

Rolf Kindmann  
Matthias Kraus

# Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau





**Rolf Kindmann**  
**Matthias Kraus**

**Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau**

## 200 Jahre Wiley – Wissen für Generationen

John Wiley & Sons feiert 2007 ein außergewöhnliches Jubiläum: Der Verlag wird 200 Jahre alt. Zugleich blicken wir auf das erste Jahrzehnt des erfolgreichen Zusammenschlusses von John Wiley & Sons mit der VCH Verlagsgesellschaft in Deutschland, einschließlich des Ernst & Sohn Verlages für Architektur und technische Wissenschaften, zurück. Seit Generationen vermitteln Wiley und Wiley-VCH als auch Ernst & Sohn die Ergebnisse wissenschaftlicher Forschung und technischer Errungenschaften in der jeweils zeitgemäßen medialen Form.

Jede Generation hat besondere Bedürfnisse und Ziele. Als Charles Wiley 1807 eine kleine Druckerei in Manhattan gründete, hatte seine Generation Aufbruchsmöglichkeiten wie keine zuvor. Wiley half, die neue amerikanische Literatur zu etablieren. Etwa ein halbes Jahrhundert später, während der „zweiten industriellen Revolution“ in den Vereinigten Staaten, konzentrierte sich die nächste Generation auf den Aufbau dieser industriellen Zukunft. Wiley bot die notwendigen Fachinformationen für Techniker, Ingenieure und Wissenschaftler. Das ganze 20. Jahrhundert wurde durch die Internationalisierung vieler Beziehungen geprägt – auch Wiley verstärkte seine verlegerischen Aktivitäten und schuf ein internationales Netzwerk, um den Austausch von Ideen, Informationen und Wissen rund um den Globus zu unterstützen.

Wiley begleitete während der vergangenen 200 Jahre viele Generationen und fördert heute den weltweit vernetzten Informationsfluss, damit auch unsere global wirkende Generation ihre Ansprüche erfüllen kann und ihr Ziel erreicht. Immer rascher verändert sich unsere Welt, und es entstehen neue Technologien, die unser Leben und Lernen zum Teil tief greifend verändern. Beständig nimmt Wiley diese Herausforderungen an und stellt für Sie das notwendige Wissen bereit, das Sie neue Welten, neue Möglichkeiten und neue Gelegenheiten erschließen lässt.

Generationen kommen und gehen: Aber Sie können sich darauf verlassen, dass Wiley Sie als beständiger und zuverlässiger Partner mit dem notwendigen Wissen versorgt.



*William J. Pesce*  
President and Chief Executive Officer



*Peter Booth Wiley*  
Chairman of the Board

Rolf Kindmann  
Matthias Kraus

# Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau



 **Ernst & Sohn**  
A Wiley Company

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Rolf Kindmann  
Prüfingenieur für Baustatik  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau  
Universitätsstraße 150  
44801 Bochum

Dr.-Ing. Matthias Kraus  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Stahl- und Verbundbau  
Universitätsstraße 150  
44801 Bochum

Titelbild: Bitterfelder Bogen, Holzweißig bei Bitterfeld, Baujahr 2005/2006

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten  
sind im Internet über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

ISBN: 978-3-433-01837-8

© 2007 Ernst & Sohn

Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Berlin

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten.  
Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgend-  
einer Form - durch Fotokopie, Mikrofilm oder irgendein anderes Verfahren - reprodu-  
ziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen,  
verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden.

All rights reserved (including those of translation into other languages). No part of  
this book may be reproduced in any form - by photoprint, microfilm, or any other  
means - nor transmitted or translated into a machine language without written  
permission from the publisher.

Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen oder sonstigen Kenn-  
zeichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, daß diese von jedermann  
frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene  
Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie  
als solche nicht eigens markiert sind.

Umschlaggestaltung: blotto, Berlin  
Druck: Strauss GmbH, Mörlenbach  
Bindung: Litges & Dopf GmbH, Heppenheim  
Printed in Germany

# Vorwort

Für die Untersuchung von Tragwerken des Bauwesens hat sich die Methode der finiten Elemente (FEM) in den letzten 30 Jahren allgemein durchgesetzt. Möglich wurde dies durch die stürmische Entwicklung der Computertechnologie und die gezielte Weiterentwicklung computerorientierter Berechnungsverfahren. Die FEM ist heutzutage eine universelle Berechnungsmethode, die jeder Statiker sicher beherrschen muss.

Das vorliegende Buch konzentriert sich auf **FE-Methoden** zur Ermittlung von Schnittgrößen, Verformungen, Verzweigungslasten (Eigenwerten) und Eigenformen für **Stahlkonstruktionen**. Neben linearen Berechnungen für **Tragwerke** bilden die Stabilitätsfälle Biegeknicken, Biegedrillknicken und Plattenbeulen im Hinblick auf Verzweigungslasten und Berechnungen nach Theorie II. Ordnung wichtige Schwerpunkte. Hinzu kommen FE-Methoden für die Untersuchung von Querschnitten, die zurzeit noch relativ selten zur Anwendung kommen, zukünftig aber sicherlich stark an Bedeutung gewinnen werden.

Das vorliegende Buch ist für Studierende an Fachhochschulen, Technischen Hochschulen und Universitäten sowie Ingenieure in der Baupraxis konzipiert. Es werden daher die Grundlagen der FEM behandelt, Finite Elemente für die Untersuchungen von Stahlkonstruktionen entwickelt und neben Erläuterungen zum Verständnis Anwendungshinweise gegeben. Darüber hinaus wird mit zahlreichen Berechnungsbeispielen die Lösung baupraktischer Aufgabenstellungen gezeigt und Folgendes vermittelt:

- Welche finiten Elemente eignen sich für die im Stahlbau vorkommenden Aufgabenstellungen?
- Was ist bei der Auswahl der Elemente und der FE-Modellierung im Hinblick auf normengerechte Nachweise zu beachten?
- Welche computerorientierten Verfahren eignen sich vorzugsweise für die Finite-Elemente-Methode zur Lösung von Gleichungen und zur Ermittlung von Eigenwerten und -formen?

Die Verfasser danken Herrn Dipl.-Ing. *Niebuhr* von der Ingenieursozietät Schürmann-Kindmann und Partner, Dortmund, sowie den Herren Dr.-Ing. *Wolf* und Dipl.-Ing. *Vette* für die wertvollen Anregungen und fachlichen Diskussionen. Ein besonderer Dank gilt Frau *Habel* für die druckfertige Erstellung des Manuskriptes und Herrn *Steinbach* für die Anfertigung der Bilder. Aktuelle Hinweise zum Buch werden unter [www.kindmann.de](http://www.kindmann.de), [www.rub.de/stahlbau](http://www.rub.de/stahlbau) und [www.skp-ing.de](http://www.skp-ing.de) veröffentlicht.

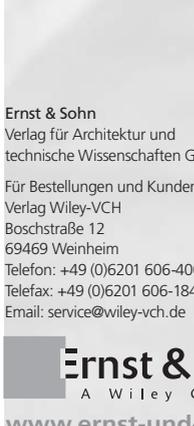
# Die Leitfäden zu den DIN-Fachberichten im Brückenbau gibt's bei uns!



Novák, B. / Gabler, M.  
**Leitfaden zum DIN-Fachbericht 101**  
Einwirkungen auf Brücken  
Ausgabe März 2003  
2004. 78 S. 45 Abb. 14 Tab. Br.  
€ 27,90\* / sFr 45,-  
ISBN 978-3-433-01687-9



König, G. et al.  
**Leitfaden zum DIN-Fachbericht 102**  
Betonbrücken  
Ausgabe März 2003  
2004. X, 222 S. 132 Abb. 44 Tab. Br.  
€ 52,90\* / sFr 85,-  
ISBN 978-3-433-01688-6



Sedlacek, G. et al.  
**Leitfaden zum DIN-Fachbericht 103**  
Stahlbrücken  
Ausgabe März 2003  
2004. 441 S. 325 Abb., 34 Tab. Br.  
€ 89,90\* / sFr 144,-  
ISBN 978-3-433-01689-3



Hanswille, G. / Stranghöner, N.  
**Leitfaden zum DIN-Fachbericht 104**  
Verbundbrücken  
Ausgabe März 2003  
2004. X, 238 S. 205 Abb. 14 Tab. Br.  
€ 52,90\* / sFr 85,-  
ISBN 978-3-433-01690-9

Die DIN-Fachberichte im Brückenbau 101, 102, 103 und 104 wurden nach einer knapp zweijährigen Probeanwendung Mitte März 2003 im Beuth-Verlag, Berlin, publiziert. Seit dem 1. Mai 2003 muß sich jeder Bauingenieur nach diesen neuen Vorgaben richten, wenn er ein Bauvorhaben oder eine Entwurfsbearbeitung beginnt oder mit der Bearbeitung der Ausschreibungsunterlagen noch nicht begonnen hat.

