

LERNEN EINFACH GEMACHT



3. Auflage

# Quantenmechanik

für  
**dummies**<sup>®</sup>



Mathematische  
Grundlagen:  
Mit Vektoren, Operatoren  
und Matrizen hantieren

Das Energieniveau von einzelnen  
gebundenen Teilchen vorhersagen

Dreidimensionale Probleme  
und Vielteilchensysteme  
bearbeiten

**Steven Holzner**

# Quantenmechanik für Dummies

## Schummelseite

---

### DER HAMILTON-OPERATOR

Eine der wichtigsten Aufgaben der Quantenmechanik ist die Berechnung der Energieniveaus eines Systems. Der Energieoperator, der auch Hamilton-Operator genannt wird, liefert die Gesamtenergie. Das Auffinden der Energieniveaus eines Systems reduziert sich darauf, die Eigenwerte folgender Gleichung zu finden:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

In Matrixform lautet diese Gleichung:

$$\det \begin{pmatrix} H_{11} - E & H_{12} & H_{13} & H_{14} & \dots \\ H_{21} & H_{22} - E & H_{23} & H_{24} & \dots \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} - E & H_{34} & \dots \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} - E & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = 0$$

### DIE HEISENBERG'SCHE UNSCHÄRFERELATION

Die Heisenberg'sche Unschärferelation besagt: Je genauer man den Ort eines Teilchens kennt, desto weniger genau kennt man seinen Impuls und umgekehrt. In x-Richtung sieht das zum Beispiel wie folgt aus:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

wobei  $\Delta x$  die Messunschärfe der Position eines Teilchens in x-Richtung ist,  $\Delta p_x$  die Unschärfe des Impulses in x-Richtung und  $\hbar = h/2\pi$ .

Dies gilt ebenso für die anderen beiden Raumrichtungen:

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

## DIE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG

Die Schrödinger-Gleichung beschreibt die Energien und wahrscheinlichen Aufenthaltsorte von Elektronen. Die Quantenmechanik in diesem Buch beschäftigt sich vor allem damit, diese Differenzialgleichung für verschiedene Potentiale  $V(r)$  zu lösen:

$$H\psi(r) = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta\psi(r) + V(r)\psi(r) = E\psi(r)$$

## DIE SCHRÖDINGER-GLEICHUNG IN DREI DIMENSIONEN

$$\psi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (\text{Separationsansatz})$$

$$\Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X(x) + V_x(x)X(x) = E_x X(x)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} Y(y) + V_y(y)Y(y) = E_y Y(y)$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z(z) + V_z(z)Z(z) = E_z Z(z)$$

## SPINOPERATOREN UND IHRE KOMMUTATOREN

Die Kommutatoren-Beziehungen für die Drehimpulsoperatoren  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$  lauten wie folgt:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

Zu allen Drehimpulsoperatoren wie etwa  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$  gibt es analoge Spinoperatoren:  $S_x$ ,  $S_y$  und  $S_z$ . Die Kommutatoren-Beziehungen lauten entsprechend:

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$$

$$[S_y, S_z] = i\hbar S_x$$

$$[S_z, S_x] = i\hbar S_y$$

## DER COMPTON-EFFEKT

Wenn das Licht durch Photonen der Energie  $E = h\nu$  und den Impuls  $p = E/c$  dargestellt wird, lautet die Beziehung für die Wellenlängenverschiebung beim Compton-Effekt:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \lambda_C (1 - \cos \theta)$$

Dabei ist  $h$  die Planck'sche Konstante ( $6,6256 \cdot 10^{-34}$  Js),  $m_e$  die Masse eines Elektrons ( $9,11 \cdot 10^{-31}$  kg),  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ( $2,998 \cdot 10^8$  m/s),  $\theta$  der Streuwinkel und  $\lambda_C = h/m_e c$  die Compton-Wellenlänge.

Manchmal wird diese Gleichung auch wie folgt geschrieben:

$$\Delta\lambda = 4\pi\lambda_C \sin^2(\theta/2)$$



Steven Holzner

# Quantenmechanik für **dummies**<sup>®</sup>

**3. Auflage**

Übersetzung aus dem Amerikanischen  
von Regine Freudenstein unter Mitarbeit  
von Wilhelm Kulisch

Fachkorrektur und Bearbeitung durch  
Matthias Delbrück und Bernhard Gierl

**WILEY**

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

## **Quantenmechanik für Dummies**

### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

3. Auflage 2020

© 2020 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

Die 1. und 2. Auflage dieses Buchs erschienen unter dem Titel »Quantenphysik für Dummies«.

Original English language edition Quantum Physics For Dummies © 2013 by Wiley Publishing, Inc. All rights reserved including the right of reproduction in whole or in part in any form. This translation published by arrangement with John Wiley and Sons, Inc.

Copyright der englischsprachigen Originalausgabe Quantum Physics For Dummies © 2013 by Wiley Publishing, Inc. Alle Rechte vorbehalten inklusive des Rechtes auf Reproduktion im Ganzen oder in Teilen und in jeglicher Form. Diese Übersetzung wird mit Genehmigung von John Wiley and Sons, Inc. publiziert.

Wiley, the Wiley logo, Für Dummies, the Dummies Man logo, and related trademarks and trade dress are trademarks or registered trademarks of John Wiley & Sons, Inc. and/or its affiliates, in the United States and other countries. Used by permission.

