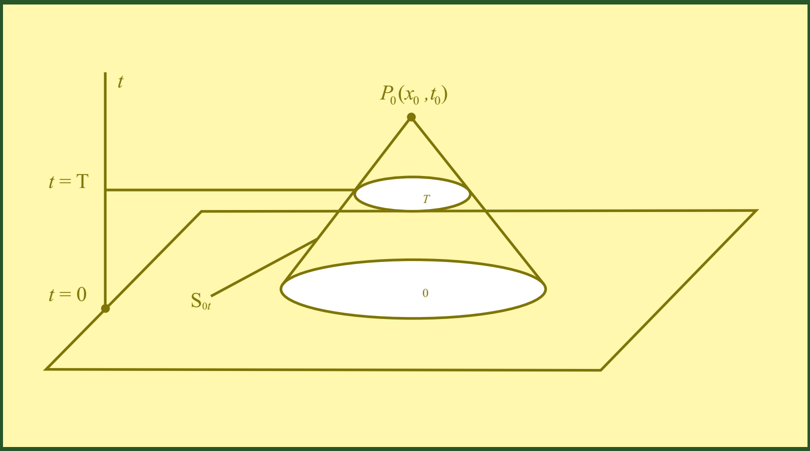
INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA



ANDREI GINIATOULLINE

Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

ANDREI GINIATOULLINE

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
BOGOTÁ, D. C.
2011

Giniatoulline, Andrei, 1964-
Introducción a las ecuaciones de la física matemática / Andrei Giniatoulline. – Bogotá: Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas; Ediciones Uniandes, 2011.
257 pp.; 17 × 24 cm.

ISBN 978-958-695-598-0

1. Física matemática 2. Ecuaciones diferenciales parciales I. Universidad de los Andes (Colombia). Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas. II. Tít.

CDD 530.15 SBUA

Primera edición: abril del 2011

Ediciones Uniandes
Carrera 1 núm. 19-27, edificio AU 6, piso 2
Bogotá, D. C., Colombia
Teléfonos: 339 49 49 - 339 49 99, ext. 2133
http://ediciones.uniandes.edu.co
infeduni@uniandes.edu.co

ISBN: 978-958-695-598-0

Corrección de estilo: Aicardo Sandoval
Diseño y diagramación LaTeX: Margoth Hernández Quitián
Diseño de carátula: David Laverde

Impresión: Kimpres Ltda.
Calle 19 sur núm. 69C- 17, Bogotá, D. C.
PBX: 413 68 84
info@kimpres.com

Impreso en Colombia - Printed in Colombia

A mis profesores

ÍNDICE

Introducción **v**

1 Algunos modelos matemáticos de los procesos físicos **1**

1.1. Deducción de la ecuación de calor 1

1.2. Deducción de la ecuación de onda 6

1.3. El sentido físico de las condiciones de contorno 10

2 El sentido físico de una función generalizada, definición de la función δ de Dirac. El espacio de las funciones básicas D y el espacio de las funciones generalizadas D' **15**

3 El problema de Cauchy para la ecuación de calor **23**

3.1. El espacio de Schwartz S. La transformada de Fourier para las funciones de S, L_1 y L_2 23

3.2. Solución del problema de Cauchy para la ecuación de transmisión de calor con las funciones iniciales de S 30

4 El espacio de funciones generalizadas S'. La transformada de Fourier en S'. Teorema de convolución de dos funciones $\boldsymbol{f(x) \in S, g(x) \in C_b}$ **33**

5 Aplicación del teorema de convolución a la solución del problema de Cauchy para la ecuación de transmisión de calor **43**

5.1. Desarrollo del núcleo de Poisson 43

5.2. Propiedades del núcleo de Poisson: $G(t,x) \xrightarrow[t\to 0]{} \delta(x)$ 47

6 Otras propiedades de las soluciones de la ecuación de calor 51

6.1. Solución del problema de Cauchy para la ecuación de transmisión de calor con una función inicial continua acotada 51

