Frank-Michael Dittes

Optimierung

Wie man aus allem das Beste macht

SACHBUCH

Springer

Technik im Fokus

Die Buchreihe Technik im Fokus bringt kompakte, gut verständliche Einführungen in ein aktuelles Technik-Thema.
Jedes Buch konzentriert sich auf die wesentlichen Grundlagen, die Anwendungen der Technologien anhand ausgewählter Beispiele und die absehbaren Trends.
Es bietet klare Übersichten, Daten und Fakten sowie gezielte Literaturhinweise für die weitergehende Lektüre.

Frank-Michael Dittes

Optimierung

Wie man aus allem das Beste macht

2. Auflage

Springer

Frank-Michael Dittes
Fachbereich Ingenieurwissenschaften
Hochschule Nordhausen
Nordhausen, Deutschland

ISSN 2194-0770 ISSN 2194-0789 (electronic)
Technik im Fokus
ISBN 978-3-662-64905-3 ISBN 978-3-662-64906-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-64906-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer
© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2015, 2022
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Lektorat/Planung: Michael Kottusch
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort zur 2., überarbeiteten und erweiterten Auflage

Fast sieben Jahre sind seit der ersten Auflage dieses Buches vergangen. Anhand zahlreicher Beispiele aus verschiedenen Bereichen des Alltags, aus Technik und Naturwissenschaft hatte ich gezeigt, wie man optimale Lösungen findet und so – mit ein bisschen Glück – das Beste aus allem machen kann. Wir hatten gemeinsam Dame gespielt, Plätzchen gebacken und Koffer gepackt. Aber auch ernsthafte Probleme wie die Gestaltung von Energienetzen oder die Vorhersage der globalen Erwärmung kamen unter dem Blickwinkel der Optimierung zur Sprache.

Alle damals beschriebenen Verfahren zum Finden optimaler Lösungen sind natürlich auch heute noch gültig und deshalb auch in dieser Auflage enthalten. Mehr noch, die Bedeutung guter Lösungen für komplexe Probleme ist sogar gewachsen – und damit auch die Rolle der Optimierungsalgorithmen. Erweitert haben sich zudem die Möglichkeiten ihrer Anwendung – in erster Linie durch die stetige Entwicklung der Rechentechnik: Während ich in der ersten Auflage 2015 noch vom chinesischen Tianhe-2 als schnellstem Rechner der Welt schwärmte, hat sich die Rechenleistung der Top-Supercomputer seitdem mehr als verzehnfacht: Zur Zeit hat der japanische Fugaku mit 442 Billiarden (!) Operationen pro Sekunde die Nase vorn, für 2022 sind mehrere Rechner angekündigt, die eine weitere Verdopplung mit sich bringen und in den „ExaFLOP“-Bereich mit über einer Trillion Operationen in der Sekunde vordringen.

Dadurch konnten viele akademische Probleme weiterverfolgt werden, sei es das Aufspüren immer größerer Primzahlen oder – um ein im Buch behandeltes Beispiel zu nennen – das N-Damen-Problem, s. Kap. 2. Noch wichtiger, auch abseits solcher „Spielereien“ hat sich viel getan: Die Entwicklungen, ja geradezu die Durchbrüche auf dem Gebiet der künstlichen Intelligenz mit ihren unabsehbaren Anwendungsmöglichkeiten – von der Gesichtserkennung über das autonome Fahren bis zum Design neuer Materialien – haben die vergangenen Jahre geprägt. In der Neuauflage greife ich diese Thematik in Abschn. 4.4 auf und gehe auf die Grundlagen künstlicher Neuronaler Netze und die damit verbundenen Optimierungsstrategien ein.

Nicht nur im Bereich der Supercomputer ist die Entwicklung rasant vorangeschritten. Cloud-Computing hat mittlerweile praktisch unbegrenzte Rechenleistung für alle zugänglich gemacht, Grafik-Prozessoren verwandeln auch normale Personalcomputer in leistungsfähige Rechner, auf denen realistische Optimierungsaufgaben gelöst werden können. Die nächste Beschleunigungsrunde der Rechenleistung zeichnet sich mit der Entwicklung der Quantencomputer bereits ab, eine kurze Einführung in die damit verbundenen Optimierungsalgorithmen habe ich deshalb als Abschn. 5.7 aufgenommen.