Wiley, die Bezeichnung »Für Dummies«, das Dummies-Mann-Logo und darauf bezogene Gestaltungen sind Marken oder eingetragene Marken von John Wiley & Sons, Inc., USA, Deutschland und in anderen Ländern.

Das vorliegende Werk wurde sorgfältig erarbeitet.  
Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die  
Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen  
sowie eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Print ISBN: 978-3-527-71732-3

ePub ISBN: 978-3-527-82711-4

Coverfoto: © kseniyaomega - [stock.adobe.com](https://stock.adobe.com)

Korrektur: Birgit Volk, Bonn

# Über den Autor

---

Steven Holzner ist preisgekrönter Autor wissenschaftlicher und technischer Bücher (zum Beispiel *Physik für Dummies* und *Differenzialgleichungen für Dummies*). Er studierte Physik am Massachusetts Institute for Technology (MIT) und promovierte an der Cornell University. Er unterrichtete mehr als zehn Jahre lang an der Cornell und an Unternehmen überall in den Vereinigten Staaten.

## ***Widmung***

Für Nancy natürlich.

# Inhaltsverzeichnis

## Cover

## Über den Autor

Widmung

## Einleitung

Über dieses Buch

Festlegungen in diesem Buch

Törichte Annahmen über den Leser

Aufbau dieses Buchs

Symbole in diesem Buch

Wie geht es weiter?

## Teil I: Ist die Welt nicht klein? Die Grundlagen

### Kapitel 1: Entdeckungen und wesentliche Grundlagen der Quantenmechanik

Wie alles begann: Der Ärger mit der Strahlung schwarzer Körper

Stück für Stück: Licht als Teilchen

Eine doppelte Identität: Die Wellennatur von Teilchen

Man kann nicht alles wissen (aber die Wahrscheinlichkeiten berechnen)

Die Heisenberg'sche Unschärferelation

Die Würfel rollen: Quantenmechanik und Wahrscheinlichkeiten

### Kapitel 2: Eine ganz neue Welt: Die Quantenmechanik

Was ist Quantenmechanik?

Die Schrödinger-Gleichung und die Wellenfunktion

Zustände und Wahrscheinlichkeiten in der Quantenmechanik

Die Darstellungsweise

Die Lösung quantenmechanischer Probleme

Die Quantenmechanik und die folgenden Kapitel

## **Kapitel 3: Willkommen in der Matrix: Zustände und Operatoren**

Vektoren im Hilbert-Raum

Mit Dirac wird das Leben einfacher

Sie bringen die Physik ins Spiel: Operatoren

Adjungierte und hermitesche Operatoren

Tauschen für Fortgeschrittene: Kommutatoren

Bei null starten und bei Heisenberg enden

Eigenvektoren und Eigenwerte: Natürlich sind sie eigenartig!

Hin und wieder zurück: Inverse und unitäre Operatoren

Vergleich zwischen Matrix- und kontinuierlicher Darstellung

## **Teil II: Gebunden, aber unbestimmt: Teilchen in gebundenen Zuständen**

### **Kapitel 4: Ein Blick in den Potenzialtopf**

Gefangen zwischen 0 und  $a$

Endlich tiefe Potenzialtöpfe

Gebundene Teilchen in unendlichen rechteckigen Potenzialtöpfen

Endliches Potenzial: Jetzt wird es interessant

Mit dem Teilchen durch die Wand

Die Lösung der Schrödinger-Gleichung für ungebundene Teilchen

Das Wichtigste von Kapitel 4 noch einmal in Kürze

### **Kapitel 5: Immer hin und her mit dem harmonischen Oszillator**

Die Schrödinger-Gleichung für den harmonischen Oszillator

Harmonisch schwingende Matrizen

Klassische und quantenmechanische Oszillatoren

Das Wichtigste von Kapitel 5 noch einmal in Kürze

## **Teil III: Alles dreht sich: Drehimpulse und Spin**

### **Kapitel 6: Drehimpuls auf Quantenniveau**

Quantisiertes Kreisen

Die Kommutatoren von  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$

Die Eigenzustände des Drehimpulses

Die Eigenwerte des Drehimpulses

Die Eigenwerte von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Drehimpuls und Matrixdarstellung

Eine runde Sache: Übergang zu Kugelkoordinaten

Das Wichtigste von Kapitel 6 noch einmal in Kürze

### **Kapitel 7: Die spinnen, die Quanten ...**

Der Stern-Gerlach-Versuch und der fehlende Strahl

Der Spin und seine (Eigen-)Zustände

Halbe und Ganze: Fermionen und Bosonen

Spinoperatoren: Es wird formal

Spin-1/2-Teilchen und Pauli-Matrizen

Das Wichtigste von Kapitel 7 noch einmal in Kürze

## **Teil IV: Die dritte Dimension**

### **Kapitel 8: Mit Ecken und Kanten: 3D-Probleme in rechtwinkligen Koordinaten lösen**

Die Schrödinger-Gleichung: Jetzt in 3D-Qualität!

Freie Teilchen im Raum

Dreidimensionale Kästen

Der dreidimensionale harmonische Oszillator

Das Wichtigste von Kapitel 8 noch einmal in Kürze

### **Kapitel 9: Zum Kugeln: 3D in sphärischen Koordinaten**

Zentralpotenziale im Dreidimensionalen

Freie Teilchen im Dreidimensionalen in Kugelkoordinaten

Das sphärisch symmetrische »Kasten«-Potential

Das Wichtigste von Kapitel 9 noch einmal in Kürze

## **Kapitel 10: Die Krönung: Berechnung des Wasserstoffatoms**

Die Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom

Vereinfachung und Separation

Die Lösung für  $\psi(R)$ .