Da es sich bei den veröffentlichten DIN-Fachberichten um sehr komplexe Zusammenhänge handelt, wurden im Auftrag der Bundesanstalt für Straßenwesen (bast) und des Bundesministeriums für Verkehr, Bau und Wohnungswesen (BMVBM) **Erläuterungen mit Beispielen für die vier DIN-Fachberichte** erstellt. In diesen sog. Leitfäden werden anhand von Beispielen die DIN-Fachberichte kommentiert und erläutert.

Die Leitfäden sind als Hilfestellung für die Anwender gedacht und verfolgen die nachstehenden Ziele:

- Leithilfe zur Erleichterung der Anwendung der Regelungen des entsprechenden Fachberichtes durch textliche Erläuterungen und Zahlenbeispiele.
- Hintergrundinformationen zum Verständnis der Regelungen des entsprechenden Fachberichtes; beim DIN-FB 103 vor allem im Hinblick auf die bei ersten Pilotanwendungen gestellten Fragen.
- Ergänzung zum DIN-FB 103 durch Hinweise auf Weiterentwicklungen bei der Überführung in die EN-Normen.

Bestellen Sie  
alle vier Leitfäden im Paket  
und sparen Sie € 44,-\*!

Ernst & Sohn  
Verlag für Architektur und  
technische Wissenschaften GmbH & Co. KG

Für Bestellungen und Kundenservice:  
Verlag Wiley-VCH  
Boschstraße 12  
69469 Weinheim  
Telefon: +49 (0)6201 606-400  
Telefax: +49 (0)6201 606-184  
Email: [service@wiley-vch.de](mailto:service@wiley-vch.de)

**Ernst & Sohn**  
A Wiley Company  
[www.ernst-und-sohn.de](http://www.ernst-und-sohn.de)

\* Der €-Preis gilt ausschließlich für Deutschland

005534016-my  
Änderungen vorbehalten.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Übersicht</b>	<b>1</b>
1.1	Erforderliche Nachweise und Nachweisverfahren	1
1.2	Verfahren zur Schnittgrößenermittlung	2
1.3	Elementtypen und Anwendungsbereiche	4
1.4	Lineare und nichtlineare Berechnungen	6
1.5	Bezeichnungen und Annahmen	8
1.6	Grundlegende Beziehungen	13
1.7	EDV-Programme	16
<b>2</b>	<b>Grundlagen der FE-Methode</b>	<b>17</b>
2.1	Allgemeines	17
2.2	Grundideen und Methodik	17
2.3	Ablauf der Berechnungen	23
2.4	Gleichgewicht	25
2.4.1	Vorbemerkungen	25
2.4.2	Prinzip der virtuellen Arbeit	26
2.4.3	Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	28
2.4.4	Differentialgleichungen	29
2.5	Ansatzfunktionen für die Verformungen	32
2.5.1	Grundsätzliches	32
2.5.2	Polynomfunktionen für Stabelemente	32
2.5.3	Trigonometrische und Hyperbelfunktionen für Stabelemente	36
2.5.4	Ansatzfunktionen für das Plattenbeulen	40
2.5.5	Eindimensionale Funktionen für Querschnitte	44
2.5.6	Zweidimensionale Funktionen für Querschnitte	48
<b>3</b>	<b>FEM für lineare Berechnungen von Stabtragwerken</b>	<b>53</b>
3.1	Vorbemerkungen	53
3.2	Stabelemente für lineare Berechnungen	53
3.2.1	Verknüpfung der Verformungs- und Schnittgrößen	53
3.2.2	Normalkraftbeanspruchungen	55
3.2.3	Biegebeanspruchungen	58
3.2.4	Torsionsbeanspruchungen	61
3.2.5	Beliebige Beanspruchungen	65
3.3	Knotengleichgewicht im globalen Koordinatensystem	68
3.4	Bezugssysteme und Transformationen	71
3.4.1	Problemstellung	71

3.4.2	Stabelemente in der X-Z-Ebene	76
3.4.3	Stabelemente im räumlichen X-Y-Z-KOS	79
3.4.4	Lastgrößen	83
3.4.5	Verdrillung und Wölbbimoment	84
3.4.6	Finite Elemente für beliebige Bezugspunkte	91
3.5	Gleichungssystem	92
3.5.1	Ziel	92
3.5.2	Gesamtsteifigkeitsmatrix	92
3.5.3	Gesamtlastvektor	94
3.5.4	Geometrische Randbedingungen	96
3.6	Berechnung der Verformungsgrößen	98
3.7	Ermittlung der Schnittgrößen	99
3.8	Ermittlung der Auflagerreaktionen	101
3.9	Einwirkungen/Lastgrößen	102
3.9.1	Einzellasten	102
3.9.2	Streckenlasten	102
3.9.3	Stützensenkungen	103
3.9.4	Temperatureinwirkungen	104
3.10	Federn und Schubfelder	105
3.11	Gelenke und Gelenkfedern	109
3.12	Einflusslinien	113
3.13	Übertragungsmatrizenverfahren	118
3.14	Schubweiche Stabelemente	122
<b>4</b>	<b>FEM für nichtlineare Berechnungen von Stabtragwerken</b>	<b>130</b>
4.1	Allgemeines	130
4.2	Gleichgewicht am verformten System	130
4.3	Ergänzung der virtuellen Arbeit	134
4.4	Knotengleichgewicht unter Berücksichtigung von Verformungen	140
4.5	Geometrische Steifigkeitsmatrix	142
4.6	Sonderfall: Biegung mit Druck- bzw. Zugnormalkraft	147
4.7	Vorverformungen und geometrische Ersatzimperfektionen	151
4.8	Berechnungen nach Theorie II. Ordnung und Nachweis- schnittgrößen	155
4.9	Stabilitätsuntersuchungen/Verzweigungslasten	163
4.10	Eigenformen/Knickbiegelinien	165
4.11	Fließgelenktheorie	168
4.12.	Fließzonentheorie	172
4.12.1	Anwendungsbereiche	172
4.12.2	Wirklichkeitsnahe Berechnungsannahmen	172
4.12.3	Einfluss der Imperfektionen	175
4.12.4	Berechnungsbeispiele	176

<b>5</b>	<b>Anwendungsbeispiele für Stabtragwerke</b>	<b>179</b>
5.1	Übersicht	179
5.1.1	Allgemeines	179
5.1.2	Nachweis ausreichender Querschnittstragfähigkeit	180
5.1.3	Nachweise zum Biegeknicken und Biegedrillknicken	182
5.1.4	Auswahl der Elementtypen und -matrizen	184
5.1.5	Tragfähigkeitsmindernde Einflüsse	186
5.2	Träger	188
5.2.1	Vorbemerkungen	188
5.2.2	Einfeldträger mit Kragarm	188
5.2.3	Traglast eines Zweifeldträgers	191
5.2.4	Zweifeldträger mit elastischem Mittelaufleger	194
5.2.5	Träger mit planmäßiger Torsion	196
5.2.6	Kranbahnträger	198
5.3	Stützen und andere Druckstäbe	202
5.3.1	Vorbemerkungen	202
5.3.2	Elastisch eingespannte Rohrstütze	202
5.3.3	Stütze mit planmäßiger Biegung	203
5.3.4	Giebelwandeckstütze	206
5.4	Fachwerke	210
5.4.1	Vorbemerkungen	210
5.4.2	Ebener Fachwerkbinder	211
5.5	Rahmen und Stabwerke	215
5.5.1	Vorbemerkungen	215
5.5.2	Zweigelenrahmen mit Zwischenbühne	215
5.5.3	Rahmen unter Berücksichtigung der Anschlusssteifigkeit	220
5.5.4	Haupttragwerk einer Stabbogenbrücke	226
5.6	Trägerroste	230
5.6.1	Vorbemerkungen	230
5.6.2	Fahrbahn einer Stabbogenbrücke	230
<b>6</b>	<b>FEM für ebene Flächentragwerke</b>	<b>232</b>
6.1	Scheiben und Platten	232
6.2	Spannungen und Schnittgrößen	232
6.3	Verschiebungsgrößen	234
6.4	Grundlegende Beziehungen	235
6.5	Prinzip der virtuellen Arbeit	237
6.6	Scheiben und Platten im Stahlbau	240
6.7	Steifigkeitsmatrix für ein Plattenelement	241
6.8	Geometrische Steifigkeitsmatrix für das Plattenbeulen	244
6.9	Längs- und querausgesteifte Platten	246