6.2. El problema de Cauchy para la ecuación de transmisión de calor no homogénea. El principio de Duhamel 55

6.3. Unicidad de la solución del problema de transmisión de calor y su dependencia continua de los datos iniciales 57

7 El problema de Cauchy para la ecuación de onda 67

7.1. La desigualdad energética y sus corolarios: la unicidad de la solución y su dependencia continua de los datos iniciales 67

7.2. Solución del problema para los datos iniciales de S 73

8 Algunos resultados de la teoría de las funciones generalizadas 77

8.1. La función δ concentrada en una esfera, su transformada de Fourier 77

8.2. Teorema de la convolución de una función de S con una función generalizada de S' con soporte compacto 80

9 Deducción de la fórmula de Kirchhoff para la solución del problema de Cauchy para la ecuación de onda en el caso de tres variables espaciales. Buena determinación del problema de Cauchy para la ecuación de onda 85

10 El principio de Duhamel para la ecuación de onda no homogénea. La función de Green del problema de Cauchy para la ecuación de onda. Propiedades cualitativas de la propagación de ondas. Velocidad finita de la propagación de ondas 95

11 Primeros conceptos de los espacios de Sobolev 103

11.1. Dos métodos diferentes de definir las soluciones generalizadas. Las derivadas generalizadas y sus propiedades básicas 103

11.2. El espacio de Sobolev W_2^1, su producto escalar y su completitud. Definición del espacio W_p^l 111

12 Algunas propiedades de los espacios de Sobolev **117**

12.1. El espacio de Sobolev $\overset{0}{W}{}_2^1$ 117

12.2. Dos normas diferentes en el espacio $\overset{0}{W}{}_2^1\ (\Omega)$. La desigualdad de Friedrichs 118

12.3. Las funciones medias y sus propiedades: suavidad infinita, convergencia en la norma de L_p, conmutatividad de las operaciones de diferenciación y promediación 121

13 Los espacios W_2^1 y $\overset{o}{W}{}_2^1$ **129**

13.1. Propiedades de contorno de las funciones de W_2^1 y de $\overset{o}{W}{}_2^1$. Un sencillísimo teorema de inclusión: traza de $u \in W_2^1(\Omega)$ en la frontera $\partial\Omega$ como elemento de $L_2(\partial\Omega)$ 129

13.2. La nulidad en promedio de las funciones de $\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ en la frontera $\partial\Omega$. Integración por partes para las funciones de $W_2^1(\Omega)$ y de $\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ 133

14 Otras propiedades del espacio W_2^1 **141**

14.1. La desigualdad de Poincaré 141

14.2. Compacidad de inclusión de un conjunto acotado de $W_2^1(\Omega)$ en $L_2(\Omega)$ 143

15 Algunos problemas de contorno **147**

15.1. La solución generalizada para el primer problema de contorno de la ecuación de Poisson 147

15.2. El primer problema de contorno para ecuaciones más generales 151

15.3. Un caso especial de operador diferencial de segundo orden 152

15.4. Tercer problema de contorno para la ecuación de Poisson 153

16 El método de Galerkin de solución aproximada generalizada del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson 159

17 El método variacional de la solución generalizada para el problema de Dirichlet de la ecuación de Poisson. Propiedades de una sucesión minimizante 167

18 Introducción a las soluciones singulares 177

18.1. Las soluciones fundamentales (singulares) generalizadas de las ecuaciones diferenciales 177

18.2. La solución fundamental para el operador de Laplace 179

19 Dos conceptos de elipticidad 183

19.1. La clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales 183

19.2. Los sistemas elípticos en el sentido de Petrovski y en el sentido de Douglis-Nirenberg 186

20 Aplicación de las convoluciones para la teoría del potencial y los teoremas de inclusión de Sobolev 203

Apéndice A 219

A.1. Los espacios L_p, C^∞ 219

A.2. Algunos teoremas básicos del análisis funcional, las desigualdades de Hölder y Minkovski 224