Die Lösung für  $\psi(r)$ .

Die Energieentartung beim Wasserstoffatom

Catch me, if you can: Der Aufenthaltsort des Elektrons

Das Wichtigste von Kapitel 10 noch einmal in Kürze

## **Teil V: Immer was los mit vielen Teilchen**

### **Kapitel 11: Viele identische Teilchen**

Vielteilchensysteme im Allgemeinen

Ein äußerst hilfreiches Werkzeug: Austauschsymmetrie

Systeme mit unterscheidbaren Teilchen

Mit identischen Teilchen jonglieren

Wellenfunktionen symmetrisch oder antisymmetrisch machen

Besetzt! – Das Pauli-Prinzip

Das Periodensystem der Elemente

Das Wichtigste von Kapitel 11 noch einmal in Kürze

### **Kapitel 12: Nah dran: Störungstheorie**

Die zeitunabhängige Störungstheorie

Störungstheorie für nicht entartete Ausgangszustände

Die Störungstheorie im Test: Harmonische Oszillatoren in elektrischen Feldern

Störungstheorie für entartete Hamilton-Operatoren

Test der entarteten Störungstheorie: Wasserstoff in elektrischen Feldern

Das Wichtigste von Kapitel 12 noch einmal in Kürze

### **Kapitel 13: Treffen sich zwei Teilchen: Streutheorie**

Teilchenstreuung und Wirkungsquerschnitt

[Schwerpunktsystem oder Laborsystem?](#)  
[Die Streuamplitude von spinlosen Teilchen](#)  
[Die Wellenfunktion des einfallenden Teilchens](#)  
[Die Wellenfunktion des gestreuten Teilchens](#)  
[Rettung der Wellengleichung: Die Born'sche Näherung:](#)  
[Das Wichtigste von Kapitel 13 noch einmal in Kürze](#)

## **Teil VI: Der Top-Ten-Teil**

### **Kapitel 14: Zehn Webseiten zur Quantenmechanik**

[Elektronen und Photonen aus Ulm](#)  
[Quanten.de](#)  
[Joachims Quantenwelt](#)  
[Visual Quantum Mechanics](#)  
[HydrogenLab](#)  
[MILQ](#)  
[Physik multimedial](#)  
[Quantum Mechanics Tutorial](#)  
[Leifi Physik](#)  
[HyperPhysics](#)

### **Kapitel 15: Zehn Highlights der Quantenmechanik**

[Welle-Teilchen-Dualismus](#)  
[Der photoelektrische Effekt](#)  
[Entdeckung des Spins](#)  
[Unterschiede zwischen den Newton'schen Gesetzen und der Quantenmechanik](#)  
[Die Heisenberg'sche Unschärferelation](#)  
[Der Tunneleffekt](#)  
[Diskrete Atomspektren](#)  
[Der harmonische Oszillator](#)  
[Potenzialtöpfe](#)  
[Schrödingers Katze](#)

## **Glossar**

Stichwortverzeichnis  
End User License Agreement

# Illustrationsverzeichnis

## Kapitel 1

[Abbildung 1.1: Ein Hohlraum mit sehr kleinem Loch ist ein so gut wi...](#)

[Abbildung 1.2: Zwei Ansätze für das Spektrum eines schwarzen Körper...](#)

[Abbildung 1.3: Der photoelektrische Effekt](#)

[Abbildung 1.4: Kinetische Energie  \$E\_{\text{kin}}\$  der emittierten Elektronen a...](#)

[Abbildung 1.5: Licht fällt auf ein ruhendes Elektron](#)

[Abbildung 1.6: Photonenstreuung an einem Elektron](#)

[Abbildung 1.7: Ein Elektronenstrahl passiert eine Doppelspaltanordn...](#)

## Kapitel 2

[Abbildung 2.1: a\) Potenzialtopf, b\) Potenzialstufe, c\) Potenzialbar...](#)

[Abbildung 2.2: Rechtwinklige Koordinaten \(links\) und Kugelkoordinat...](#)

## Kapitel 4

[Abbildung 4.1: Ein rechteckiger Potenzialtopf](#)

[Abbildung 4.2: Ein anderer Potenzialtopf](#)

[Abbildung 4.3: Wellenfunktionen in einem unendlichen rechteckigen P...](#)

[Abbildung 4.4: Eine Potenzialstufe, wenn die Teilchenenergie  \$E > V\_0\$](#)

[Abbildung 4.5:  \$|\psi\(r\)|^2\$  für eine Potenzialstufe mit  \$E > V\_0\$](#)

[Abbildung 4.6: Eine Potenzialstufe mit  \$E < V\_0\$](#)

[Abbildung 4.7:  \$|\psi\(r\)|^2\$  für eine Potenzialstufe mit  \$E < V\_0\$](#)

[Abbildung 4.8: Eine Potenzialbarriere mit  \$E > V\_0\$](#)

[Abbildung 4.9:  \$|\psi\(r\)|^2\$  für eine Potenzialbarriere mit  \$E > V\_0\$](#)

[Abbildung 4.10: Eine Potenzialbarriere mit  \$E < V\_0\$](#)

[Abbildung 4.11:  \$|\psi\(x\)|^2\$  für eine Potenzialbarriere mit  \$E < V\_0\$](#)