---

6.10	Nachweise zum Plattenbeulen	250
6.11	Ermittlung von Beulwerten und -flächen mit der FEM	257
6.12	Anwendungsbeispiele zum Plattenbeulen	260
6.12.1	Einzelfeld mit konstanten $\sigma_x$ und $\alpha \approx 1,5$	260
6.12.2	Vollwandträgersteg mit Längssteifen	263
6.12.3	Stegblech einer Verbundbrücke mit Schubbeanspruchung	267
6.12.4	Stegblech mit hoher Biegebeanspruchung	268
<b>7</b>	<b>FEM für Stabquerschnitte</b>	<b>270</b>
7.1	Aufgabenstellungen	270
7.2	Normierte Bezugssysteme und Querschnittskennwerte	272
7.3	Prinzip der virtuellen Arbeit	275
7.4	Eindimensionale Elemente für dünnwandige Querschnitte	280
7.4.1	Virtuelle Arbeit	280
7.4.2	Elementsteifigkeitsbeziehungen	283
7.4.3	Gleichungssysteme	285
7.4.4	Berechnungen der Querschnittswerte und Spannungen	287
7.4.5	Zusammenstellung	290
7.5	Zweidimensionale Elemente für dickwandige Querschnitte	291
7.5.1	Vorbemerkungen	291
7.5.2	Virtuelle Arbeit für dickwandige Querschnittselemente	293
7.5.3	Elementgeometrie	295
7.5.4	Transformationsbeziehungen	297
7.5.5	Steifigkeitsbeziehungen	299
7.5.6	Numerische Integration	301
7.5.7	Querschnittswerte und Spannungen	304
7.5.8	Güte der Näherungslösungen	306
7.5.9	Sonderfall: Rechteckige Elemente	308
7.6	Berechnungsablauf	312
7.7	Anwendungsbeispiele	314
7.7.1	Vorbemerkungen	314
7.7.2	Einzelliger Hohlkastenquerschnitt	314
7.7.3	Brückenquerschnitt mit Trapezsteifen	319
7.7.4	Rechteckiger Vollquerschnitt	322
7.7.5	Doppelsymmetrischer I-Querschnitt	329
7.7.6	Kranschiene	336
<b>8</b>	<b>Gleichungssysteme</b>	<b>339</b>
8.1	Problemstellung	339
8.2	Lösungsverfahren	340
8.3	<i>Gaußscher</i> Algorithmus	341

---

8.4	<i>Cholesky</i> -Verfahren	342
8.5	<i>Gaucho</i> -Verfahren	342
8.6	Berechnungsbeispiel	344
8.7	Ergänzende Hinweise	346
<b>9</b>	<b>Lösung von Eigenwertproblemen</b>	<b>347</b>
9.1	Problemstellung	347
9.2	Erläuterungen zum Verständnis	348
9.3	Matrizenzerlegungsverfahren	353
9.4	Inverse Vektoriteration	358
9.5	Kombination der Lösungsverfahren	364
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>369</b>
	<b>Sachverzeichnis</b>	<b>375</b>

# Aktuelles aus Wissenschaft und Praxis für Bauingenieure



## Berufliche Kompetenz durch Fachzeitschriften.

Fachzeitschriften von Ernst & Sohn decken durch Ihre Themenschwerpunkte den gesamten Bereich der Ingenieurpraxis im Bauwesen ab.

Nutzen Sie Ernst & Sohn Zeitschriften:

- um sich aktuell zu informieren
- als Arbeitsmittel
- als Normenbegleitung
- als Nachschlagewerk
- für Ihre Weiterbildung
- zur Marktforschung
- um Ihren Bekanntheitsgrad zu steigern

Durch die Kombination print und online können Sie rund um die Uhr an Ihrem Schreibtisch recherchieren, lesen, drucken, speichern.



 **Fax +49 (0)30 47031 240**

Bitte senden Sie eine kostenlose Leseprobe / 1 Heft von

Bauphysik       Bautechnik       Beton- und Stahlbetonbau

DIBt Mitteilungen       Mauerwerk       Stahlbau

Privat     Geschäftlich      KD-NR \_\_\_\_\_

Firma \_\_\_\_\_

Titel, Name, Vorname \_\_\_\_\_

Funktion/Position/Abt. \_\_\_\_\_

Straße/Postfach \_\_\_\_\_

Land/PLZ/Ort \_\_\_\_\_

E-Mail \_\_\_\_\_

Telefon \_\_\_\_\_

Wilhelm Ernst & Sohn  
Verlag für Architektur und  
technische Wissenschaften  
GmbH & Co. KG  
Bühlingstr. 10  
13086 Berlin  
Deutschland

**Ernst & Sohn**  
A Wiley Company  
www.ernst-und-sohn.de

# 1 Einleitung und Übersicht

## 1.1 Erforderliche Nachweise und Nachweisverfahren

Für Tragwerke des Bauwesens ist die Trag- und Lagesicherheit sowie die Gebrauchstauglichkeit nachzuweisen, siehe z. B. DIN 18800 Teil 1. Da die Bauteile im Stahlbau in der Regel schlank und dünnwandig sind, haben Tragsicherheitsnachweise für stabilitätsgefährdete Konstruktionen bezüglich Biegeknicken, Biegedrillknicken und Plattenbeulen große Bedeutung und bilden daher einen wichtigen Schwerpunkt in statischen Berechnungen. In diesem Zusammenhang ist die Ermittlung von Schnittgrößen, Verformungen und Verzweigungslasten eine zentrale Aufgabe, deren Lösung in dem vorliegenden Buch mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode (FEM) behandelt wird.

Die Berechnungen und Nachweise müssen die gesetzlichen Anforderungen erfüllen und dem Stand der Technik entsprechen. Für Stahlkonstruktionen sind die Grundnorm DIN 18800 und die entsprechenden Fachnormen bzw. der Eurocode 3 zu beachten. Tabelle 1.1 enthält eine Zusammenstellung der *Nachweisverfahren* nach DIN 18800 und der Nachweise, wie sie üblicherweise geführt werden. Der Eurocode 3 enthält vergleichbare Regelungen.

**Tabelle 1.1** Nachweisverfahren nach DIN 18800 und übliche Nachweise

Nachweisverfahren	Berechnung der Beanspruchungen $S_d$	Berechnung der Beanspruchbarkeiten $R_d$	Nachweise
Elastisch-Elastisch	Elastizitätstheorie ⇒ Spannungen $\sigma$ und $\tau$	Elastizitätstheorie ⇒ Bemessungswert der Streckgrenze $f_{y,d}$	Spannungsnachweise: $\sigma \leq \sigma_{R,d} = f_{y,d}$ $\tau \leq \tau_{R,d} = f_{y,d} / \sqrt{3}$ $\sigma_v \leq \sigma_{R,d} = f_{y,d}$
Elastisch-Plastisch	Elastizitätstheorie ⇒ Schnittgrößen $N$ , $M_y$ usw.	Plastizitätstheorie ⇒ Ausnutzung plastischer Tragfähigkeiten der Querschnitte	z. B. $M_y \leq M_{pl,y,d}$ bzw. mit Interaktionsbedingungen oder mit dem Teilschnittgrößenverfahren
Plastisch-Plastisch	Plastizitätstheorie ⇒ Schnittgrößen nach der Fließgelenk- oder Fließzonentheorie	Plastizitätstheorie ⇒ Ausnutzung plastischer Tragfähigkeiten der Querschnitte und des Systems	Nach der <b>Fließgelenktheorie</b> (kinematische Ketten oder schrittweise elastische Berechnungen) oder nach der <b>Fließzonentheorie</b> (nur mit EDV-Programmen)