A.3. Los espacios de Hilbert, el concepto de un funcional 234

Apéndice B 243

B.1. Funciones generalizadas y sus derivadas 243

Bibliografía 257

Introducción

En la mayoría de modelos matemáticos de los diferentes fenómenos de la naturaleza y la sociedad surgen ecuaciones diferenciales en las cuales la función incógnita depende de varias variables. Naturalmente, estas ecuaciones comprenden ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que tienen un gran espectro de aplicaciones. Al desarrollo de ellas han aportado todas las ramas de la matemática moderna tales como el cálculo, el álgebra, la geometría, el análisis funcional, la topología, la teoría de variable compleja y, esencialmente, la teoría de los espacios funcionales de dimensión infinita. Como casi todos los procesos físicos se describen por medio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, tales ecuaciones se llaman frecuentemente ecuaciones de la Física Matemática. Observemos que las ecuaciones diferenciales parciales describen también fenómenos químicos, biológicos, económicos y otros. Este curso tiene como objetivo la presentación teórica de las ecuaciones básicas de la física matemática como las ecuaciones de Lagrange, Poisson y las de transmisión de calor y de onda; la deducción de las propiedades cualitativas de sus soluciones por el método de la transformada de Fourier, e igualmente el concepto de una solución generalizada en el sentido de los espacios de Sobolev. Se introduce el concepto de una solución generalizada y se discuten sus aplicaciones en varios problemas de contorno para la ecuación de Poisson que es una de las ecuaciones más importantes de la Física Matemática. La existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación de Poisson se demuestran por tres métodos diferentes como el teorema de Riesz sobre la forma de un funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert, el método de Galerkin y el método variacional. Los dos últimos métodos permiten, además, construir un algoritmo explícito de las soluciones aproximadas. Para la consideración de estos problemas, se introduce el concepto de una función generalizada y se estudian sus propiedades más importantes. La teoría de las funciones generalizadas es una parte importante del análisis que extiende el concepto de una función a los funcionales lineales continuos, actuando sobre un espacio determinado de funciones básicas. El desarrollo rápido de las funciones generalizadas fue estimulado por las exigencias de la física, en particular, de la física cuántica y la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Actualmente, la teoría de las funciones generalizadas está muy desarrollada y es una herramienta diaria de un matemático, un físico o un ingeniero. Este curso hace énfasis teórico, orientado principalmente a los estudiantes de la carrera de matemática, también puede ser útil para los físicos e ingenieros que estén interesados en una avanzada base teórica. Una de las características de este texto es la deducción detallada de todos los resultados con demostraciones y su metodología orientada hacia un curso de un semestre de duración. A diferencia de la mayoría de los textos sobre el tema, este curso es relativamente corto y sencillo. En tres ocasiones, en aras de no alargar demasiado el curso, las pruebas de los teoremas se limitaron a casos particulares. Como prerrequisito, es deseable análisis funcional. Sin embargo, algunos conceptos básicos del análisis funcional a los que se hace referencia a lo largo del curso, se encuentran en el apéndice de este texto, lo que hace posible, con algún esfuerzo adicional del estudiante, reducir los prerrequisitos a un curso estándar de ecuaciones diferenciales. Quisiera expresarle mi agradecimiento al profesor G. Téllez por sus sugerencias, correcciones y consejos durante la revisión del texto. Igualmente quisiera agradecer al Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes profesor René Meziat por su apoyo, atención y seguimiento en el proceso de edición de este libro.

CAPÍTULO 1

ALGUNOS MODELOS MATEMÁTICOS DE LOS PROCESOS FÍSICOS

1.1. Deducción de la ecuación de calor

Veamos un cuerpo tridimensional Ω, cuya temperatura en el punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ está representada por la función $u(t, x)$ para cualquier momento t, y supongamos que la función $u(t, x)$ tiene derivadas continuas de segundo orden respecto a x_i, $i = 1, 2, 3$, y de primer orden con respecto a t: $u(t, x) \in C^{1,2}_{t,x}(\Omega)$.