Aktualisierungen betreffen alle Beispiele, die auf realen Daten fußen. Insbesondere die Abbildungen zur Standort- und Netzplanung für deutsche Großstädte sind auf den aktuellen Stand der Datenbasis gebracht worden – die wesentlichen Aussagen der entsprechenden Kapitel verändern sich dadurch jedoch nicht. Anders sieht es mit der Extrapolation der Temperaturentwicklung aus: Die neu hinzugekommenen Datenpunkte lassen leider noch weniger Raum für optimistische Prognosen …

An verschiedenen Stellen habe ich die Darlegungen etwas erweitert und, wie ich hoffe, dadurch verständlicher gemacht. Nach wie vor hält sich das Buch dabei an die Maxime, ohne mathematische Formeln auszukommen und trotzdem die wesentlichen Aspekte der behandelten Methoden und Anwendungsfälle korrekt widerzugeben. Mehr Raum haben auch die Bildunterschriften erhalten, sodass die Abbildungen auch ohne Heraussuchen der zu-

gehörigen Textpassage detailliertere Informationen liefern. Darüber hinaus war ich bestrebt vereinzelte Druckfehler auszumerzen und hoffe, dass auch keine neuen hinzugekommen sind.

Betrachten Sie also die Neuauflage als verbesserte Handreichung, in allen Lebenssituationen die vorhandenen Optimierungspotenziale aufzuspüren und zu nutzen und so aus allem das Beste zu machen. Ich freue mich auf unsere gemeinsame Reise durch das Reich der Optimierung!

Erfurt, Deutschland Frank-Michael Dittes
November 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Und immer lockt das Bessere: eine Einführung 1
Literatur. 4

2 Hier stehe ich: Standortprobleme 5
2.1 Spielerisch zum Optimum: das N-Damen-Problem. 5
2.2 Bring es auf den Punkt: Deutschlands Mitte 9
2.3 Wasch mir den Pelz: Probleme mit Nebenbedingungen 17
Literatur. 20

3 Setz dir ein Ziel: von Optimierungsräumen und Bewertungsfunktionen 21
3.1 Die Menge macht‘s: diskrete und kontinuierliche Probleme 21
3.2 Auf gute Nachbarschaft: von kleinen und großen Umgebungen 24
3.3 Weite den Blick: die Dimension des Raumes 27
3.4 O Täler weit, o Höhen: Bewertungslandschaften . . . 30
3.5 Ein Bild sagt mehr als tausend Worte: das Problem der Darstellung 34
Literatur. 39

4 Schritt für Schritt: deterministische Lösungsverfahren 41
4.1 Bitte durchzählen: die vollständige Enumeration . . . 41
4.2 Teile und herrsche: „branch and bound“ 44

4.3 Rolling home: Newtonverfahren und Gradientenmethode 48
4.4 Alles ist erlernbar: künstliche Neuronale Netze . . . 53
4.5 Klein, aber fein: die Methode der kleinsten Quadrate 58
4.6 Immer an der Wand lang: das Simplexverfahren . . . 62
Literatur 65

5 Und er würfelt doch: Monte-Carlo-Verfahren der globalen Optimierung 67
5.1 Von einem Extrem(um) ins andere: lokale und globale Optima 67
5.2 Heureka! Von Heuristiken und Metaheuristiken . . . 72
5.3 Verbessern durch Verschlechtern: Wege aus der Lokalitätsfalle 77
5.4 Es führt kein Weg zurück: eingeschränktes Suchen 80
5.5 Viele Hunde sind des Hasen Tod: genetische Algorithmen und Evolutionsstrategien 83
5.6 Du bestimmst den Weg: die demokratische Optimierung 86
5.7 Das ultimative Würfeln: Quantenalgorithmen 91
Literatur 99

6 Der Weg ist das Ziel: von kurzen Routen und langen Folgen 101
6.1 Jetzt geht's rund: das Problem des Handelsreisenden 101
6.2 Auf gutem Weg: die optimale Trassenführung . . . 111
6.3 Immer der Reihe nach: Ablaufplanungen 115
Literatur 118

7 Pack es: das optimale Füllen 119
7.1 Schnür dein Ränzel: das Rucksack-Problem und andere Ressourcenfragen 119
7.2 Längs oder quer: von Bildern und Koffern 122
7.3 Eine Frage der Form: Quadrate, Dreiecke und Kreise 125
Literatur 134

8 Man kann's nicht allen recht machen: die Optimierung frustrierter Systeme 135
8.1 Enttäusch mich nicht: der Frustrationsbegriff 135
8.2 Eine Dreiecksgeschichte: die Wurzel aller Frustration 140
8.3 Die spinnen, die Gläser: der schwere Weg zum Optimum 143
8.4 Über kurz oder lang: Frustration und Korrelation 149
Literatur. 153

9 Wie soll ich mich entscheiden: die Kunst des Kompromisses 155
9.1 Wer zwei Hasen jagt: mehrdimensionale Zielfunktionen 155
9.2 Sie werden verbunden: Verkehrs- und Energienetze. 160
9.3 Spieglein, Spieglein an der Wand: Antireflexbeschichtungen 166
Literatur. 170

10 Alles super? Optimal im Kleinen wie im Großen . . . 171
10.1 Immer in Eile: der intelligente Lichtstrahl oder das Prinzip der kürzesten Zeit 171
10.2 Auf krummen Touren: die optimale Wirkung . . . 174
10.3 Die beste aller möglichen Welten: wirklich? 176
Literatur. 178

11 Zum Schluss: die Schönheit des Optimums 179

Verwandte und weiterführende Literatur 183

Stichwortverzeichnis. 185

1 Und immer lockt das Bessere: eine Einführung

Zusammenfassung

Was ist Optimierung? Welche Optimierungsprobleme begegnen uns im täglichen Leben und wie können wir sie lösen? Welche Randbedingungen müssen wir beachten? Und was wollen wir überhaupt? Das vorliegende Kapitel stellt den „Fahrplan" zur Beantwortung dieser Fragen vor und erörtert dazu zunächst verschiedene Facetten des Begriffs „Optimierung".

„Aus allem das Beste machen" – das klingt wie „Glücklich in sieben Tagen", „Schlank ohne Hungern" oder „Fit ohne Anstrengung" – noch so ein Ratgeber? werden Sie fragen. Nein, das soll dieses Buch bestimmt nicht sein. Es möchte stattdessen auf die vielfältigen Optimierungsprobleme aufmerksam machen, die uns im täglichen Leben begegnen, und ein paar nützliche Strategien zu ihrer Lösung vorstellen.

Schauen Sie einmal nach, was das Internet auf „die Suche nach dem Besten" antwortet, und zwar bei *wortwörtlicher* Eingabe: Über hunderttausend Einträge, und was da nicht alles gesucht wird! An erster Stelle natürlich die schönste Sache der Welt, diese Suche schwappt ja auch ständig durch alle Medien. Aber dann: Kredite, Tickets, Ärzte, Veggie-Burger …. Und endlich kommt

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2022

F.-M. Dittes, *Optimierung*, Technik im Fokus,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-64906-0_1

ein technisches Problem: die Suche nach dem besten Standort eines Funkmasts – wir werden uns schon im nächsten Kapitel damit beschäftigen. Dann folgen Eis, Döner, Nachfolger und die Suche nach dem – man höre und staune – besten Leben!

Versuchen wir es also etwas systematischer: Optimieren, vom lateinischen „optimae“ (besser), bezeichnet zunächst nichts weiter als den Vorgang der Verbesserung einer Sache oder eines Prozesses. Dies kann *reale* Vorgänge betreffen: ein Geschäftsablauf wird optimiert, die Anordnung von Bauteilen verbessert usw. Aber auch *ideelle* Prozesse werden als Optimierung bezeichnet: Die Suche nach der besten Lösung findet dann zunächst auf dem Papier oder am Computer statt und wird erst anschließend in die Praxis umgesetzt.

Das Ziel der Optimierung besteht allerdings nicht einfach in der *Verbesserung*, nein: Das *Beste* soll gefunden werden! Die Lösung eines Problems heißt folglich erst dann optimal, wenn es keine bessere gibt. Aber was bedeutet das? Die Beste für *wen*? *Was* soll eigentlich optimiert werden, welches Ziel wird verfolgt? Auch ist das Beste immer im zeitlichen Kontext zu sehen: Was heute gut ist, kann morgen in einem ganz anderen Licht erscheinen.

Und was heißt eigentlich, „es gibt keine bessere Lösung“? Unter welchen Voraussetzungen, mit welchen Veränderungsmöglichkeiten, verglichen womit? „Frau Königin, Ihr seid die Schönste allhier, aber Schneewittchen, hinter den sieben Bergen, bei den sieben Zwergen, ist noch tausendmal schöner als Ihr“ heißt es nicht von ungefähr schon in Grimms Märchen auf die Frage nach dem optimalen Aussehen [1].

Der wissenschaftliche Zugang zur Optimierung erfordert daher einerseits die detaillierte Beschreibung des zu optimierenden *Systems* und eventueller *Randbedingungen*, denen es unterworfen ist. Andererseits muss klar definiert sein, welche Größe optimiert werden soll, welches *Ziel* also verfolgt wird.

Ein Optimierungsproblem liegt vor, sobald es für eine Aufgabe mehr als eine Lösungsmöglichkeit gibt. Um die optimale Lösung finden zu können, müssen die verschiedenen Varianten dabei *bewertbar* sein. Man muss also jeder denkbaren Lösung einen Wert, d. h. eine Zahl zuordnen können. Das klingt trivial, ist es aber nicht. Schon bei der einfachen Ja-Nein-Frage „Wollen Sie den hier anwe-

senden Herrn … heiraten?“ kommen einem sofort *mehrere* Bewertungskriterien in den Sinn. Und häufig zeigt sich erst nach langer Zeit, was die optimale Antwort gewesen wäre. Völlig befremdlich erscheinen die „alternativlosen“ Lösungen, von denen manche Politiker und Politikerinnen gern sprechen – gerade so als gäbe es nichts zu optimieren! Es steht zu befürchten, dass die umgesetzte Lösung dann nicht sonderlich gut, geschweige denn optimal ist.

Doch *wie* optimiert man eigentlich? Warum ist es augenscheinlich oft so kompliziert, das Beste zu finden? Warum geht es – selbst bei aller Anstrengung – häufig nicht so gut, wie man es sich wünschen würde? Welche *Entscheidungen* müssen getroffen werden, um zur optimalen Lösung vorzudringen? Ein Großteil des Buches ist der Beantwortung dieser Fragen und der Beschreibung der entsprechenden Verfahren gewidmet.

Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Optimierung von Systemen, mit denen ein *Gesamtziel* verfolgt wird: Wir wollen die kürzeste Rundreise finden oder das optimale Layout einer Leiterplatte bestimmen, einen Koffer oder Rucksack bestmöglich packen und das Frustrationspotenzial einer Dreiecksbeziehung abschätzen. Dass diese Systeme aus Einzelteilen oder Komponenten bestehen, ist dabei nur insofern von Interesse, als deren Anordnung variiert werden kann.

Optimierung spielt nicht nur in Naturwissenschaft und Technik eine herausragende Rolle. Aus den Wirtschaftswissenschaften kommt die Bezeichnung „Operations Research“ für weite Gebiete der Optimierungstheorie. Typischerweise zielt diese Forschung auf die Minimierung von Kosten bzw. die Maximierung des Profits.