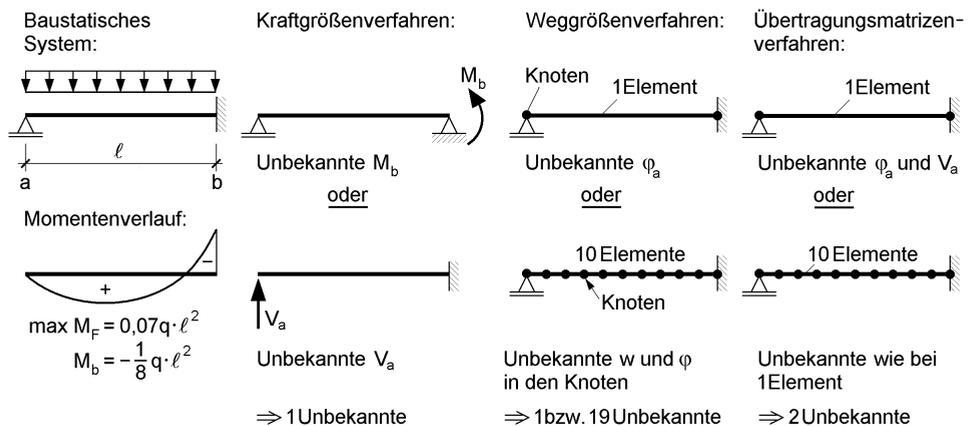
Die Verwendung eines *Nachweisverfahrens* setzt voraus, dass die einzelnen Querschnittsteile (Steg und Gurte) die Druckspannungen aufnehmen können, so dass kein Beulen auftritt und eine ausreichende Rotationskapazität vorhanden ist. Hilfen für die Überprüfung der  $b/t$ -Verhältnisse finden sich in Profiltabellen, s. z. B. [30]. Sofern nur Längsnormal- und Schubspannungen auftreten, ist  $\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ . Der Nach-

weis der *Vergleichspannung* (*Nachweisverfahren Elastisch-Elastisch*) ist nur erforderlich, wenn  $\sigma/\sigma_{R,d}$  **und**  $\tau/\tau_{R,d} > 0,5$  sind. Vollplastische Schnittgrößen für Walzprofile finden sich in den Profiltabellen [30], Interaktionsbedingungen und Nachweise mit dem Teilschnittgrößenverfahren in [30] und [27].

Der Index „d“ bei  $S_d$  und  $R_d$  in Tabelle 1.1 kennzeichnet, dass die **Beanspruchungen mit den Bemessungswerten** der Einwirkungen zu berechnen sind und es sich um die **Bemessungswerte der Beanspruchbarkeiten** handelt. Auf die Berechnung der Beanspruchungen und Beanspruchbarkeiten wird im Abschnitt 1.5 „Lineare und nichtlineare Berechnungen“ näher eingegangen.

## 1.2 Verfahren zur Schnittgrößenermittlung

Bekanntlich können die Schnittgrößen in statisch bestimmten Systemen mit Hilfe von **Gleichgewichtsbedingungen** und Schnittprinzipien ermittelt werden. Dies ist bei statisch **unbestimmten** Systemen nicht möglich und man benötigt daher andere Lösungsverfahren, wie z. B. das **Kraftgrößenverfahren**, das das klassische Verfahren der Baustatik ist. Es ist für die Handrechnung gut geeignet und sehr anschaulich, da es dem ingenieurmäßigen Verständnis unmittelbar zugänglich ist. Der Nachteil ist jedoch, dass man für die unterschiedlichen baustatischen Systeme stets einen neuen Lösungsansatz entwickeln muss und es darüber hinaus für viele Aufgabenstellungen gänzlich ungeeignet ist.



**Bild 1.1** Unbekannte Größen beim Kraftgrößen-, Weggrößen- und Übertragungsmatrizenverfahren für ein ausgewähltes Beispiel

Bild 1.1 zeigt als Beispiel einen **einfach** unbestimmten Biegeträger. Beim Kraftgrößenverfahren muss daher **eine** unbekannte Kraftgröße bestimmt werden. Danach kann der Momentenverlauf unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen bestimmt

werden. Ausgangspunkt des Verfahrens ist stets die Wahl eines statisch bestimmten Hauptsystems. Da man dabei mehrere Möglichkeiten hat, sind die beiden Systeme in Bild 1.1 ausgewählte Beispiele.

Bei allgemeiner Betrachtung unterscheidet man drei Verfahren für die Schnittgrößenermittlung:

- *Kraftgrößenverfahren*
- *Weggrößenverfahren* → FEM
- *Übertragungsmatrizenverfahren* → FEM

Darüber hinaus gibt es zu den drei Verfahren noch zahlreiche Varianten, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll. Während beim *Kraftgrößenverfahren* die **Kraftgrößen** die Unbekannten des entstehenden Gleichungssystems sind, sind es beim *Weggrößenverfahren* die **Weggrößen**, d. h. die Verschiebungen und Verdrehungen, weshalb es auch Verformungsgrößenverfahren genannt wird. Wenn man die baustatischen Systeme in Finite Elemente (z. B. Stabelemente bzw. -abschnitte) einteilt, ist das Weggrößenverfahren in hervorragender Weise für eine verallgemeinerte Formulierung geeignet und daher universell in einem weiten Anwendungsbereich einsetzbar. Ingenieurmäßig anschaulich ist es nicht und es ist stark mathematisch-mechanisch ausgerichtet, weil große Datenmengen zu verarbeiten und große Gleichungssysteme zu lösen sind. Dies hängt natürlich vom statischen System und der FE-Modellierung ab und ist hier daher im Vergleich zum *Kraftgrößenverfahren* gemeint.

Bild 1.1 zeigt beispielhaft die Anwendung des *Weggrößenverfahrens*. Unbekannte Größen sind bei diesem Verfahren die Verformungsgrößen in den Knoten, d. h. beim untersuchten Biegeträger die Verschiebung  $w$  und die Verdrehung  $\varphi$ . Pro Knoten treten also zwei Unbekannte auf. Für das Beispiel ergeben sich dann unter Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen eine bzw. 19 Unbekannte. Bei der FE-Modellierung mit zehn Elementen treten relativ viele Unbekannte auf (19). Vorteilhaft ist dabei aber, dass keine weiteren Handrechnungen erforderlich sind, weil verfahrensbedingt alle Zustandsgrößen (Biegemomente, Querkräfte, Durchbiegungen, Verdrehungen) in den Knoten, d. h. praktisch im gesamten Träger, berechnet werden.

Aufgrund des numerischen Aufwandes ist die weite Verbreitung der FEM unter Verwendung des *Weggrößenverfahrens* eng mit der stürmischen Entwicklung leistungsfähiger Computer verbunden. Noch bis etwa 1985 war es eine wichtige Aufgabe, Tragwerke so durch finite Elemente zu modellieren, dass der begrenzte Speicherplatz ausreichte und Rechenzeiten nicht ausufernten. Heutzutage sind derartige Überlegungen nur noch bei außergewöhnlichen Tragwerken und Berechnungen von Bedeutung. Andererseits stellt man häufig bei statischen Berechnungen fest, dass mit übertrieben feinen FE-Modellierungen oder ungeeigneten Finiten Elementen „überflüssig viel Papier erzeugt wird“. Wie Bild 1.1 zeigt kann es durchaus sinnvoll sein Einfeldträger mit einem FEM-Programm zu berechnen, weil vom Programm direkt alle Größen für

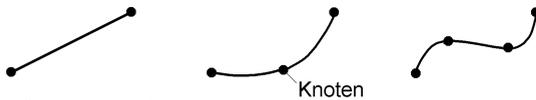
die erforderlichen Nachweise ermittelt werden und man mit geringem Aufwand die entsprechenden Seiten für die statische Berechnung ausdrucken kann.

Als drittes Verfahren ist in der obigen Aufzählung das **Übertragungsmatrizenverfahren** aufgeführt. Es wird auch *Reduktionsverfahren* genannt und eignet sich für durchgehende Stabzüge, wie z. B. Durchlaufträger, die auch Knicke enthalten können. Unbekannte des entstehenden Gleichungssystems sind die unbekanntes Schnitt- und Weggrößen **am Beginn** des Stababzuges (siehe auch Bild 1.1), so dass sich bei Stäben maximal sieben Unbekannte ergeben. Entsprechend gering ist der Bedarf an Speicherplatz und Rechenzeit, was wie bereits oben erwähnt bis etwa 1985 von großer Bedeutung war. Man hat mit dem *Übertragungsmatrizenverfahren* früher häufig z. B. Vollwandträgerbrücken bemessen, da sich selbst bei Durchlaufträgern über mehrere Felder nur zwei Unbekannte ergeben (Hauptträger, Abtragung der Vertikal-lasten). EDV-Programme, die das *Übertragungsmatrizenverfahren* verwenden, sind heutzutage selten. Das Verfahren findet sich aber durchaus in aktuellen FEM-Programmen für Stäbe und Stabwerke, wobei jedoch zuerst mit einer relativ groben Einteilung in Finite Elemente nach dem *Weggrößenverfahren* gerechnet wird. Anschließend werden die einzelnen Stäbe meist in fünf bis zehn Elemente aufgeteilt und detaillierter mit dem *Übertragungsmatrizenverfahren* untersucht. Weitere Einzelheiten zum *Übertragungsmatrizenverfahren* finden sich in Abschnitt 3.13.