La deducción de la ecuación de transmisión de calor se basa en la siguiente ley física experimental: si diferentes partes de un sólido tienen temperaturas distintas, entonces, en el cuerpo aparecen unos flujos de calor, dirigidos desde las partes calientes hacia las frías.

Consideremos una superficie S que está dentro del cuerpo Ω; sea $\vec{n}$ - su vector de la normal exterior.

La cantidad de calor q que pasa a través de la superficie S en dirección del vector $\vec{n}$ durante el intervalo de tiempo $[t_1; t_2]$ se determina como:

$$q = -\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} ds \right\} dt. \tag{1.1}$$

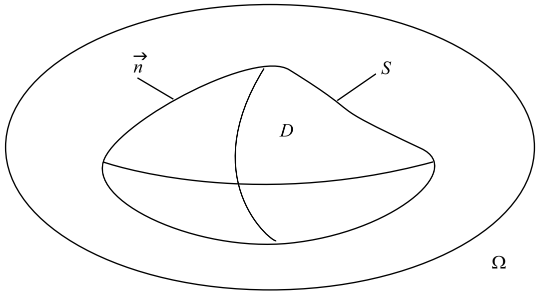


Figura 1.1.

Aquí $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ - es la derivada direccional en el punto x de la superficie S a lo largo del vector $\vec{n}$; $k(x)$ es una función positiva y su significado físico es el coeficiente de la conductividad de calor en el punto x. La integral (1.1) representa la ley física de Fourier, según la cual la cantidad de calor dq que pasa a través de un elemento de superficie ds durante el incremento del tiempo elemental dt es igual a

$$dq = -k(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dsdt.$$

Supongamos que $k(x) \in C^1(\Omega)$. La cantidad de calor que sale del volumen D acotado por la superficie S, está dada por (1.1). Por otro lado, este calor es igual a

$$\iiint\limits_D c(x)\cdot\rho(x)[u(t_1,x)-u(t_2,x)]\, dx, \tag{1.2}$$

donde $\rho(x)$ es la densidad del cuerpo y $c(x)$ es la capacidad térmica. Igualando (1.1) y (1.2), obtendremos

$$\iiint\limits_D c(x)\cdot\rho(x)[u(t_1,x)-u(t_2,x)]dx =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\iint\limits_S k(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}ds\right\}dt. \tag{1.3}$$

Representando

$$u(t_2, x) - u(t_1, x) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}\, dt$$

en el lado izquierdo de (1.3) tendremos

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint\limits_{D} c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx \right\} dt$$

Por el teorema de Gauss se cumple

$$\iint\limits_{S} k(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds = \iiint\limits_{D} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx.$$

Por lo tanto, de (1.3) podemos concluir que:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint\limits_{D} \left[c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right] dx \right\} dt = 0.$$

Como las funciones que están dentro de la integral son continuas y el volumen D y el intervalo de tiempo $[t_1; t_2]$ son arbitrarios, la última identidad implica que $\forall x \in \Omega,\ \forall t$ se tiene

$$c(x) \cdot \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big). \tag{1.4}$$

La ecuación (1.4) es la ecuación de transmisión de calor para un sólido no homogéneo.

Si el cuerpo es homogéneo, o sea, $k,\ c,\ \rho =$ Constante, entonces, la ecuación (1.4) tiene la forma:

$$\frac{c \cdot \rho}{k} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

donde el operador Δ se define por la fórmula: $\Delta \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Sea $t' = \frac{k}{c\rho} t$. Entonces, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t'} \cdot \frac{k}{c\rho}$; $\frac{\partial u}{\partial t'} = \Delta u$. Denotando nuevamente t' como t, llegamos a la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u. \tag{1.5}$$

Las ecuaciones (1.4) y (1.5) tienen una infinidad de soluciones. Para escoger de ese conjunto una solución determinada hay que plantear unas condiciones adicionales. Es decir, las condiciones de contorno y las condiciones iniciales.