Auch die Sozialwissenschaften widmen sich der Thematik. Allerdings wird dabei die Rolle des *Individuums* betont und eine Optimierung bezüglich der Interessen des Einzelnen in den Mittelpunkt gestellt. Die Definition eines Gesamtziels scheint in diesem Fall unmöglich zu sein, auch wenn Slogans wie „blühende Landschaften“ oder „Wohlstand für alle“ das suggerieren wollen. Ob und auf welche Weise der individualistische Zugang vielleicht doch mit dem systemischen zusammenpasst, wird uns in Abschn. 5.6 beschäftigen.

Schließlich spielt Optimierung eine wichtige Rolle im täglichen Leben. In den folgenden Kapiteln werden dazu verschie-

denste Beispiele betrachtet, und schon der gemeinsame Wortstamm von Optimieren und *Optimismus* sollte uns fröhlich stimmen. Letzterer hat als Lebensauffassung ja auch zum Inhalt, dass alles bestens ist – oder zumindest schon gut gehen wird.

Suchen Sie sich also eine optimale Leseposition und lassen Sie sich mitnehmen auf einen unterhaltsamen Spaziergang durch die Welt der Optimierung. Auf unserer Reise werden wir in Kap. 2 anhand zweier Beispiele die wesentlichen Begriffe kennenlernen, die bei der Optimierung komplexer Systeme auftreten. Die Diskussion in Kap. 3 verallgemeinert diese Begriffe und legt damit die Grundlage für die systematische Beschreibung von Optimierungsproblemen. Darauf aufbauend werden verschiedenste Lösungsansätze beschrieben: In Kap. 4 geht es zunächst um Situationen, in denen ein deterministisches Vorgehen möglich ist. Ausführlich werden anschließend zufallsbasierte Verfahren vorgestellt (Kap. 5). Die Kap. 6 und 7 sind der Analyse wichtiger Anwendungsfälle – *Routen- und Abfolgeplanungen* sowie *Packungsproblemen* – gewidmet und streifen dabei den Zusammenhang zwischen Optimalität und Komplexität. Kap. 8 beginnt mit einer scheinbaren Abschweifung vom Thema, zeigt dann aber, dass die *Frustration* eines Zustands das universelle Maß für dessen Abstand vom Optimum liefert. Mit einer Betrachtung zu den Besonderheiten der Optimierung beim Verfolgen *mehrerer* Ziele beschäftigt sich danach Kap. 9, bevor eine (fast) philosophische Betrachtung das Buch abschließt.

Ich wünsche Ihnen viel Vergnügen!

„Und immer lockt …“ ist ein beliebter Titel von Gedichten oder Filmen. Gewöhnlich lockt dabei „das Weib“, s. z. B. [2], was ja nicht im Widerspruch zum „Besseren“ stehen muss.

Literatur

1. Grimm J, Grimm W (2009) Die Kinder- und Hausmärchen der Brüder Grimm. Beltz Der KinderbuchVerlag, Weinheim
2. Vadim R (Regie) (1956) Frankreich

Check for updates

2 Hier stehe ich: Standortprobleme

Zusammenfassung

Anhand zweier Beispiele werden in diesem Kapitel typische Begriffe und Zusammenhänge der Optimierung komplexer Systeme eingeführt. Dabei wird zunächst ein Problem der diskreten Optimierung behandelt, danach ein kontinuierliches. Der dritte Abschnitt ist schließlich dem Einfluss von Nebenbedingungen auf die Lösungsfindung gewidmet.

2.1 Spielerisch zum Optimum: das N-Damen-Problem

Kennen Sie das N-Damen-Problem? Ich meine das auf einem Schachbrett oder einem Stück karierten Papiers. Seine Formulierung ist an Einfachheit kaum zu überbieten, und doch weist das Problem schon alle Merkmale auf, die wir auch bei komplexeren Optimierungsproblemen antreffen werden.