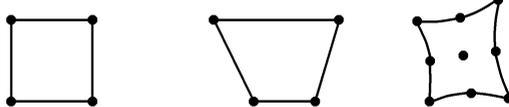
### 1.3 Elementtypen und Anwendungsbereiche

Bei Berechnungen mit der FEM werden Tragwerke durch möglichst zutreffende **baustatische Systeme** (Stabwerke, Platten, Scheiben usw.) idealisiert und dann in geeigneter Weise in finite Elemente eingeteilt, s. Bild 1.3. Man unterscheidet:

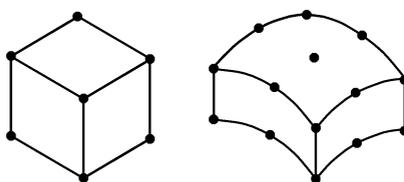
Linienelemente (Stabelemente)



Flächenelemente

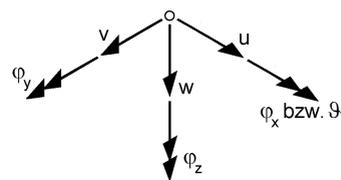


Volumenelement



Mögliche Knotenfreiwerte:

- Verschiebungen  $u, v$  und  $w$
- Verdrehungen  $\varphi_x$  bzw.  $\vartheta$ ,  $\varphi_y$  und  $\varphi_z$



- Verdrehung  $\vartheta'$  bzw.  $w'$

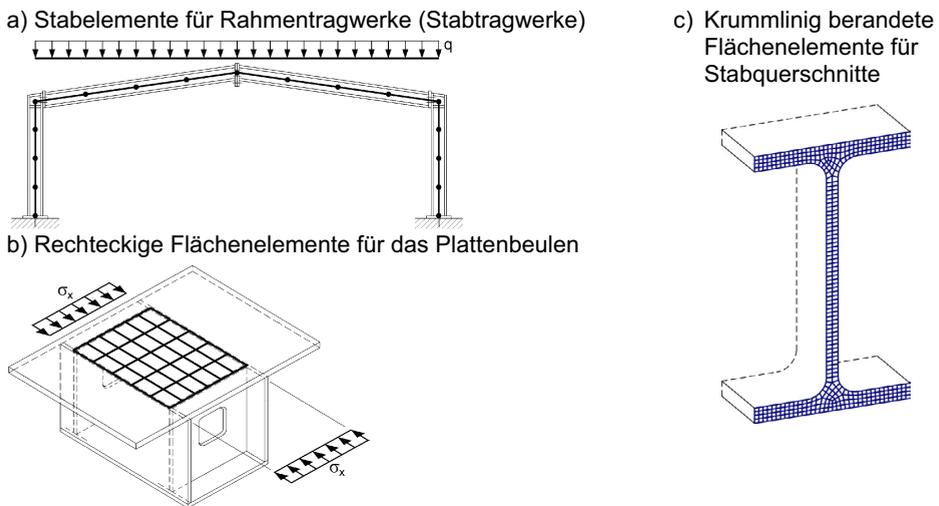
**Bild 1.2** Elementtypen und mögliche Knotenfreiwerte

- *Linielemente* (gerade oder gekrümmt)
- *Flächenelemente* (eben oder gekrümmt)
- *Volumenelemente* (quaderförmig oder mit gekrümmten Oberflächen)

In Bild 1.2 sind entsprechende Elemente beispielhaft dargestellt. Sofern Stäbe oder Stabwerke untersucht werden, kann es in einigen Anwendungsfällen sinnvoll sein, die **Stabquerschnitte** mit Hilfe der FEM zu untersuchen. Dabei werden je nach Aufgabenstellung

- *Linielemente* (gerade oder gekrümmt) oder
- *Flächenelemente* (viereckig oder dreieckig, gerade oder gekrümmte Ränder)

verwendet.



**Bild 1.3** Beispiele zur Diskretisierung unterschiedlicher Problemstellungen des Stahlbaus mit finiten Elementen

Für die Berechnung von Tragwerken aus Baustahl werden fast ausschließlich **Stabelemente** verwendet (s. Bild 1.3a), die häufig Bestandteil der folgenden baustatischen Systeme sind:

- einfeldrige und durchlaufende Biegeträger
- Stützen und ebene Rahmen
- ebene und räumliche Fachwerke
- räumliche Stabtragwerke
- Trägerroste

Die hier aufgeführten baustatischen Systeme kommen vornehmlich im **Hoch-, Industrie- und Anlagenbau** vor. Sie erfordern aufgrund unterschiedlicher Beanspruchungen Stabelemente mit bis zu sieben Verformungsgrößen in den Knoten (Knotenfrei-

werte). Auf die Anzahl der erforderlichen Verformungsgrößen pro Knoten wird in den Kapiteln 3 und 5 näher eingegangen.

**Stabelemente** sind auch für die Berechnung von **Brücken** die üblichen finiten Elemente. Ob Vollwandträger-, Fachwerkbalken-, Stabbogen- oder Schrägseilbrücken, Flächenelemente (Scheiben, Platten, Schalen) werden nur selten verwendet. Ein wesentlicher Hintergrund dazu ist, dass die aktuellen Vorschriften fast ausschließlich auf die Berechnung mit Stabtragwerken abgestimmt sind. Hinzu kommt, dass die Genauigkeit dieser Berechnungen von Ausnahmen abgesehen völlig ausreichend ist.

Ein durchaus interessanter Verwendungsbereich von finiten **Flächenelementen** im Stahlbau ist das Plattenbeulen. Bild 1.3b zeigt beispielhaft den Obergurt eines Stabes, der für die Untersuchung des Plattenbeulens in finite Elemente eingeteilt worden ist. Das Thema wird in Kapitel 5 behandelt und ein rechteckiges Plattenelement für die Berechnung von Eigenwerten und Eigenformen hergeleitet. Ansonsten werden Flächenelemente natürlich bei wissenschaftlichen Untersuchungen und Entwicklungen gezielt eingesetzt. Da, wie erwähnt, Flächenelemente nur selten und **Volumenelemente** praktisch gar nicht im Stahlbau zum Einsatz kommen, soll hier zusammenfassend Folgendes festgehalten werden:

- **Tragwerke des Stahlbaus** werden fast ausschließlich mit Hilfe von **Stabelementen** berechnet.
- Es werden unterschiedliche Stabelemente benötigt, damit alle vorkommenden Tragwerks- und Beanspruchungsarten zutreffend berechnet werden können.

Finite Elemente für die Untersuchung von **Stabquerschnitten** werden in Kapitel 7 behandelt. Als Beispiel dazu ist in Bild 1.3c die FE-Modellierung eines gewalzten I-Querschnitts durch krummlinig berandete Flächenelemente dargestellt.

## 1.4 Lineare und nichtlineare Berechnungen

Lineare Berechnungen (Theorie I. Ordnung) bilden in der Regel gedanklich und rechnerisch den Ausgangspunkt. Grundlage sind folgende Annahmen:

- Der Werkstoff verhält sich im gesamten Tragwerk linear-elastisch, d. h. es gilt uneingeschränkt das *Hookesche* Gesetz.
- Der Einfluss von Tragwerksverformungen ist so gering, dass sie vernachlässigt werden können und die Gleichgewichtsbeziehungen am **unverformten** System formuliert werden dürfen.
- Strukturelle und geometrische Imperfektionen, d. h. Eigenspannungen, Vorkrümmungen und Vorverdrehungen, können vernachlässigt werden.