Desde el punto de vista físico se espera que el conocimiento de la distribución de la temperatura dentro del cuerpo en un momento determinado y del régimen térmico en la frontera del cuerpo, determine la distribución de la temperatura en los momentos del tiempo posteriores.

Si el dominio Ω coincide con todo el espacio, entonces la solución de las ecuaciones (1.4), (1.5) para $t > t_0$ se determina únicamente por las condiciones iniciales, que son los valores de $u(t, x)$ para $t = t_0$. Este resultado lo demostraremos más adelante.

Si el dominio Ω es acotado, se puede introducir, además de las condiciones iniciales, la temperatura en cada punto de la frontera del cuerpo Ω para $t \geq t_0$.

La condición inicial

$$u(x, t) \mid_{t=t_0} = u^0(x, t_0) \tag{1.6}$$

y la condición de contorno

$$u(x, t) \mid_{\partial\Omega} = \varphi(x, t), \ t \geq t_0 \tag{1.7}$$

determinan *el primer problema de contorno*.

Para determinar una solución única se pueden plantear, en lugar de la condición (1.7), los valores de la derivada $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ en la frontera $\partial\Omega$, donde $\vec{n}$ es su vector normal.

Este problema surge cuando se conoce la cantidad de calor que el cuerpo entrega al espacio exterior a través de cada elemento de área ds de la frontera del cuerpo. Ese flujo de calor, según (1.1), es igual a $-k\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dsdt$.

Conociendo el flujo térmico para cada elemento ds de la frontera $\partial\Omega$, se pueden encontrar los valores $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mid_{\partial\Omega}$. En general, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mid_{\partial\Omega}= \varphi(x,t),\ t \geq t_0. \tag{1.8}$$

Las condiciones (1.6), (1.8) determinan *el segundo problema de contorno*.

Supongamos, ahora, que es conocida la temperatura $u_1(t,x)$ del medio exterior del cuerpo y que en su superficie hay intercambio de calor con el medio que lo rodea. Por la ley de Fourier, el calor que pasa del ambiente al cuerpo durante el intervalo $[t_1;\ t_2]$ a través de la superficie S, es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_S k_1(x)(u_1 - u)\, dsdt,$$

donde k_1 es el coeficiente de conductividad térmica exterior entre el cuerpo y el medio que lo rodea, u_1 y u son los valores límites, externos e internos, respectivamente, de la temperatura en la frontera del cuerpo.

Por otro lado, como hemos visto, ese mismo calor es igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S k(x)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, ds \right\} dt,$$

donde concluimos que en la frontera $\partial\omega$ se cumple: $k_1(u_1 - u) = k\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$.

Si llamamos $h(x) = -\dfrac{k_1(x)}{k(x)}$, obtenemos la condición:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + h(x) \cdot u \right) |_{\partial\Omega} = \Psi(x,t) \tag{1.9}$$

Las condiciones (1.6), (1.9) determinan *el tercer problema de contorno* para la ecuación de transmisión de calor.

Observación 1.1. A veces se consideran los casos de láminas y varillas bajo la suposición de que las superficies laterales de la varilla o de lámina sean aisladas térmicamente. Entonces, la ecuación de transmisión de calor se reduce a las siguientes formas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \text{ - para el caso de una lámina,}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ - para el caso de una varilla.}$$

1.2. Deducción de la ecuación de onda

Deduzcamos, ahora, la ecuación de onda para el caso de R^2, o sea, la ecuación de vibraciones de una membrana.

Llamemos *membrana* a una cascarilla delgada elástica que no ofrece resistencia a una deformación que no cambia su área, pero que se opone a un aumento de ésta. Supongamos que en la posición de equilibrio la membrana está posicionada en el plano R^2 y que su forma es la de un dominio plano Ω con frontera L.

Supongamos que sobre la membrana actúa una fuerza exterior cuya densidad en el punto $x = (x_1, x_2)$ es igual a $f(x,t)$ y su dirección es perpendicular al plano R^2:

Bajo la influencia de esta fuerza, la membrana se deforma y llega a ser una superficie cuya ecuación escribiremos como $u = u(x_1, x_2, t)$. El eje OU es perpendicular al plano (x_1, x_2).