Die Aufgabe besteht darin, auf einem gewöhnlichen Schachbrett eine Anzahl von Damen aufzustellen. Die Damen sind aber nicht gut drauf und wollen sich gegenseitig nicht sehen. Weder horizontal noch vertikal sollen in einer Zeile also zwei oder mehr Damen stehen, dasselbe soll für jede beliebige Diagonale gelten. Die Schachspieler nennen die „Zeilen“ übrigens Reihen bzw. Linien, und statt „sehen“ würden sie wohl eher von „schlagen“ sprechen.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2022

F.-M. Dittes, *Optimierung*, Technik im Fokus,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-64906-0_2

Man kann zeigen, dass auf diese Weise auf einem normalen Schachbrett mit 8 Reihen und 8 Linien acht Damen untergebracht werden können. Mehr ist sicherlich nicht möglich, da die ersten acht Damen bereits alle Reihen belegen würden und für die neunte Dame keine Aufstellmöglichkeit mehr gegeben wäre. Und *dass* 8 Damen auf das Feld passen – das ist eben genau der Inhalt des Problems. Analog zum 8-Damen-Problem kann man natürlich auch die Aufstellung von beliebig vielen, eben N, Damen auf einem NxN-Feld untersuchen, und schon haben Sie das N-Damen-Problem. Sie können das gern auf kariertem Papier mit Münzen oder anderen Spielsteinen nachstellen.

Abgesehen vom trivialen Fall N = 1, bei dem *eine* Dame auf einem 1x1-Feld steht und einfach niemand da ist, den sie schlagen kann, hat das Problem erst ab N = 4 eine Lösung. In der Tat, auf einem 2x2-Feld ist es unmöglich, zwei Damen so aufzustellen, dass sie nicht entweder in ein und derselben Reihe oder auf ein und derselben Linie oder beide auf einer der zwei Diagonalen stehen. Auch für N = 3 kann man leicht nachprüfen, dass es keine Stellung gibt, in der sich nicht mindestens 2 Damen schlagen können. Aber mit 4 Damen geht's – ein Umstand, der in der Realität schon hinreichend schwierig zu bewerkstelligen ist; es gibt sogar zwei Lösungen, die durch Spiegelung an einer der Achsen des Spielfelds auseinander hervorgehen (s. Abb. 2.1)!

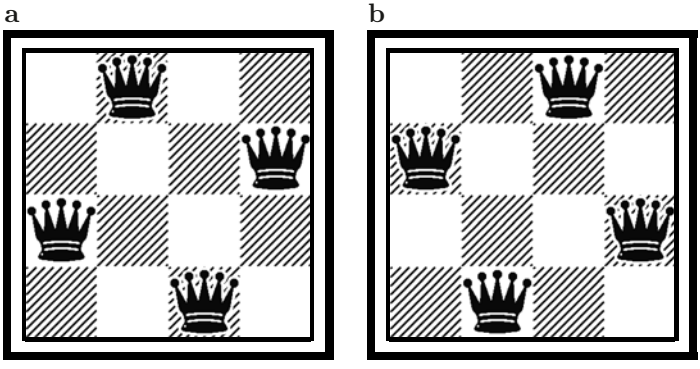

Abb. 2.1 Die Lösungen des 4-Damen-Problems

Mit zunehmender Größe des Spielfelds steigt die Anzahl der Lösungen rasch an: Für N = 5 gibt es 10 zulässige Aufstellungen, im Fall des normalen Schachbretts, d. h. für N = 8, bereits 92, einige davon sind in Abb. 2.2 dargestellt.

Danach wird es allerdings immer unübersichtlicher. Zu Hilfe kommt einem bei der Lösungssuche allenfalls, dass es mit zunehmendem N immer mehr unterschiedliche Anordnungen gibt, bei denen sich die Damen nicht gegenseitig schlagen können. Die Mathematiker haben in ihrem unendlichen Spieltrieb die Anzahl derartiger Konfigurationen gegenwärtig bis zu N = 27 bestimmt – auf einem solchen „Brett" gibt es sage und schreibe 234.907.967.154.122.528, d. h. mehr als 200 Billiarden verschiedene Lösungen, s. Tab. 2.1!

