

Simone Jablonski

Wie potenziell mathematisch begabte Kinder argumentieren

Eine Längsschnittstudie mit Kindern
der Klassenstufen 3 bis 6 im Rahmen
des Enrichmentprogramms „Junge
Mathe-Adler Frankfurt“

MOREMEDIA



Springer Spektrum

Wie potenziell mathematisch begabte
Kinder argumentieren

Simone Jablonski

Wie potenziell mathematisch begabte Kinder argumentieren

Eine Längsschnittstudie mit Kindern
der Klassenstufen 3 bis 6 im
Rahmen des Enrichmentprogramms
„Junge Mathe-Adler Frankfurt“



Springer Spektrum

Simone Jablonski
Goethe-Universität
Frankfurt am Main
Hessen, Deutschland

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften vorgelegt beim Fachbereich 12 der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main von Simone Kathrin Jablonski aus Offenbach am Main Frankfurt am Main 2020 (D 30)
Vom Fachbereich 12 der Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. Lars Hedrich
Erstgutachter: Prof. Dr. Matthias Ludwig
Zweitgutachterin: Prof. Dr. Esther Brunner
Drittgutachter: Prof. Dr. Michael Kleine
Datum der Disputation: 11.12.2020

ISBN 978-3-658-33384-3 ISBN 978-3-658-33385-0 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-33385-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2021

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

Auf dem Weg von der ersten Forschungsidee bis zur fertigen Arbeit habe ich vielseitige Unterstützung erfahren. Ich möchte mich an dieser Stelle bei einigen meiner Wegbegleiter herzlich bedanken.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Prof. Dr. Matthias Ludwig, der mich für das wissenschaftliche Arbeiten begeistern konnte und mich einträchtig in seine Arbeitsgruppe aufgenommen hat. Lieber Matthias, vielen Dank für die Unterstützung meiner Pläne, für deine unermüdliche Problemlösekompetenz, für eine immer konstruktive und humorvolle Arbeitsatmosphäre und für dein Vertrauen in meine Arbeit. Dein Fachwissen, dein Optimismus und die zahlreichen Konferenzbesuche, die du mir ermöglicht hast, haben nicht nur diese Arbeit, sondern auch mich als Person ungemein bereichert.

Ebenfalls möchte ich Prof. Dr. Esther Brunner herzlich für das Interesse an meiner Studie und die hilfsbereite und wertschätzende Betreuung im Rahmen des Zweitgutachtens danken. Deine Rückfragen und Anregungen, liebe Esther, haben mir insbesondere in der Auswertung, in der Schreibphase und in der Überarbeitung wertvolle Ideen für die Arbeit geliefert.

Ohne die organisatorische, ideelle und finanzielle Unterstützung der Stiftung Polytechnische Gesellschaft Frankfurt und der Dr. Hans Messer Stiftung wäre das Programm „Junge Mathe-Adler Frankfurt“ und damit auch mein Promotionsprojekt nicht umsetzbar gewesen. Vielen Dank an alle Beteiligten für die Begeisterung für unsere Ideen und das entgegengebrachte Vertrauen, insbesondere auf der wissenschaftlichen Ebene.

In der organisatorischen und inhaltlichen Umsetzung der „Jungen Mathe-Adler Frankfurt“ möchte ich mich weiterhin ganz herzlich beim Team der Mathe-Adler bedanken. Insbesondere geht mein Dank an Steffen für unsere eingespielte

Zusammenarbeit rund um Knobelaufgaben, Seminarthemen und Technikprobleme. Weiterhin möchte ich mich bei Melanie für die Unterstützung des Teams und bei unseren zahlreichen studentischen Hilfskräften bedanken, die uns in der Betreuung der Kinder, aber auch mich in der Durchführung meiner Studie unterstützt haben. