



Aufgaben zur Abiturvorbereitung in Mathematik

Mit kommentierten Lösungen

$$E : 2x - 3y + z = 4$$

$$\int_0^3 (x^3 - 9x) dx \qquad f(x) = (x + 1) \cdot e^{-2x}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Vorwort

In diesem Buch wurden eine Reihe von Übungsaufgaben zu den drei großen Themengebieten der Oberstufe (Analysis, Stochastik und analytische Geometrie) zusammengestellt. Es sind Aufgaben ganz unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades mit dabei. Aus diesem Grund habe ich vorab keine Differenzierung nach Grundkurs oder Leistungskurs vorgenommen. Die Aufgaben entstanden aus mehrjähriger Erfahrung bei der Unterstützung zur Abiturvorbereitung von Schülerinnen und Schülern diverser Gymnasien, beruflicher Gymnasien und auch Fachoberschulen.

In den folgenden sechs Kapiteln finden Sie jeweils ein Kapitel mit Aufgaben und danach jeweils eines mit den zugehörigen Lösungen. Die Lösungen sind z. T. mit Beschreibungen bzw. Erklärungen versehen, so dass dieses Buch auch zum Selbststudium geeignet ist, sofern Grundkenntnisse vorhanden sind. Die Aufgaben wurden so zusammengestellt bzw. erstellt, dass möglichst viele Aspekte der verschiedenen Themengebiete berücksichtigt wurden. Im letzten Kapitel sind weitere Übungsaufgaben ohne Lösungen zu finden.

Um zusätzlich eine Reihe von Mathe-Aufgaben online lösen zu können, wurde ein System entwickelt, welches unter www.alles-mathe.de zu finden ist. Hiermit können auch eigene Lösungen verifiziert werden, Zwischenschritte gelöst oder auch beispielsweise Funktionsgraphen gezeichnet werden.

Weitere Aufgaben mit Lösungen, Beispiele und Erklärungen habe ich auf der Seite www.mathe-total.de bereit gestellt und speziell Abituraufgaben unter abi.mathe-total.de. Auf der Seite findet man auch Themen der Mittelstufe.

Im Herbst 2014

Dr. Marco Schuchmann
(e-mail: schuchmann@mathe-total.de)

Inhalt

1 AUFGABEN ZUR ANALYSIS

2 LÖSUNGEN ZU DEN AUFGABEN ZUR ANALYSIS

3 AUFGABEN ZUR ANALYTISCHE GEOMETRIE (LINEARE ALGEBRA)

4 LÖSUNGEN ZU DEN AUFGABEN ZUR ANALYTISCHEN GEOMETRIE

5 AUFGABEN ZUR STOCHASTIK

6 LÖSUNGEN ZU DEN AUFGABEN ZUR STOCHASTIK

7 WEITERE AUFGABEN OHNE LÖSUNG

7.1 Weitere Aufgaben zur Analysis

7.2 Weitere Aufgaben zur analytischen Geometrie

7.3 Weitere Aufgaben zur Stochastik

1 Aufgaben zur Analysis

Bemerkung:

Aufgaben mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad sind mit einem s hinter der Aufgabennummer gekennzeichnet, z.B. „Aufgabe AN19S“.

Aufgabe AN1:

Es sollen die Nullstellen folgender Polynome bzw. ganzrationaler Funktionen bestimmt werden.

a) $f(x) = x^3 - 64x$

b) $f(x) = 4x^3 + 12x^2$

c) $f(x) = x^3 + 8$

d) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$ ($x_1 = -3$)

e) $f(x) = x^3 + 12x^2 - 256$ ($x_1 = -8$)

f) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ ($x_1 = 2$)

g) $f(x) = -x^4 + 20x^2 - 64$

h) $f(x) = 2x^4 - 10x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

i) $f(x) = (x - 4)(x + 2)(x - 5)$

j) $f(x) = 2(x^2 - 9)(x + 4)(x^2 + 25)$

Weitere Beispiele zur Polynomdivision sind unter <http://www.mathe-total.de/Test-Polynomdivision/Polynomdivision.php> zu finden, weitere

Beispiele zur Substitution bei biquadratischen Gleichungen - wie bei Aufgabe g) - unter <http://www.mathe-total.de/Test-biquadratische-Gleichungen> und falls jemand die p-q-Formel noch mal üben möchte, kann er dies unter <http://www.mathe-total.de/Test-p-q-Formel> tun.