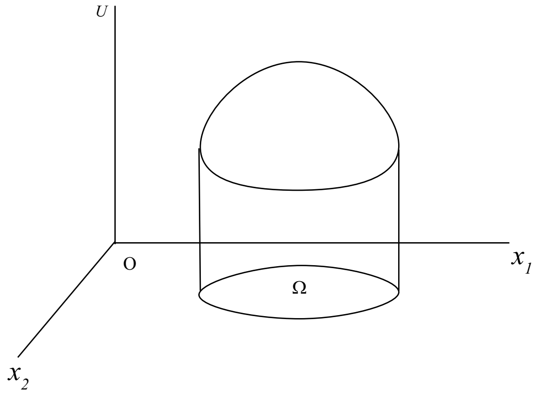


Figura 1.2.

Supongamos, además, que la superficie de la membrana se deforma poco, lo que significa que las derivadas $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$ son pequeñas, por lo que no se tomarán en cuenta sus potencias mayores.

También vamos a suponer que los puntos de la membrana se desplazan perpendicularmente al plano R^2 de manera que sus coordenadas x_1, x_2 no se cambian.

Vamos a basarnos en uno de los principios más importantes de la mecánica según el cual "la variación de los trabajos elementales de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema es igual a cero, para todos los desplazamientos posibles" (véase [14]).

Encontremos el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre la membrana en su desplazamiento desde su estado plano inicial hacia la posición representada por la función $u = u(x_1, x_2, t)$.

El trabajo de la fuerza exterior con densidad $f(x, t)$ se representa por la integral

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, t)u(x, t)\, dx_1 dx_2.$$

Supongamos que el área inicial de la membrana es igual a 1; entonces, como se sabe del cálculo vectorial, el cambio del área durante el desplazamiento es el siguiente:

$$\Delta S = \iint\limits_{\Omega} \left(\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2} - 1 \right) dx_1 dx_2$$

En este caso el trabajo de las fuerzas de elasticidad de la membrana es igual a

$$-T \cdot \iint\limits_{\Omega} \left(\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2} - 1 \right) dx_1 dx_2,$$

donde T es una constante.

Si descomponemos la función de la última integral en una serie de potencias de $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ y no tomamos en cuenta los términos mayores de esta serie, entonces obtendremos la siguiente representación para el trabajo de elasticidad:

$$\frac{-T}{2} \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2$$

Aquí se utilizó el resultado

$$(1+z_1+z_2)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{z_1}{2}+\frac{z_2}{2}+R_1(z_1, z_2), \qquad \lim_{(z_1,z_2)\to(0,0)} \frac{R_1(z_1, z_2)}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} = 0$$

y se supuso que $R_1 = 0$.

Tenemos que tomar en cuenta también la fuerza de inercia de la membrana, cuya densidad es igual a $-\rho \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, donde $\rho(x_1, x_2)$ es la densidad de la membrana.

El trabajo de la fuerza de inercia es igual a $-\iint\limits_{\omega} \rho \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} u \, dx_1 dx_2$.

Finalmente, el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre la membrana en su desplazamiento desde el equilibrio hacia la posición $u(t, x)$ es igual a

$$A(u) = \iint\limits_{\Omega} \left\{ -\frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \left(f - \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \cdot u \right\} dx_1 dx_2. \tag{1.10}$$

Observemos que la integral (1.10) representa la energía total de la membrana. Realicemos un desplazamiento posible, es decir, agreguemos a la función u cierta función δu y calculemos la variación de la integral (1.10):

$$\delta A = A(u + \delta u) - A(u) = \\ = \iint\limits_{\Omega} \left[-T(u'_{x_1} \delta u'_{x_1} + u'_{x_2} \delta u'_{x_2}) + \left(f - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u \right] dx_1 dx_2.$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta u) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \delta u \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot \delta u,$$

entonces,

$$- \iint\limits_{\Omega} [u'_{x_1} \delta u'_{x_1} + u'_{x_2} \delta u'_{x_2}] \, dx_1 dx_2 = \\ = - \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \delta u \right) \right] dx_1 dx_2 + \\ + \iint\limits_{\Omega} \Delta u \delta u \, dx_1 dx_2 = \\ = - \int\limits_{L} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \delta u ds + \iint\limits_{\Omega} \Delta u \delta u \, dx_1 dx_2.$$