[Abbildung 4.12: Ein Gauß'sches Wellenpaket](#)

## **Kapitel 5**

[Abbildung 5.1: Der Grundzustand eines quantenmechanischen harmonisc...](#)

[Abbildung 5.2: Der erste angeregte Zustand eines quantenmechanische...](#)

[Abbildung 5.3: Der zweite angeregte Zustand eines quantenmechanisch...](#)

[Abbildung 5.4: Ein Proton in harmonischer Oszillation](#)

[Abbildung 5.5: Vergleich von klassischem und quantenmechanischem ha...](#)

[Abbildung 5.6: Vergleich der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten von kl...](#)

## **Kapitel 6**

[Abbildung 6.1: Eine sich drehende Scheibe mit dem Drehimpulsvektor](#)

[Abbildung 6.2:  \$L\$  und  \$L\_z\$](#)

[Abbildung 6.3: Ein rotierendes zweiatomiges Molekül](#)

[Abbildung 6.4: Das Kugelkoordinatensystem](#)

## **Kapitel 7**

[Abbildung 7.1: Der Stern-Gerlach-Versuch](#)

[Abbildung 7.2: Betrag des Spins und seine Lage bezüglich der z-Achs...](#)

## **Kapitel 8**

[Abbildung 8.1: Ein freies Teilchen im Dreidimensionalen](#)

[Abbildung 8.2: Ein dreidimensionales Kastenpotenzial](#)

[Abbildung 8.3: Ein harmonischer Oszillator](#)

## **Kapitel 9**

[Abbildung 9.1: Das Kugelkoordinatensystem](#)

## **Kapitel 10**

[Abbildung 10.1: Das Wasserstoffatom](#)

[Abbildung 10.2: Die radiale Wellenfunktion  \$R\_{10}\(r\)\$](#)

[Abbildung 10.3: Die radiale Wellenfunktion  \$R\_{20}\(r\)\$](#)

[Abbildung 10.4: Die radiale Wellenfunktion  \$R\_{21}\(r\)\$](#)

[Abbildung 10.5: Der Zustand  \$|1,0,0\rangle\$](#)

[Abbildung 10.6: Der Zustand  \$|4,3,2\rangle\$](#)

[Abbildung 10.7: Der Zustand  \$|2,1,1\rangle\$](#)

## **Kapitel 11**

[Abbildung 11.1: Ein Vielteilchensystem](#)

[Abbildung 11.2: Ein Mehrelektronenatom](#)

[Abbildung 11.3: Zwei Elektronen sind zusammengestoßen ...](#)

[Abbildung 11.4: ... oder war es so?!](#)

## **Kapitel 12**

[Abbildung 12.1: Ein harmonischer Oszillator](#)

[Abbildung 12.2: Ein harmonischer Oszillator in einem elektrischen ...](#)

## **Kapitel 13**

[Abbildung 13.1: Streuung an einem Target](#)

[Abbildung 13.2: Streuung im Laborsystem](#)

# Einleitung

---

Die Physik kennt im Allgemeinen keine Grenzen, sie beschäftigt sich sowohl mit ungeheuer großen (zum Beispiel Galaxien) als auch mit winzig kleinen Objekten (Atomen oder noch viel kleineren Teilchen). Dieses Buch handelt von den sehr kleinen Teilchen – das ist das Reich der Quantenmechanik. In diesem Reich sind physikalische Größen *quantisiert*, eine weitere Unterteilung in kleinere Einheiten ist nicht möglich, es handelt sich um unteilbare (diskrete) Einheiten oder eben *Quanten*.

Die klassische Physik kann sehr erfolgreich Vorgänge erklären, wie das Erwärmen von Kaffeetassen, das Herunterrutschen von kostbaren Porzellanvasen auf schiefen Ebenen, Zusammenstöße von Autos und Tausende anderer ähnlicher Phänomene. Aber bei sehr kleinen Objekten treten Probleme auf. Die Quantenmechanik beschäftigt sich mit dieser Mikrowelt kleiner Objekte, wie etwa mit einzelnen Elektronen und ihren Bewegungen. Es stellte sich heraus, dass Elektronen sowohl Teilchen- als auch Welleneigenschaften besitzen, was Physiker früher sehr verunsichert hat. Man benötigt die Quantenphysik, um diese Erscheinungen zu verstehen.

Die Quantenphysik hat zudem das Unschärfeprinzip eingeführt, das besagt, dass man nicht gleichzeitig den Ort und den Impuls eines Teilchens (oder auch bestimmte andere Größenpaare) genau bestimmen kann. Sie ist zugleich in der Lage, die Energieniveaus von Elektronen, die an ein Atom gebunden sind, zu berechnen. Quantenphysik ist notwendig, wenn man die Realität im Bereich sehr kleiner Objekte verstehen will. Von diesen Themen handelt dieses Buch.

# *Über dieses Buch*

Unschärfen und Wahrscheinlichkeiten sind für die Quantenphysik äußerst wichtig, ebenso die Differenzialrechnung. In diesem Buch werden alle notwendigen Konzepte entwickelt. Allerdings macht es keinen Gebrauch von Gedankenexperimenten, die sich mit halb toten Katzen oder parallelen Universen beschäftigen. Vielmehr liegt der Schwerpunkt des Buches auf der Mathematik, die notwendig ist, um die Quantenwelt zu beschreiben.

Ich habe mehrere Tausend Studenten auf Universitätsniveau in Physik unterrichtet. Daher kenne ich auch die häufigste Klage dieser Studenten: Womit habe ich das verdient?