▶ N! (sprich „N Fakultät"): Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis N. Z. B. ist $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

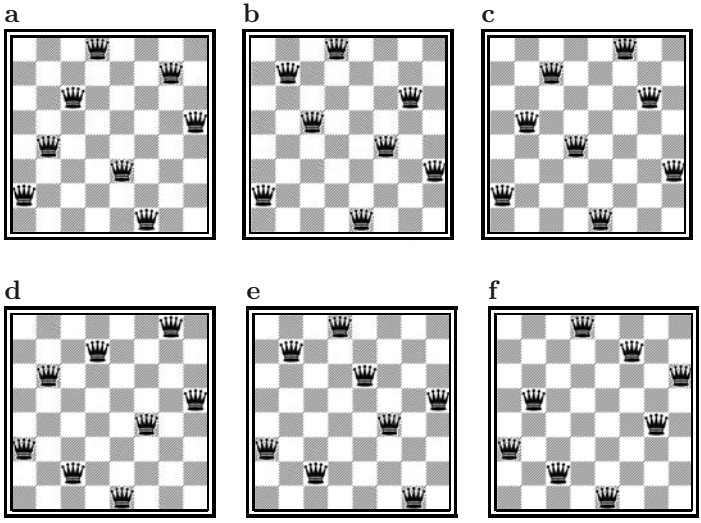

Abb. 2.2 Einige Lösungen des 8-Damen-Problems

Tab. 2.1 Lösungen des N-Damen-Problems, nach [1]

N	Anzahl möglicher Konfigurationen	Anzahl der Lösungen	Anteil der Lösungen an der Menge aller Konfigurationen
4	1820	2	0,1 %
8	$4{,}426 \cdot 10^{9}$	92	$2 \cdot 10^{-6}$ %
12	$1{,}036 \cdot 10^{17}$	14.200	$1 \cdot 10^{-11}$ %
16	$1{,}008 \cdot 10^{25}$	14.772.512	$1 \cdot 10^{-16}$ %
20	$2{,}788 \cdot 10^{33}$	39.029.188.884	$1 \cdot 10^{-21}$ %
24	$1{,}764 \cdot 10^{42}$	227.514.171.973.736	$1 \cdot 10^{-26}$ %
27	$1{,}109 \cdot 10^{49}$	234.907.967.154.122.528	$2 \cdot 10^{-30}$ %

Das N-Damen-Problem scheint in diesem Sinne „leicht“ zu sein: Wo es so viele Lösungen gibt, da muss sich doch ziemlich einfach wenigstens *eine* davon finden lassen. Aber, oh weh, die Lösungen des Problems sind in einer noch viel schneller wachsenden Menge an *möglichen* Konfigurationen, d. h. an möglichen Aufstellungen der Damen, versteckt: Da ein NxN-Brett N^2 Felder hat, kann man der ersten Dame N^2 verschiedene Positionen geben, der zweiten dann noch N^2-1, der dritten N^2-2 usw. bis zur letzten, die auf ein beliebiges der dann noch freien N^2-N+1 Felder gestellt werden kann. Da die Damen ununterscheidbar sind, muss man die sich so ergebende Zahl zwar noch durch N! teilen. Trotzdem bleibt die in Tab. 2.1 angegebene, schier unüberschaubare Zahl von möglichen Konfigurationen übrig.

Wie in dieser riesigen Menge von möglichen Aufstellungen Lösungen des Problems gefunden werden können, soll uns in Kap. 5 beschäftigen. Zunächst wollen wir das N-Damen-Problem aber unter dem Blickwinkel der Optimierung betrachten. Dazu ordnen wir jeder denkbaren Aufstellung eine Zahl zu, die angibt, wie viele der Damen eine andere schlagen können. Mehr noch, wenn eine Dame *mehrere* andere Damen schlagen kann, dann bringt sie entsprechend *mehrere* Punkte in die Bewertung ein – und zwar genau so viele, wie sie Damen schlagen könnte. Abb. 2.3 zeigt einige Konfigurationen mit 4 Damen auf einem 4x4-Spielfeld (dass einige der Damen weiß sind, soll uns im Augenblick nicht interessieren), weitere Beispiele enthält Abb. 3.4.