Aufgabe AN2:

Bestimme die Nullstellen der Funktion

a) $f(x) = -4x^4 + 281x^2 - 1600$ nomdivision sind unt

b) $f(x) = -1/2x^3 + 3/2x^2 + 5x - 12$

Aufgabe AN3:

Es soll jeweils die erste Ableitung bestimmt werden:

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x + 3$

b) $f(x) = x^5 - 9x^3 + 4$

c) $f(x) = 1/3x^3 - 1/2x^2 + x$

d) $f(x) = -9x^5 + x^4 + 4/3x^3 + 2x$

e) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

f) $f(x) = x^3 + d^2$

g) $f(x) = a(2x^3 - 8x)$

h) $f(x) = (x^5 - 4x^2 + 1)/3$

i) $f(t) = t^3x - 12t^2 + x^4$ (Ableitung nach t)

j) $f(x) = t^3x - 12t^2 + x^4$

Aufgabe AN4:

Es soll jeweils die erste Ableitung bestimmt werden:

a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$ (Tipp: $(\sin(x))' = \cos(x)$)

b) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ (Tipp: $(e^x)' = e^x$)

c) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 3}$

e) $f(x) = (5x + 3)^4$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ (Tipp: $\sqrt{x} = x^{1/2}$, damit ist $(\sqrt{x})' = 1/2 \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$)

g) $f(x) = \ln(x^3 + 2x)$ (Tipp: $(\ln(x))' = 1/x$)

h) $f(x) = (2x + 4) \cdot e^{-2x}$

i) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

j) $f(x) = \frac{-2x}{(2x+3)^2}$ (Tipp: Nenner nicht ausmultiplizieren, damit man nach dem Ableiten kürzen kann)

k) $f(x) = \sin(x^2)$ (Tipp: $(\sin(x))' = \cos(x)$)

l) $f(x) = \sin^2(x)$ (Tipp: $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$)

Aufgaben AN5:

a) $f(x) = x^2 - 4x$. Es soll die Gleichung der Tangente und Normale bestimmt werden an der Stelle $x = 1$.

b) $f(x) = 2e^{1/2x}$. Es soll die Gleichung der Tangente und Normale an der Stelle $x = 0$ bestimmt werden.

Aufgaben AN6:

Für die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$ soll eine Kurvendiskussion durchgeführt werden.

Aufgabe AN7:

Führe für die Funktion $f(x) = -3x^4 + 24x^3 - 54x^2$ eine Kurvendiskussion durch.

Aufgabe AN8:

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades. Der Graf ist zur y-Achse symmetrisch, hat im Punkt $E(2; 25)$ einen Hochpunkt und schneidet an der Stelle $x = 3$ die x-Achse. (Eine Anwendungsaufgabe zur Rekonstruktion finden man unter <http://mathe-total.de/Aufgabenblaetter/Anwendungsaufgabe-Rekonstruktion.pdf> und Erklärungen zu den Bedingungen findet man unter <http://mathe-total.de/Analysis-Skript/Analysis-Differentialrechnung.pdf>)

Aufgabe AN9:

Gesucht wird eine Stammfunktion von:

a) $f(x) = 6x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^4 - 9x^2 + 6x$

c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

d) $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 4x + 5$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

g) $f(x) = 4(x^3 - 8x + 2)$

Aufgabe AN10:

Aufgaben zu bestimmten Integralen:

a) $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 2) dx$

b) $\int_{-1}^1 (x^3 - 8x) dx$

c) Bestimme a so, dass $\int_{-1}^1 (ax^4 + 6x^2) dx = 6$

Aufgabe AN11:

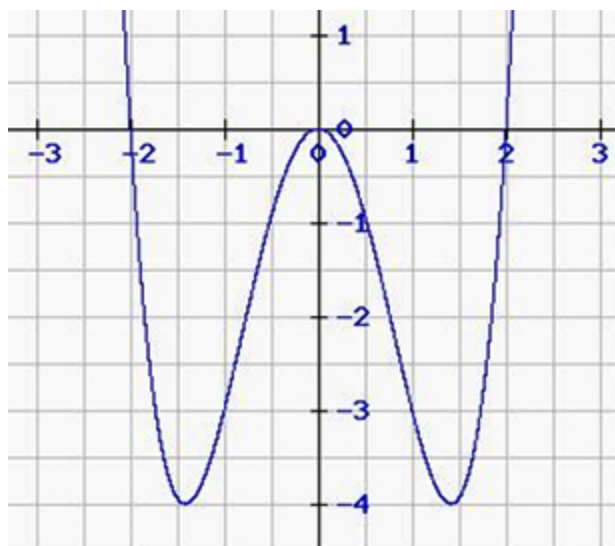
Geben ist die Funktion $f(x) = -3x^2 + 12x$.