*Quantenphysik für Dummies* entspricht in etwa dem Niveau von einführenden Bachelor-Studienkursen, aber das Buch unterscheidet sich von üblichen Lehrbüchern. Es enthält all das, was man wissen sollte, aber nicht mehr. Darüber hinaus versuche ich zu vermitteln, wie Lehrer und Professoren vorgehen, um Probleme einfach erscheinen zu lassen.

Ich empfehle, dieses Buch vom Anfang bis zum Ende zu lesen, aber es ist natürlich auch möglich, sich besonders mit den Themen zu beschäftigen, die einen persönlich interessieren. Wie jedes *Für-Dummies*-Buch gibt auch dieses dem Leser alle Freiheiten. Man kann die Kapitel in jeder beliebigen Reihenfolge lesen. Dieses Buch wurde für Sie gemacht, und Sie dürfen sich aus dieser Schatzkiste der Quantenphysik bedienen, wie Sie wollen.

# ***Festlegungen in diesem Buch***

Es gibt viele Bücher, für die man ein Dutzend oder mehr verwirrende Festlegungen lernen muss, bevor man überhaupt mit dem Lesen beginnen kann. Dies ist hier nicht der Fall. Sie brauchen nur das Folgende zu wissen:

- ✓ Alle neuen Ausdrücke sind, wenn sie zum ersten Mal erscheinen, *kursiv* gedruckt. Normalerweise folgt anschließend ihre Definition.
- ✓ Vektoren – also Größen, die sowohl einen Betrag als auch eine Richtung besitzen – sind **fett** gedruckt, zum Beispiel ***B***.
- ✓ Internet-Adressen sind in Monofont-Schrift gedruckt.

# ***Törichte Annahmen über den Leser***

Ich gehe davon aus, dass Sie nichts oder kaum etwas über Quantenmechanik wissen, wenn Sie beginnen, dieses Buch zu lesen. Allerdings gehe ich von den folgenden Annahmen aus:

- ✓ Sie besuchen derzeit Unterricht oder eine Vorlesung über Quantenmechanik, oder Sie sind ganz allgemein daran interessiert, wie die Mathematik Bewegungen und Energien im atomaren oder subatomaren Bereich beschreibt.
- ✓ Sie haben mathematische Vorkenntnisse, insbesondere im Bereich der Differenzialrechnung. Sie müssen kein Profi sein, aber Sie sollten wissen, wie man integriert

und einfache Differenzialgleichungen löst. Im Idealfall kennen Sie sich sogar im Hilbert-Raum aus.

- ✓ Sie verfügen über physikalische Grundkenntnisse. Sie haben Physik in der Oberstufe oder im ersten Studienjahr an der Universität belegt (oder aber *Physik für Dummies* gelesen und verstanden).

## ***Aufbau dieses Buchs***

Die Quantenphysik – die Beschäftigung mit sehr kleinen Objekten – ist ein ziemlich umfangreiches Thema. Deshalb wird sie üblicherweise in eine Reihe von Teilgebieten unterteilt. Dementsprechend besteht dieses Buch aus den folgenden Teilen:

### ***Teil I: Ist die Welt nicht klein? Die Grundlagen***

Teil I ist der Start der Reise in die Quantenwelt und bietet einen guten Überblick über die Themen der Quantenphysik. Die Quantenphysik wird vorgestellt, ihre Möglichkeiten werden aufgezeigt, und es wird dargestellt, welche Problemstellungen sie lösen kann. Sie werden außerdem mit der für den Rest des Buches notwendigen Mathematik vertraut gemacht, etwa mit Zustandsvektoren und dem Umgang mit Quantenmatrizen. Wenn Sie diese Grundlagen beherrschen, sind Sie für die Teile II bis VI gut vorbereitet.

### ***Teil II: Gebunden, aber unbestimmt: Teilchen in gebundenen Zuständen***

Teilchen können innerhalb eines Potentials gefangen sein; zum Beispiel können Elektronen in einem Atom gebunden sein. Die Quantenphysik kann die Energieniveaus von Teilchen in verschiedenen

Potenzialen hervorragend bestimmen; davon handelt [Teil II](#). Sie werden unter anderem lernen, Teilchen zu beschreiben, die in Potenzialtöpfen und harmonischen Oszillatoren gebunden sind.

### ***Teil III: Schwindlig werden mit Drehimpuls und Spin***

Auch die Quantenphysik benutzt den Drehimpuls, um Rotationen von Teilchen zu beschreiben. Dazu kommt aber noch der geheimnisvolle Spin. Viele berühmte Experimente – wie etwa den Stern-Gerlach-Versuch, bei dem Teilchenstrahlen in Magnetfeldern aufgespalten werden – kann man nur auf der Grundlage der Quantenphysik verstehen. Alle Einzelheiten werden in diesem Teil vorgestellt.

### ***Teil IV: Die Quantenmechanik wird dreidimensional***

Die einleitenden Aufgabenstellungen in [Teil II](#) und [III](#) wurden eindimensional behandelt, um ihre Lösungen verständlicher zu machen. Im [Teil IV](#) werden dreidimensionale Aufgaben vorgestellt, sowohl im kartesischen (rechtwinkligen) als auch im Kugelkoordinatensystem. Dieser Übergang 1D → 3D erlaubt eine viel bessere Beschreibung der wirklichen Welt, die ja alles andere als eindimensional ist. Ein Paradebeispiel dafür ist die vollständige quantenmechanische Beschreibung des Wasserstoffatoms in [Kapitel 10](#).

