewichtswerte des Gases, die wir als zeitlich und räumlich konstant annehmen. Außerdem soll das Gas in Ruhe sein. Die durch die Schallwelle hervorgerufenen Druck- und Dichteschwankungen bezeichnen wir mit δp und $\delta \rho$. Diese sind Funktionen von Ort und Zeit und klein gegen die Gleichgewichtswerte $\delta p \ll p_0$, $\delta \rho \ll \rho_0$: $\delta p = \delta p(\mathbf{r}, t)$, $\delta \rho = \delta \rho(\mathbf{r}, t)$. Dabei ist $\mathbf{r}$ der dreidimensionale Ortsvektor.¹⁾ Neben den Druck- und Dichteschwankungen ist eine Schallwelle durch ein Strömungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ charakterisiert. Das ist die durch die Schallwelle hervorgerufene Geschwindigkeit des Gases. In der Akustik bezeichnet man $\mathbf{u}$ als Schallschnelle.²⁾ Statt der Schallschnelle ist es oft sinnvoller, die Schallamplitude $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$ als Variable zu verwenden. Die Schallschnelle ergibt sich dann als zeitliche Ableitung der Schallamplitude:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

In vielen Fällen genügt es, eine eindimensionale Welle zu betrachten. Dann können wir $\mathbf{r}$ durch die kartesische Koordinate x ersetzen.

Die Kontinuitätsgleichung besagt, dass sich die Dichte in einem Volumenelement, in dem sich keine Quelle befindet, nur durch Zufluss oder Abfluss von Masse von außerhalb ändern kann. Mit den oben eingeführten Variablen lässt sich die Kontinuitätsgleichung mathematisch wie folgt formulieren:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + \rho_0 \nabla \mathbf{u} = 0, \quad \text{oder in einer Dimension} \quad \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} u = 0} \quad (2.3)$$

Dabei ist $\partial/\partial t$ die zeitliche und $\partial/\partial x$ die örtliche partielle Ableitung und $\nabla \mathbf{u}$ die Divergenz der Schallschnelle.

1) Vektoren sind in diesem Buch durch **Fettdruck** gekennzeichnet.

2) In manchen Lehrbüchern wird die Maximalamplitude $u_{\max}$ des Strömungsfeldes u als Schallschnelle bezeichnet.

Die Impulserhaltung folgt aus der Newtonschen Bewegungsgleichung. Für eine Impulsänderung benötigt man eine Kraft, „Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung“. Für ein Gas ist die Kraft durch den Druck und die Masse durch die Dichte zu ersetzen, und man erhält die sogenannte Euler-Gleichung.

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \nabla \delta p = 0, \quad \text{oder in einer Dimension: } \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \delta p = 0 \quad (2.4)$$

Die Eulergleichung in drei Dimensionen ist eine vektorielle Gleichung und $\nabla \delta p$ ist der Gradient der Druckschwankung δp .

Wir haben jetzt zwei Gleichungen für drei Unbekannte δp , $\delta \rho$, und u . Es fehlt uns also noch eine Gleichung. Schallausbreitung erfolgt ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, sie ist ein adiabatischer Prozess. Daher können wir die Gleichung für adiabatische Prozesse benutzen. Sie lautet:

$$p \rho^{-\gamma} = \text{const}, \quad \text{oder} \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (2.5)$$

Hier ist γ der Adiabatenexponent. Er ist gegeben durch den Quotienten der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (2.6)$$

Als nächstes machen wir uns zu Nutze, dass $\delta \rho \ll \rho_0$ ist. Dann können wir näherungsweise schreiben:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \approx 1 + \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} \quad (2.7)$$

so dass wir schließlich erhalten:

$$\frac{\delta p}{p_0} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho_0} \quad (2.8)$$

Diese Gleichung stellt einen linearen Zusammenhang zwischen den Druck- und Dichteschwankungen her, die mit einer Schallwelle einhergehen und liefert die gesuchte dritte Gleichung. Wir lösen sie nach $\delta \rho$ auf und erhalten:

$$\delta \rho = \frac{1}{c^2} \delta p, \quad c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \quad (2.9)$$

Dabei haben wir die Größe c^2 eingeführt. Wie wir gleich sehen werden, ist c die Schallgeschwindigkeit. Mit Hilfe der Zustandsgleichung für ideale Gase können wir noch den Quotienten p_0/ρ_0 durch die Temperatur des Gases ausdrücken. Sie lautet:

$$p_0 = \rho_0 R_s T \quad (2.10)$$

R_s ist die individuelle Gaskonstante und T die absolute Temperatur in Kelvin. Durch Einsetzen erhalten wir

$$c = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \frac{R}{M} T} \quad (2.11)$$

wobei wir noch die individuelle Gaskonstante durch die universelle Gaskonstante R ersetzt haben. M ist die molare Masse des Gases. Die Schallgeschwindigkeit hängt also sowohl von der molaren Masse des Gases als auch von seiner Temperatur ab. Dies wird später noch wichtig werden. In Luft bei Raumtemperatur beträgt die Schallgeschwindigkeit 343,2 m/s.