Nichtlineare Berechnungen erfordern in der Regel einen höheren Aufwand als lineare. Man unterscheidet **physikalische und geometrische Nichtlinearitäten**. Bei der

**physikalischen Nichtlinearität** wird die Annahme „linear-elastisches Werkstoffverhalten“ aufgegeben und das Plastizieren von Tragwerksteilen berücksichtigt, weil dann wirtschaftlichere, d. h. leichtere Konstruktionen ausgeführt werden können. Sofern das Plastizieren nur bei der Tragfähigkeit der Querschnitte ausgenutzt wird, ist diese Vorgehensweise dem **Nachweisverfahren Elastisch-Plastisch** in Tabelle 1.1 zuzuordnen. Die Schnittgrößen werden nach der Elastizitätstheorie berechnet („elastische“ Systemberechnung) und maximal ein Lastzustand zugelassen, bei dem sich **ein** Fließgelenk bildet. Im Gegensatz dazu werden beim **Nachweisverfahren Plastisch-Plastisch** plastische Tragfähigkeiten der Querschnitte und des Systems ausgenutzt, d. h. es wird die Ausbreitung von Fließzonen oder die Ausbildung mehrerer Fließgelenke zugelassen. Während das physikalisch nichtlineare Werkstoffverhalten überwiegend aus wirtschaftlichen Gründen berücksichtigt wird, muss die **geometrische Nichtlinearität** bei stabilitätsgefährdeten Stahlkonstruktionen unter Sicherheitsaspekten unabdingbar erfasst werden. Relativ große Verformungen führen dabei zu größeren Schnittgrößen und höheren Beanspruchungen im Vergleich zu linearen Berechnungen, so dass Nachweise zum Biegeknicken, Biegedrillknicken oder Plattenbeulen geführt werden müssen.

Im Zusammenhang mit geometrisch nichtlinearen Berechnungen ist zu erwähnen, dass die Nachweise in den geltenden Vorschriften, wie z. B. DIN 18800 Teil 2, auf einer Linearisierung nach Theorie II. Ordnung basieren. Diese Näherung ist daher die Grundlage für die vorschriftengerechte Ermittlung von Verformungen, Schnittgrößen und Verzweigungslasten (Eigenwerten). In der Regel sind Berechnungen nach Theorie II. Ordnung im Hinblick auf baupraktische Anwendungsfälle ausreichend genau, da die Verformungen bei Tragwerken aus Stahl normalerweise relativ klein sind. In seltenen Ausnahmefällen können jedoch auch genaue geometrisch nichtlineare Berechnungen erforderlich sein. Dies ist immer dann der Fall, wenn große oder sogar sehr große Verformungen auftreten. Beispiele dazu sind Kunstwerke, die sich im Wind bewegen und bei denen sich die Einzelteile stark durchbiegen.

Zusammenfassend soll hier Folgendes festgehalten werden:

- Nach wie vor wird das *Nachweisverfahren Elastisch-Elastisch* am häufigsten verwendet, s. Tabelle 1.1. Für die Systemberechnungen wird dabei linear-elastisches Werkstoffverhalten angenommen, auf dieser Grundlage Schnittgrößen und Spannungen ermittelt und dann Spannungsnachweise geführt.
- Vermehrt kommt auch das *Nachweisverfahren Elastisch-Plastisch* zum Einsatz, bei dem die Tragfähigkeit bis zum Erreichen des ersten Fließgelenkes gesteigert werden kann.
- Bei stabilitätsgefährdeten Stahlkonstruktionen wird das geometrisch nichtlineare Problem linearisiert und die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung berechnet. Diese Linearisierung wird auch bei der Ermittlung von Verzweigungslasten (Eigenwerten) verwendet.

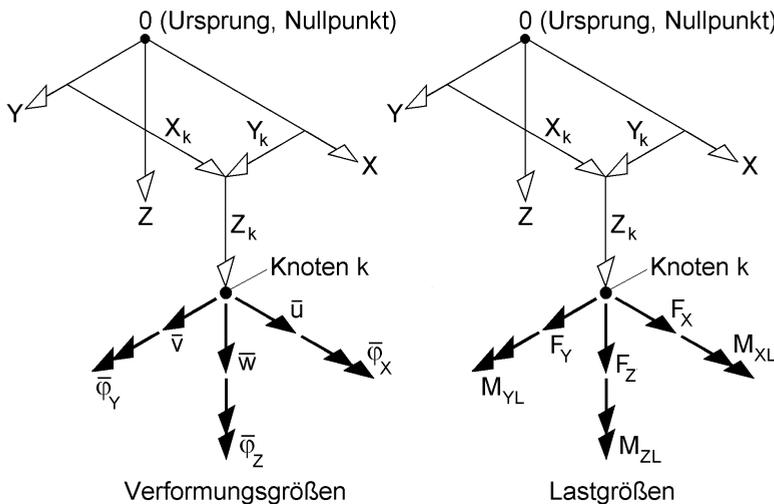
## 1.5 Bezeichnungen und Annahmen

Im Folgenden werden Bezeichnungen und Annahmen zusammengestellt, die für **Stabtragwerke** benötigt werden. Teilweise gelten sie auch für Flächentragwerke und die FE-Untersuchung von Querschnitten. Zu diesen Themen werden in den Kapiteln 6 und 7 weitere Bezeichnungen und Annahmen ergänzt. Grundlage für die Bezeichnungen sind DIN 1080 und DIN 18800.

### Größen im globalen X-Y-Z-Koordinatensystem

Stabtragwerke werden in Stabelemente eingeteilt, die in den **Knoten** miteinander verbunden sind. Gemäß Bild 1.2 können auch innerhalb der Stabelemente Knoten angeordnet werden (Zwischenknoten). Knoten werden im globalen X-Y-Z-Koordinatensystem (KOS) durch ihre Koordinaten  $X_k$ ,  $Y_k$  und  $Z_k$  gemäß Bild 1.4 definiert. Darüber hinaus werden auf dieses KOS alle globalen Verformungs- und Lastgrößen in den Knoten bezogen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist der Index  $k$  bei diesen Größen in Bild 1.4 weggelassen worden.

Die Verformungsgrößen im **globalen KOS** werden durch einen **Querstrich** gekennzeichnet, der über den Größen steht. Dieser Querstrich wird auch bei Vektoren und Matrizen verwendet, sofern sie für das globale KOS gelten.

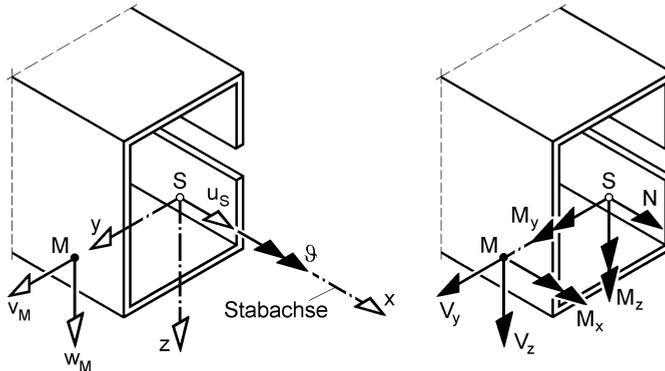


**Bild 1.4** Definition von Verformungs- und Lastgrößen im globalen X-Y-Z-Koordinatensystem

## Größen in lokalen x-y-z-Koordinatensystemen

### Koordinaten, Ordinaten und Bezugspunkte

x	Stablängsrichtung im lokalen KOS
y, z	Hauptachsen in der Querschnittsebene (lokales KOS)
$\omega$	normierte Wölbordinate
S	Schwerpunkt
M	Schubmittelpunkt



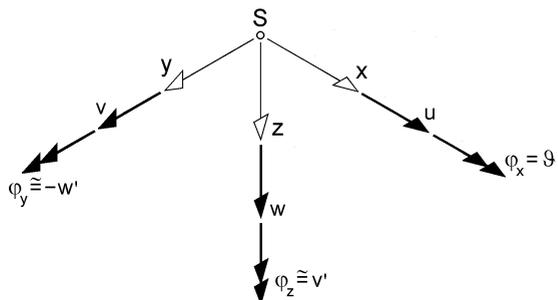
Stabachse x, Hauptachsen y und z, Schwerpunkt S, Schubmittelpunkt M

**Bild 1.5** Stab im lokalen Koordinatensystem mit Verschiebungs- und Schnittgrößen

Stabelemente werden auf lokale x-y-z-KOS bezogen und als Stabachse die x-Achse durch den Schwerpunkt S definiert. Die Achsen y und z sind die Hauptachsen des Querschnitts. Gemäß Bild 1.5 werden einige Verschiebungs- und Schnittgrößen auf den Schwerpunkt S und andere auf den Schubmittelpunkt M ( $y = y_M$ ,  $z = z_M$ ) bezogen. Für die Wölbkrafttorsion wird eine normierte Wölbordinate  $\omega$  verwendet.