### ***Teil V: Gruppendynamik mit vielen Teilchen***

Dieser Teil behandelt Vielteilchensysteme wie etwa Atome oder Gase. Sie werden lernen, wie sich die vielen Elektronen in einem größeren Atom verhalten, wie Teilchen miteinander wechselwirken und wie Teilchen an anderen Teilchen streuen.

Vielteilchenprobleme stellen einen weiteren Schritt der Annäherung an die wirkliche Welt dar, denn eigentlich haben Systeme mit nur einem Teilchen nicht viel mit dieser Welt zu tun, die aus vielen, vielen Myriaden von Teilchen aufgebaut ist. [Teil V](#) handelt davon, wie die Quantenphysik diese Vielteilchenprobleme handhabt.

### ***Teil VI: Der Top-Ten-Teil***

Diesen Teil gibt es in allen *Für-Dummies*-Büchern, er besteht aus Zehnerlisten mit kurz gefassten Informationen. In diesem Buch finden Sie hier zehn wichtige Webseiten über Quantenmechanik und allgemeine Quantenphysik sowie eine Darstellung der zehn wichtigsten Entdeckungen der Quantenwelt.

## ***Symbole in diesem Buch***

In diesem Buch tauchen immer wieder einige Hinweissymbole auf, die die folgende Bedeutung haben:



Dieses Symbol markiert wichtige Hinweise, die vor allem für die Lösung von Aufgaben von Bedeutung sind.



Dieses Symbol weist auf Dinge hin, die man sich merken sollte, wie etwa wichtige physikalische Gesetze oder besonders nützliche Gleichungen.



Dieses Symbol bedeutet, dass es sich im Folgenden um Wissen handelt, das sich eher an Experten richtet. Sie müssen es nicht lesen, wenn Sie nicht wollen, aber wenn Sie ein Profi in Quantenphysik werden wollen (und wer will das nicht?), sollten Sie einen Blick riskieren.



Dieses Symbol warnt vor mathematischen Verständnisfehlern.

## *Wie geht es weiter?*

Damit ist an dieser Stelle alles gesagt, und wir können uns auf den Weg ins Quantenreich machen. Sie können an jedem Punkt dieses Buches beginnen. Wenn Sie glauben, dass der Elektronenspin das Partythema am nächsten Wochenende sein wird, beginnen Sie mit [Kapitel 7](#). Wenn Sie Ihre nächsten Ferien in Genf verbringen und dabei auch Ihren Lieblings-Teilchenbeschleuniger - den LHC - besuchen möchten, sollten Sie [Kapitel 13](#) lesen und sich mit Streutheorie beschäftigen. Wenn Sie aber das ganze Thema von Beginn an interessiert, lesen Sie zuerst [Kapitel 1](#): Hier werden die Grundlagen gelegt.

# Teil I

## Ist die Welt nicht klein? Die Grundlagen



## IN DIESEM TEIL ...

- ✓ Arbeitsweise der Quantenphysik
- ✓ Probleme, die die Entwicklung der Quantenphysik ausgelöst haben
- ✓ Lösungen dieser Probleme
- ✓ Mathematik, die man für die Quantenphysik benötigt
- ✓ Umgang mit Zustandsvektoren

# Kapitel 1

## Entdeckungen und wesentliche Grundlagen der Quantenmechanik

---

### IN DIESEM KAPITEL

Quantisierung: Unteilbare Einheiten

Experimente mit Wellen, die sich wie Teilchen  
verhalten ...

... und mit Teilchen, die sich wie Wellen verhalten

Unschärfe und Wahrscheinlichkeiten

---

Der klassischen Physik zufolge sind Teilchen Teilchen und Wellen Wellen. Beide haben keine Gemeinsamkeiten. Teilchen besitzen eine Energie  $E$  und einen Impulsvektor  $\mathbf{p}$ , und das ist alles. Dagegen besitzen Wellen, wie beispielsweise Lichtwellen, eine Amplitude  $A$  und einen Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , für dessen Betrag  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  gilt mit der Wellenlänge  $\lambda$ . Der Wellenvektor zeigt in die Richtung, in die sich die Welle fortpflanzt. Und das ist, der klassischen Physik zufolge, auch hier alles.

Aber die Wirklichkeit sieht anders aus: Es zeigt sich, dass Teilchen einen wellenartigen Charakter besitzen können und Wellen einen Teilchencharakter.

Hauptsächlich weil uns klar geworden ist, dass Wellen (zum Beispiel Licht) sich wie Teilchen (zum Beispiel Elektronen) verhalten können und umgekehrt, kann die Quantenmechanik heute eine so äußerst wichtige Rolle

in der Welt der Physik spielen. Dieses Kapitel wirft einen Blick auf die Herausforderungen, denen sich die Physik zu Beginn des 20. Jahrhunderts gegenüber sah, und zeigt, wie die Quantenmechanik diese Herausforderungen nach und nach löste. Bis zu diesem Zeitpunkt war es der klassischen Physik möglich, alles, aber auch alles genau zu erklären. Aber diese vertrackten Experimentalphysiker waren unermüdlich und fanden schließlich eine ganze Reihe von Ergebnissen, die die theoretischen Physiker nicht erklären konnten. Das war für diese natürlich unerträglich, und so machten sie sich an die Arbeit. Die Probleme kamen aus der mikroskopischen Welt, jener Welt, die zu klein ist, als dass man sie sehen könnte. In der üblichen, makroskopischen Welt konnte die klassische Physik fast alles erklären; wenn es aber um Effekte im Zusammenhang mit der Mikrowelt ging, begann sie zu versagen. Wenn man sich dieses Versagen genauer ansieht, erhält man eine gute Einführung in die Quantenmechanik und versteht, warum sie notwendig ist.