Aquí utilizamos la fórmula de integración por partes, conocida del cálculo vectorial:

$$\iint\limits_{\Omega} f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 =$$
$$= \int\limits_L f_1 \cdot f_2 \cdot \cos(\vec{n}, x_1)\, dx_1 dx_2 - \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot f_2\, dx_1 dx_2$$

para el caso particular de $f_1 = 1$ y $f_2 = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\delta u$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\delta u$, donde Δu significa la suma de las segundas derivadas: $\Delta u = \sum\limits_{i=1,2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Finalmente,

$$\delta A = -\int\limits_L T \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \delta u ds + \iint\limits_{\Omega} \left[T\Delta u + f - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] \delta u\, dx_1 dx_2 \quad (1.11)$$

Según el principio de los desplazamientos posibles, tenemos $\delta A = 0$.

La integral $\int\limits_L T \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} \delta u ds$ también es igual a cero, dado que en la frontera $L = \partial\Omega$ se cumple la condición $\delta u = 0$.

En los puntos inferiores del dominio Ω, δu es una función arbitraria continua. De esta manera, de (1.11) concluimos

$$T\Delta u - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f = 0 \quad (1.12)$$

1.3. El sentido físico de las condiciones de contorno

Si la membrana está fija en su frontera, la condición de contorno que le corresponde es

$$u\,|_L = \varphi(x, t) \quad (1.13)$$

donde $\varphi(x,t)$ es la ecuación de la curva en el espacio R^3 que determina la frontera de la membrana, de tal manera que la proyección de φ sobre el plano (x_1, x_2) sea la curva L.

Si la membrana está suelta en su contorno, entonces la función δu es arbitraria también en la frontera y para que se anule la primera integral en (1.11) tenemos que exigir la condición

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_L = 0. \tag{1.14}$$

Si la frontera de la membrana está sujeta a la acción de una fuerza con densidad lineal f_1, entonces a la integral (1.10) hay que agregarle el término $\int\limits_L f_1 \cdot u \cdot ds$, de manera que la primera integral en (1.11) se transforma en $\int\limits_L \left(-T\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + f_1\right)\delta u ds.$

Así se obtiene la siguiente condición de contorno, que generaliza la fórmula (1.14):

$$T\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_L = f_1. \tag{1.15}$$

Ahora, si la fijación de la membrana es elástica, entonces la fuerza que actúa sobre su borde es proporcional al desplazamiento:

$$f_1\mid_{\delta\Omega} = ku\mid_{\delta\Omega}.$$

En este caso la condición de contorno tendrá la siguiente forma:

$$\left.\left(T\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - ku\right)\right|_L = 0. \tag{1.16}$$

Para determinar las soluciones de la ecuación (1.12) es necesario introducir las condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(x,t)\mid_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Psi(x) \end{cases};\; x = (x_1, x_2) \in \Omega. \tag{1.17}$$

Si la membrana es tan grande que la influencia de la frontera es insignificante, entonces se consideran las vibraciones de todo el plano ($\Omega = R^2$) sujetas a la ecuación (1.12).

En este caso, para la unicidad de la solución bastan las condiciones (1.17).

En el caso de considerar la influencia de la frontera, tenemos tres tipos de condiciones de contorno: (1.13), (1.15), (1.16).

El problema (1.12, 1.13, 1.17) se llama *el problema de Dirichlet o el primer problema de contorno* para la ecuación de onda.

El problema (1.12, 1.15, 1.17) lleva el nombre de *Neumann* y también se llama *el segundo problema de contorno*.