### Verschiebungsgrößen

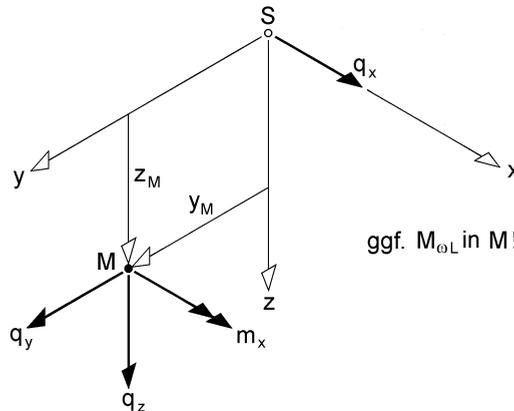
u, v, w	Verschiebungen in x-, y- und z-Richtung (lokales KOS)
$\varphi_x = \vartheta$	Verdrehung um die x-Achse
$\varphi_y \cong -w'$	Verdrehung um die y-Achse
$\varphi_z \cong v'$	Verdrehung um die z-Achse
$\psi \cong \vartheta'$	Verdrillung der x-Achse



**Bild 1.6** Definition positiver Verschiebungsgrößen im lokalen KOS

## Lastgrößen

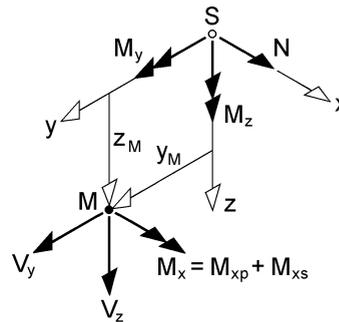
$q_x, q_y, q_z$	Gleichstreckenlasten
$m_x$	Streckentorsionsmoment (konstant)
$M_{\omega L}$	Lastwölbmoment



**Bild 1.7** Positive Wirkungsrichtungen und Angriffspunkte der lokalen Lastgrößen

## Schnittgrößen

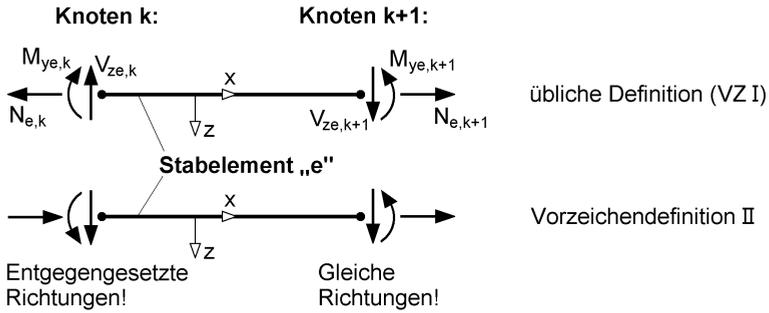
$N$	Längskraft, Normalkraft
$V_y, V_z$	Querkräfte
$M_y, M_z$	Biegemomente
$M_x$	Torsionsmoment
$M_{xp}, M_{xs}$	primäres und sekundäres Torsionsmoment
$M_{\omega}$	Wölbmoment
$M_{rr}$	siehe Tabelle 4.1
Index el:	Grenzschnittgrößen nach der Elastizitätstheorie
Index pl:	Grenzschnittgrößen nach der Plastizitätstheorie
Index d:	Bemessungswert ( <b>design</b> )



zusätzliche Schnittgröße  $M_{\omega}$  in M!

**Bild 1.8** Schnittgrößen an der positiven Schnittfläche eines Stabes

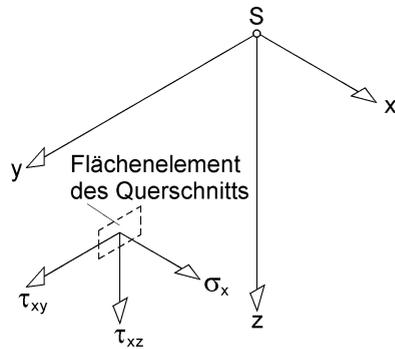
Bei der üblichen Definition positiver Schnittgrößen (*Schnittgrößendefinition I*) haben die Schnittgrößen an der **negativen Schnittfläche** Wirkungsrichtungen, die zu den in Bild 1.8 festgelegten Richtungen entgegengesetzt sind. Bei der **Schnittgrößendefinition II** sind die Wirkungsrichtungen an **beiden Schnittflächen** wie in Bild 1.8 definiert. Die beiden Schnittgrößendefinitionen sind in Bild 1.9 für einachsige Biegung mit Normalkraft an einem Stabelement dargestellt. Dabei werden, wie bei der FEM üblich, zur Unterscheidung der Stabelemente und Knoten weitere Indizes verwendet.



**Bild 1.9** Schnittgrößen am Stabelement „e“ für einachsige Biegung mit Normalkraft und Schnittgrößendefinitionen I und II

**Spannungen**

- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  Normalspannungen
- $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  Schubspannungen
- $\sigma_v$  Vergleichsspannung



**Bild 1.10** Spannungen an der positiven Schnittfläche eines Stabes

**Querschnittskennwerte**

- A Fläche
- $I_y, I_z$  Hauptträgheitsmomente
- $I_\omega$  Wölbwiderstand
- $I_T$  Torsionsträgheitsmoment
- $W_y, W_z$  Widerstandsmomente
- $S_y, S_z$  statische Momente
- $i_M, r_y, r_z, r_\omega$  Größen für Theorie II. Ordnung und Stabilität, s. Tabelle 4.1

$$i_p = \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A}} \text{ polarer Trägheitsradius}$$

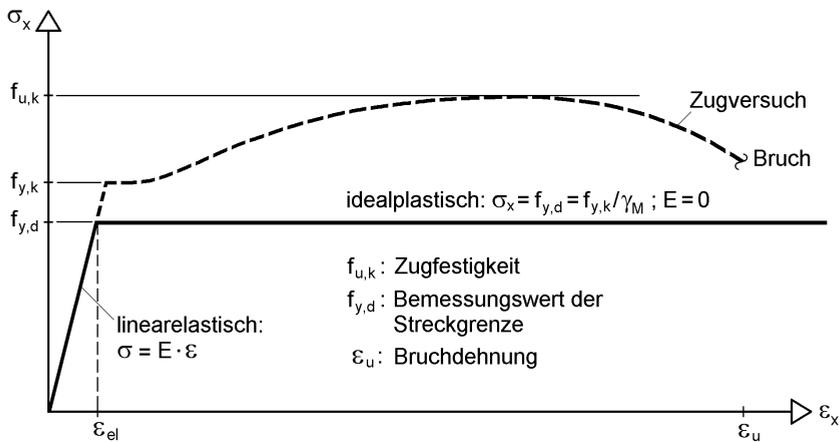
## Weitere Bezeichnungen und Annahmen

### Werkstoffkennwerte (isotroper Werkstoff)

$E$	Elastizitätsmodul
$G$	Schubmodul
$\nu$	Querkontraktion, <i>Poissonsche Zahl</i>
$f_y$	Streckgrenze
$f_u$	Zugfestigkeit
$\varepsilon_u$	Bruchdehnung

### Teilsicherheitsbeiwerte

$\gamma_M$	Beiwert für die Widerstandsgrößen ( <b>material</b> )
$\gamma_F$	Beiwert für die Einwirkungen ( <b>force</b> )



**Bild 1.11** Annahmen für das Werkstoffverhalten

## Matrizen und Vektoren

$\underline{s}$	Schnittgrößenvektor
$\underline{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{G}$	geometrische Steifigkeitsmatrix
$\underline{v}$	Verformungsgrößenvektor
$\underline{p}$	Lastgrößenvektor
Index e:	Element

Ein Querstrich über den Matrizen und Vektoren weist daraufhin, dass sie für das globale Koordinatensystem (X, Y, Z) gelten.

Sofern nicht anders angegeben, gelten folgende **Annahmen** und **Voraussetzungen**:

- Es wird ein linear-idealplastisches *Werkstoffverhalten* gemäß Bild 1.11 vorausgesetzt.
- Auftretende Verformungen sind im Sinne der Stabtheorie klein, so dass geometrische Beziehungen linearisiert werden können.
- Die Querschnittsform eines Stabes bleibt bei Belastung und Verformung erhalten.
- Für zweiachsige Biegung mit Normalkraft wird die *Bernoulli-Hypothese* vom Ebenbleiben der Querschnitte vorausgesetzt und der Einfluss von Schubspannungen infolge von Querkräften auf die Verformungen vernachlässigt (schubstarre Stäbe).
- Bei der Wölbkrafttorsion wird die *Wagner-Hypothese* vorausgesetzt und der Einfluss von Schubspannungen infolge des sekundären Torsionsmomentes auf die Verdrehung vernachlässigt.