Eine alternative, aber äquivalente Gleichung für die Schallgeschwindigkeit erhält man, wenn man γp_0 durch die adiabatische Kompressibilität κ ersetzt: $\gamma p_0 = 1/\kappa$ und somit

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho_0}} \quad (2.12)$$

Damit haben wir alle Ingredienzien beisammen, um die Wellengleichung für die Schallausbreitung in Gasen herzuleiten. Zunächst einmal benutzen wir Gl. (2.5), um die Dichte aus der Kontinuitätsgleichung zu eliminieren. Mit der so modifizierten Kontinuitätsgleichung und der Impulsgleichung haben wir somit zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten Druck und Schallschnelle, nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \delta p + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} u &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \delta p + \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} u &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Der Trick besteht nun darin, die erste Gleichung nach der Zeit und die zweite nach dem Ort zu differenzieren. Zieht man beide Gleichungen voneinander ab, verschwindet der Mischterm und man erhält:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta p(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta p(x, t) = 0 \quad (2.14)$$

Dies ist die gesuchte Wellengleichung für den Schalldruck in einer Dimension. Für drei Dimensionen ergibt sich analog:

$$\Delta \delta p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta p(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.15)$$

wobei $\Delta = \nabla^2$ der Laplace-Operator ist. In den meisten Fällen wird es genügen, die eindimensionale Wellengleichung zu betrachten. Was sagt diese Gleichung aus? Sie besagt, dass die zweite Ableitung nach dem Ort identisch ist mit der mit $1/c^2$ multiplizierten zweiten Ableitung nach der Zeit. Mit anderen Worten ist die allgemeine Lösung f eine Funktion nicht zweier Variablen x und t , sondern einer Variablen $x \pm ct$: $f(x, t) = f(x \pm ct)$, wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugen kann. Das Argument der Funktion f heißt Phase und wird meist mit φ abgekürzt. Wir können also schreiben: $\varphi = x \pm ct$ und die zeitliche Ableitung von φ ist $d\varphi/dt = \dot{\varphi} = \pm c$. c ist also die Phasengeschwindigkeit der Welle, wobei das Minuszeichen für eine nach rechts (zu größeren x) und das Pluszeichen für eine nach links laufende Welle steht. Die Phasengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich eine Wellenfront bewegt, also ist c tatsächlich die Schallgeschwindigkeit.

2.3 Lautstärke

Eine wichtige Frage in der Musik ist, wie laut sie ist. Dies ist zunächst eine Sache der subjektiven Wahrnehmung. Das liegt nicht nur daran, dass jeder Lautstärke anders empfindet, sondern auch daran, dass unser Ohr eine frequenzabhängige Kennlinie hat. Bei gleicher Schallintensität nehmen wir tiefe Töne leiser wahr als hohe. Ein objektives Maß für die von einer Schallquelle abgestrahlte Schallenergie ist die Schallintensität oder auch der Schalldruckpegel. Diese Größen lassen sich mit Messinstrumenten, z. B. einem Mikrofon, eindeutig messen. Die Schallintensität I ist definiert als das zeitliche Mittel der Energiestromdichte des Schalls und ist durch folgende Formel gegeben:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T |\delta p(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)| dt$$

$$\text{oder in einer Dimension: } I(x) = \frac{1}{T} \int_0^T |\delta p(x, t) u(x, t)| dt$$

Diese Definition stellt sicher, dass die Intensität eine positive Größe ist. Die Einheit von I ist W/m^2 , also Leistung pro Fläche. Da die gesamte Schallleistung einer Quelle vorgegeben ist, nimmt die Intensität mit $1/r^2$ mit der Entfernung von der Schallquelle ab. Die Größenordnung von I liegt zwischen 10^{-12} W/m^2 (Hörgrenze) und 1 W/m^2 (Schmerzgrenze), eine erstaunliche Dynamik über zwölf Größenordnungen! Das schafft das Ohr nur, weil es eine logarithmische Empfindlichkeit hat. Daher ist es in der Akustik sinnvoll, nicht die Intensität, sondern ihren Logarithmus anzugeben. Man definiert dazu den Schallintensitätspegel wie folgt:

$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ dB}, \quad I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (2.16)$$

Die Einheit für den Schallintensitätspegel ist das Dezibel, zu Ehren von Graham Bell, dem Erfinder des Telefons. (Die Vorsilbe „dezi“ bezieht sich auf den Faktor 10 vor dem Logarithmus.) Mit dieser Definition liegt die Hörgrenze bei 0 dB und die Schmerzgrenze bei 120 dB. Eine Verzehnfachung der Intensität führt zu einem Pegelanstieg von 10 dB. Ein Musikinstrument strahlt etwa 1 mW an akustischer Leistung ab, so dass der Pegel in 1 m Abstand etwa 90 dB beträgt. Bei Verdopplung des Abstands von der Schallquelle nimmt die Schallintensität um 6 dB ab:

$$L_I = 10 \log \left(\frac{r_1}{2r_1} \right)^2 = -20 \log 2 = -6 \text{ dB}$$

Eine analoge Definition gibt es auch für den Schalldruckpegel:

$$L_P = 10 \log \frac{\tilde{p}^2}{p_0^2} \text{ dB}, \quad p_0 = 20 \mu\text{Pa} \quad (2.17)$$