El problema (1.12, 1.16, 1.17) se conoce como *el tercer problema de contorno*.

Si la fuerza exterior es estacionaria, la ecuación (1.12) para la membrana se transforma en

$$\Delta u(x) = F(x),$$

la cual se llama *la ecuación de Poisson*.

Si se estudian las vibraciones de un medio tridimensional, que pueden ser, por ejemplo, vibraciones de un gas u ondas de sonido, entonces, se puede demostrar, de manera análoga al caso de las vibraciones de membrana, que la función $u(t,\, x_1,\, x_2,\, x_3)$ que caracteriza la desviación de la presión normal en el punto $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ en el momento t, satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right). \tag{1.18}$$

donde a^2 es una constante.

La ecuación (1.18) se llama *la ecuación de onda*.

Muchos procesos de vibraciones (ejemplo, vibraciones electromagnéticas) se describen mediante la ecuación (1.18).

En el caso de una dimensión, que podría ser el de vibraciones de una cuerda o de un gas dentro de un tubo, la función $u(t, x)$ correspondiente satisface la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \tag{1.19}$$

que se llama *la ecuación de vibraciones de una cuerda*.

Aquí $\rho(x)$ significa la densidad lineal en el punto x de la cuerda, T es tensión y $u(t,x)$ es la desviación de la cuerda.

Las condiciones de contorno e iniciales para las ecuaciones (1.18) y (1.19) siguen siendo las mismas.

Observación 1.2. Las ecuaciones (1.12), (1.18), (1.19) se obtuvieron bajo la condición de ignorar los valores $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^4$ a diferencia de $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$, lo que es igual a la suposición de la pequeñez de las vibraciones. Sin esta suposición, las ecuaciones de movimiento del medio elástico tienen una forma no lineal.

Observación 1.3. Como hemos visto, en las ecuaciones de onda y de transmisión de calor entran las expresiones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \text{ o } \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Esto ocurre siempre para las ecuaciones lineales de segundo orden deducidas para un medio isotrópico y homogéneo, porque estas expresiones (o laplacianos) son las únicas combinaciones lineales de las derivadas parciales de segundo orden de u que son invariantes con respecto a cualquier transformación ortogonal (rotación de los ejes del sistema cartesiano de coordenadas).

Observación 1.4. La ecuación de *Laplace* $\Delta u = 0$ describe, por ejemplo, los potenciales del campo de gravitación y del campo electrostático, como también el flujo irrotacional (potencial) de un líquido. Las ecuaciones de Laplace, Poisson, de transmisión de calor y de onda se consideran las ecuaciones básicas de la física matemática.

Ejercicios

1. Considérese una cuerda de longitud l que se encuentra estirada por la fuerza T_0 en la posición rectilínea de equilibrio. En el instante t_0 los puntos de la cuerda se someten a las desviaciones y velocidades iniciales. Plantee el problema de las vibraciones transversales de la cuerda, si los extremos:

   a) Son fijos.

   b) Pueden desplazarse transversalmente.

   c) Tienen fijación elástica, en otras palabras, la resistencia a los desplazamientos transversales en los extremos es proporcional a dichos desplazamientos.

2. Una varilla elástica de longitud l se encuentra fuera del reposo por los desplazamientos y velocidades iniciales longitudinales de sus extremos. Deduzca los problemas de vibraciones longitudinales de la varilla si:

   a) Los extremos son fijos.

   b) Los extremos son libres.

   c) Los extremos se mueven longitudinalmente, según las fórmulas dadas.

3. Deduzca la ecuación de difusión en un medio inmóvil que ocupa el dominio acotado Ω, si se conoce la densidad de las fuentes $F(x,t)$ y la difusión se realiza con absorción. La velocidad de absorción en cada punto $x \in \Omega$ es proporcional a la densidad $u(x,t)$ de la sustancia que se encuentra en difusión. Obtenga las condiciones de frontera para los casos cuando:

   a) En la frontera de Ω se mantiene la densidad dada.

   b) La frontera no es transparente para la difusión.