## 1.6 Grundlegende Beziehungen

### Verschiebungen (lineare Stabtheorie)

Wie bei Stäben allgemein üblich sind  $y$  und  $z$  die Hauptachsen des Querschnitts und  $\omega$  ist die normierte Wölbordinate, [27]. Die Längsverschiebung  $u_S$  bezieht sich auf den Schwerpunkt  $S$  und die Verschiebungen  $v_M$  sowie  $w_M$  beschreiben die Verschiebung des Schubmittelpunktes  $M$ . Für die Stablängsverschiebung  $u$  eines beliebigen Querschnittspunktes gilt folgende Beziehung:

$$u = u_S - y \cdot \varphi_z + z \cdot \varphi_y - \omega \cdot \psi \quad (1.1)$$

Der erste Anteil ist die Verschiebung infolge einer Normalkraftbeanspruchung, der zweite und dritte resultiert aus den Biegemomenten und stellt die Verschiebung aufgrund von Querschnittsverdrehungen  $\varphi_y$  und  $\varphi_z$  dar. Dabei können mit Gl. (1.1) nur Verschiebungen erfasst werden, bei denen der Querschnitt eben bleibt. Der vierte Anteil erfasst die Stablängsverschiebung aus Torsionsbeanspruchungen in Abhängigkeit von der Verdrillung  $\psi$ .

Die Verformungen  $v$  und  $w$  in der Querschnittsebene ergeben sich aus der Verschiebung des Schubmittelpunktes  $M$  sowie aus zusätzlichen Verschiebungsanteilen, die aus der Verdrehung  $\vartheta$  resultieren:

$$v = v_M - (z - z_M) \cdot \vartheta \quad (1.2)$$

$$w = w_M + (y - y_M) \cdot \vartheta \quad (1.3)$$

## Verzerrungen

Die Verzerrungen werden durch geometrische Beziehungen mit den Verschiebungsgrößen verknüpft. Nach [27] gelten für die lineare Stabtheorie die nachstehenden Beziehungen, wobei für die Verschiebungen die Gln. (1.1) bis (1.3) berücksichtigt werden. Außerdem gilt mit der Vernachlässigung sekundärer Schubverformungen  $v'_M = \varphi_z$ ,  $w'_M = -\varphi_y$  und  $\psi = \vartheta'$ .

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u'_S - y \cdot \varphi'_z + z \cdot \varphi'_y - \omega \cdot \vartheta'' \quad (1.4a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.4b, c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[ -(z - z_M) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \cdot \vartheta' \quad (1.4d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[ (y - y_M) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \cdot \vartheta' \quad (1.4e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\vartheta + \vartheta = 0 \quad (1.4f)$$

## Werkstoffgesetz und Spannungen

Mit dem *Werkstoffgesetz* wird der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen beschrieben. Unter Vernachlässigung der Querdehnungen ergeben sich mit dem *Hookeschen Gesetz*, also dem Materialgesetz für isotropes, linearelastisches *Werkstoffverhalten*, und den Verzerrungen der Gln. (1.4) folgende Spannungen:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \left( u'_S - y \cdot \varphi'_z + z \cdot \varphi'_y - \omega \cdot \vartheta'' \right) \quad (1.5)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \left[ -(z - z_M) - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \cdot \vartheta' \quad (1.6)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot \left[ (y - y_M) - \frac{\partial \omega}{\partial z} \right] \cdot \vartheta' \quad (1.7)$$

## Schnittgrößen

Die Spannungen können zu resultierenden Schnittgrößen zusammengefasst werden. Dabei ist zu beachten, dass die Normalkraft und die Biegemomente im Schwerpunkt angreifen, während die Querkräfte, die Torsionsmomente und das Wölbmoment im Schubmittelpunkt wirken, vgl. Bild 1.8.

**Tabelle 1.2** Schnittgrößen als Resultierende der Spannungen

Bedingung	Schnittgröße	Definition
$\sum F_x = 0$ :	Normalkraft	$N = \int_A \sigma_x \cdot dA$
$\sum V_y = 0$ :	Querkraft	$V_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA$
$\sum V_z = 0$ :	Querkraft	$V_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA$
$\sum M_x = 0$ :	Torsionsmoment	$M_x = \int_A [\tau_{xz} \cdot (y - y_M) - \tau_{xy} \cdot (z - z_M)] \cdot dA$ $M_x = M_{xp} + M_{xs}$
$\sum M_y = 0$ :	Biegemoment	$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA$
$\sum M_z = 0$ :	Biegemoment	$M_z = - \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$
	Wölbmoment	$M_\omega = \int_A \sigma_x \cdot \omega \cdot dA$

### Aufteilung der linearen Theorie schubstarrer Stäbe in vier Teilprobleme

In Tabelle 1.3 sind vier Teilprobleme - zweiachsige Biegung mit Normalkraft und Wölbkrafttorsion - der linearen Theorie schubstarrer Stäbe zusammengestellt. Die Tabelle enthält eine Zuordnung der Lastgrößen, Verformungen und Schnittgrößen sowie Angaben zum Gleichgewicht am Stabelement und zur Normalspannung  $\sigma_x$ .

**Tabelle 1.3** Aufteilung der linearen Stabtheorie nach [27]

	„Normal- kraft“	„Biegung um die z-Achse“	„Biegung um die y-Achse“	„Torsion“
Lastgrößen	$q_x; F_x$	$q_y; F_y; M_{zL}$	$q_z; F_z; M_{yL}$	$m_x; M_{xL}; M_{\omega L}$
Verfor- mungen	$u = u_S$	$v = v_M$ $u = -y \cdot v'_M$	$w = w_M$ $u = -z \cdot w'_M$	$\vartheta$ $u = -\omega \cdot \vartheta'$ $v = -(z - z_M) \cdot \vartheta$ $w = (y - y_M) \cdot \vartheta$
Schnitt- größen	$N$	$M_z$ $V_y$	$M_y$ $V_z$	$M_\omega$ $M_x = M_{xp} + M_{xs}$
Gleich- gewicht	$N' = -q_x$	$M'_z = -V_y$ $V'_y = -q_y$	$M'_y = V_z$ $V'_z = -q_z$	$M'_\omega = M_{xs}$ $M'_x = -m_x$
$\sigma_x =$	$\frac{N}{A}$ $= E \cdot u'_S$	$-\frac{M_z}{I_z} \cdot y$ $= -E \cdot y \cdot v''_M$	$\frac{M_y}{I_y} \cdot z$ $= -E \cdot z \cdot w''_M$	$\frac{M_\omega}{I_\omega} \cdot \omega$ $= -E \cdot \omega \cdot \vartheta''$

## 1.7 EDV-Programme

Für die Berechnungsbeispiele in dem vorliegenden Buch und für ergänzende Untersuchungen wurden im Wesentlichen folgende Programme angewendet:

- KSTAB
- FE-Rahmen
- Beulen
- QSW-FE
- QSW-FE ML

Hierbei handelt es sich um lehrstuhleigene Programme des Lehrstuhls für Stahl- und Verbundbau der Ruhr-Universität Bochum. Informationen zu *KSTAB*, *FE-Rahmen*, *Beulen* und einer Vielzahl weiterer Programme können [31] entnommen werden, s. a. [www.ruhr-uni-bochum.de/stahlbau](http://www.ruhr-uni-bochum.de/stahlbau). Für Hinweise zu den Programmen *QSW-FE* und *QSW-FE ML* wird auf [51] verwiesen.

Zu Vergleichszwecken und für weiterführende Untersuchungen sind auch Berechnungen mit den folgenden Programmen durchgeführt worden:

- RSTAB                    Ing.-Software Dlubal GmbH, Tiefenbach
- RFEM                    Ing.-Software Dlubal GmbH, Tiefenbach
- SUSI                    CSI GmbH, Dortmund
- BT II                    Friedrich + Lochner GmbH, Stuttgart
- ESK                    Friedrich + Lochner GmbH, Stuttgart
- DRILL                   FIDES DV-Partner GmbH, München
- ABAQUS                ABAQUS, Inc., Providence, Rhode Island, USA
- ANSYS                   ANSYS, Inc., Canonsburg, Pennsylvania, USA