- a) Wie groß ist die Fläche, die die Kurve von f mit der x-Achse einschließt?
- b) Welche Fläche schließt der Graph von f mit der x-Achse über dem Intervall $I = [2, 5]$ ein?

Aufgabe AN12:

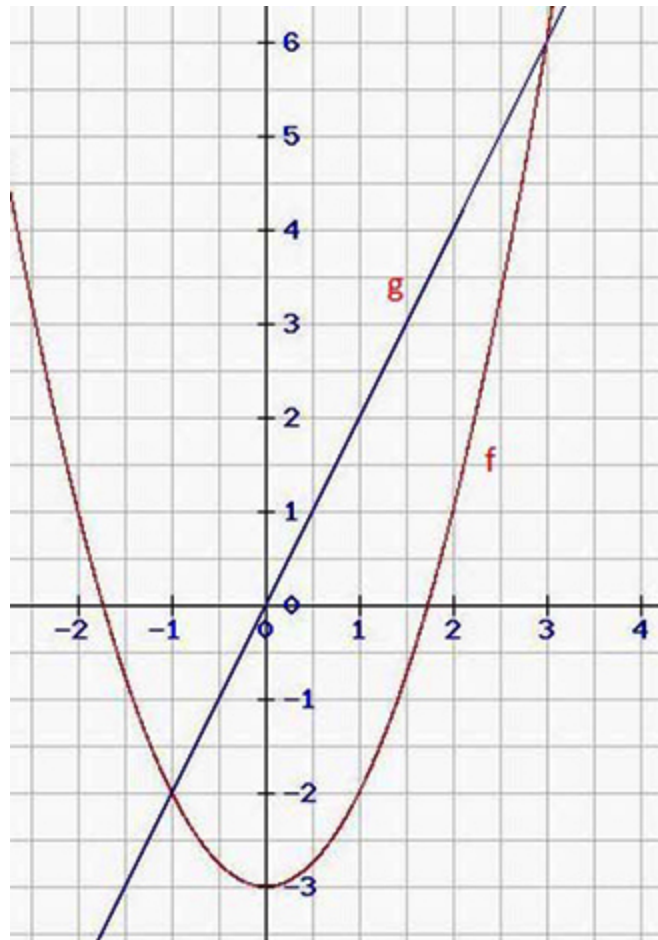
Geben ist die Funktionen $f(x) = x^4 - 4x^2$.

Wie groß ist die Fläche, die die Kurve von f mit der x-Achse einschließt?

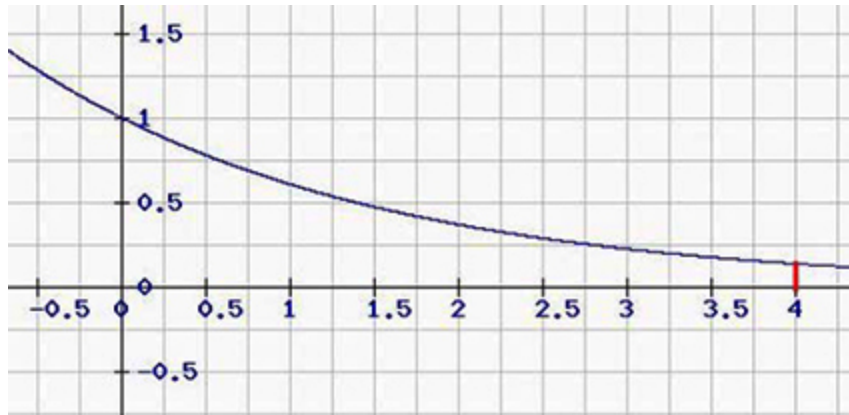


Aufgabe AN13:

Geben sind Funktionen $f(x) = x^2 - 3$ und $g(x) = 2x$. Wie groß ist die Fläche, die von den beiden Kurven eingeschlossen wird?