## ***Wie alles begann: Der Ärger mit der Strahlung schwarzer Körper***

Eine der wesentlichen Neuerungen der Quantenmechanik ist natürlich die *Quantisierung* – das Auftreten von diskreten, unteilbaren, nicht kontinuierlichen Objekten. Diese Idee der Quantisierung, etwa der Energie, wurde im Zusammenhang mit einer der ersten Herausforderungen der klassischen Physik entwickelt: der Strahlung eines schwarzen Körpers.

Wenn man einen Körper erhitzt, beginnt er zu glühen. Doch auch bevor dieses Glühen sichtbar wird, strahlt der Körper, nämlich im infraroten Bereich des Spektrums. Der Grund für dieses Glühen beim Erhitzen ist, dass Elektronen an der Oberfläche des Materials thermisch angeregt werden und dass beschleunigte oder abgebremste Elektronen Licht aussenden.

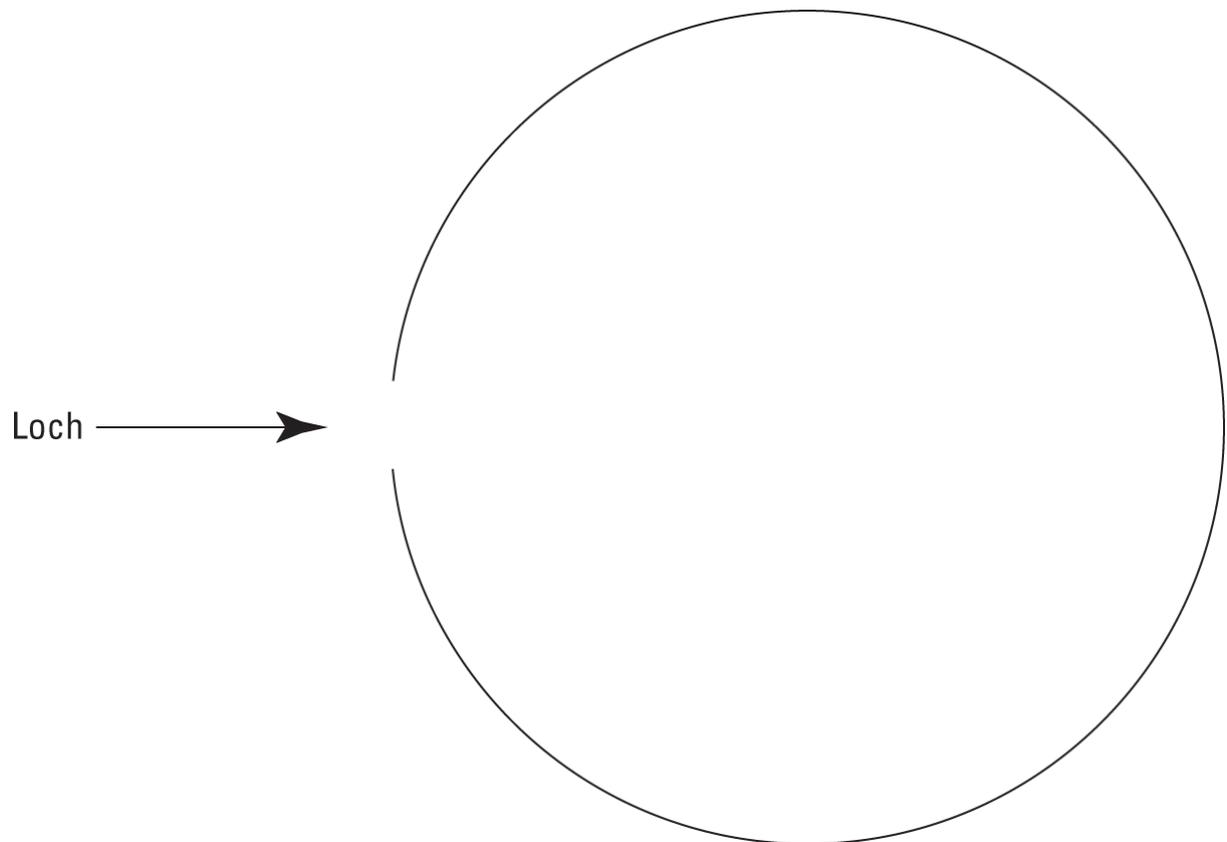
Die Physiker beschäftigten sich im späten 19. und frühen 20. Jahrhundert vor allem mit dem Lichtspektrum, das von sogenannten schwarzen Körpern ausgesendet wird. Ein *schwarzer Körper* ist ein Stoff, der wie alle anderen Körper seiner Temperatur entsprechend strahlt, aber auch Licht aus seiner Umgebung absorbiert und reflektiert. Um das Problem möglichst einfach zu halten, nimmt die Physik jedoch an, dass ein idealer schwarzer Körper alles einfallende Licht absorbiert und nichts reflektiert (daher der Name *schwarzer Körper*, denn ein Objekt erscheint vollkommen schwarz, wenn es das gesamte einfallende Licht absorbiert). Wenn man einen schwarzen Körper erhitzt, beginnt er zu strahlen, das heißt, er emittiert Licht.