**Aufgabe AN14:**

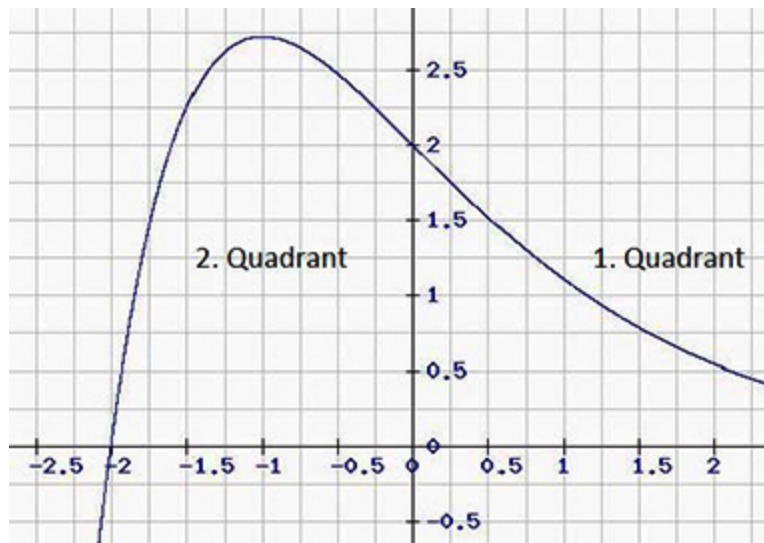
Wie groß ist die Fläche zwischen der Kurve von $f(x) = e^{-1/2x}$ und der x-Achse über dem Intervall $[0; 4]$?



Aufgabe AN15:

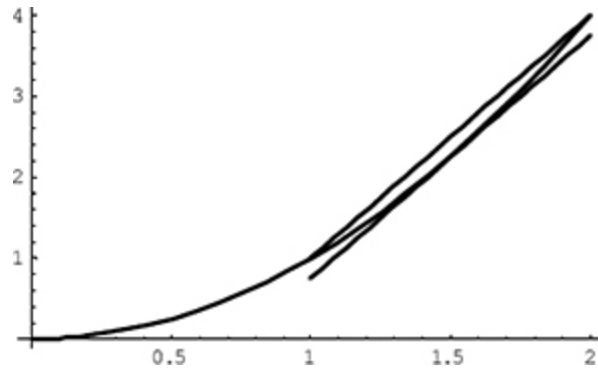
Gegeben ist $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$.

- Zeige, dass $F(x) = (-x - 3) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
- Wie groß ist die Fläche, die im 2. Quadranten von der Kurve von f , der x-Achse und der y-Achse eingeschlossen wird?



Aufgabe AN16:

Durch die Punkte $P(1; y_1)$ und $Q(2; y_2)$ wird eine Sekante der Kurve von $f(x) = x^2$ gezeichnet. In welchem Punkt des Grafen ist die Tangente parallel zu dieser Sekanten und die lautet die Gleichung dieser Tangenten?



Aufgabe AN17S:

Gesucht wird eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die an der Stelle $x = 2$ eine Normale hat, welche die x -Achse unter einem Winkel von 45° schneidet. Die Wendetangente an der Stelle $x = 1$ schneidet die x -Achse in $N(4;0)$ und hat die Steigung 2.

Aufgabe AN18S:

Eine Parabel f (d.h. ganzrationale Funktion 2. Grades) wird im Ursprung von der Kurve der Funktion $g(x) = x^2 - 4x$ orthogonal geschnitten und sie hat die zweite Ableitung $f''(x) = 2$.

Aufgabe AN19S:

Eine achsensymmetrische ganzrationale Funktion 4. Grades hat im Wendepunkt $W(-1;4)$ eine Wendetangente, die durch den Punkt $Q(0;3)$ geht.

Aufgabe AN20S:

Gesucht wird eine ganzrationale Funktion dritten Grades, die im Ursprung die x -Achse berührt und an der Stelle $x = 2$ die Funktion $g(x) = -8x + 16$ berührt.

Aufgabe AN21S (für LK):

Bestimme die Stammfunktionen von

a) $f(x) = x \sin(x)$