Es war nicht leicht, einen vollkommen schwarzen Körper zu entwickeln. Denn welches Material absorbiert schon exakt 100 Prozent des einfallenden Lichts und reflektiert überhaupt nicht? Aber Physiker sind zumeist überaus findig, und sie entwickelten Hohlkörper mit einem Loch, wie in [Abbildung 1.1](#) dargestellt.

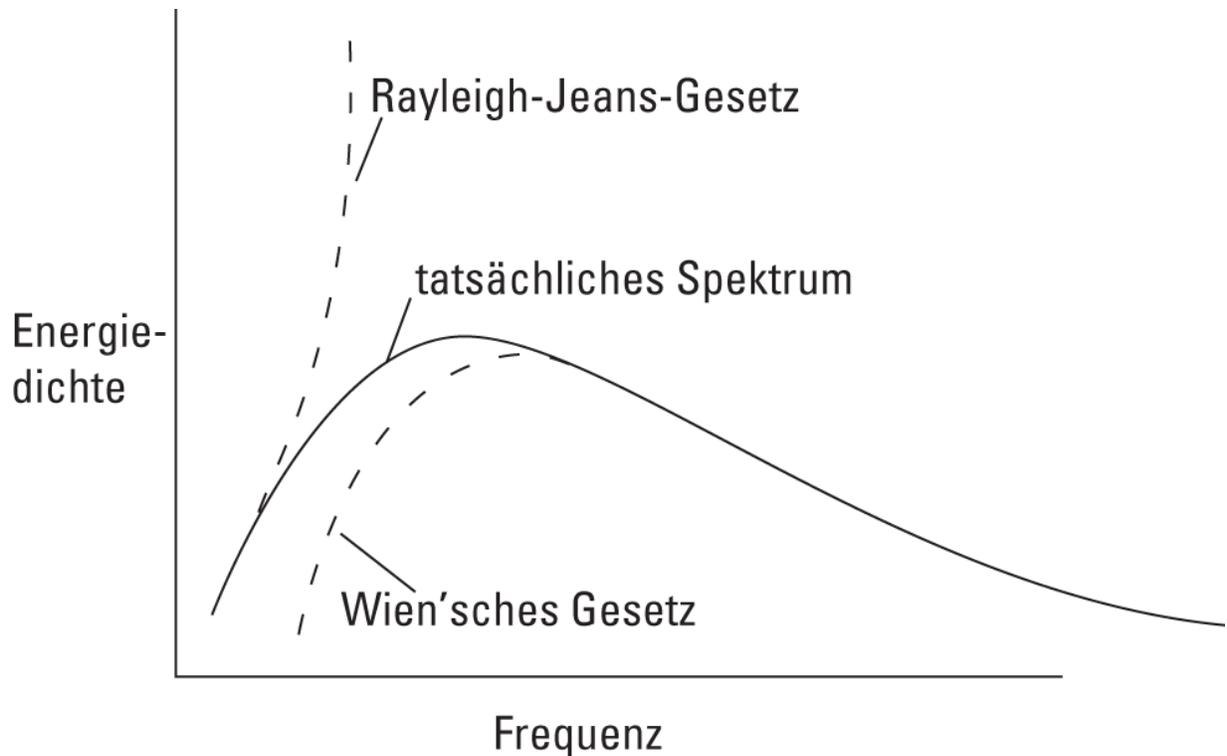
Wenn nun Licht auf das Loch fällt, wird es in das Innere des Hohlkörpers gelangen, wo es dann wieder und wieder reflektiert wird, bis es schließlich absorbiert wird (nur ein verschwindend geringer Anteil kann wieder durch das Loch entkommen). Genau dies aber ist ein schwarzer Körper: eine Fläche, die Licht verschluckt und nicht reflektiert. Wenn man den Hohlkörper erhitzt, wird

sein Inneres zu glühen beginnen, und diese »Temperaturstrahlung« tritt durch das Loch nach außen. Damit ist das Loch tatsächlich eine sehr gute Annäherung an einen vollkommenen schwarzen Körper.

Das Spektrum eines schwarzen Körpers und zwei Versuche, es zu modellieren, sind in [Abbildung 1.2](#) dargestellt.



**Abbildung 1.1:** Ein Hohlraum mit sehr kleinem Loch ist ein so gut wie idealer schwarzer Körper



**Abbildung 1.2:** Zwei Ansätze für das Spektrum eines schwarzen Körpers

## ***Der erste Versuch: Das Wien'sche Gesetz***

Der Erste, dem es gelang, zumindest einen Teil des Spektrums eines schwarzen Körpers zu erklären, war 1889 Wilhelm Wien. Mithilfe der klassischen Thermodynamik entwickelte er folgende Formel:

$$u(\nu, T) = A\nu^3 e^{-\beta\nu/T}$$

Dabei sind  $A$  und  $\beta$  Konstanten, die sich aus der experimentellen Anordnung ergeben,  $\nu$  ist die Frequenz des Lichts und  $T$  die Temperatur des schwarzen Körpers. (Das Spektrum ist angegeben durch die Funktion  $u(\nu, T)$ , also die Energiedichte des emittierten Lichts als Funktion der Frequenz und der Temperatur.)

Diese Gleichung, das Wien'sche Verschiebungsgesetz, liefert sehr gute Ergebnisse für hohe Frequenzen, wie in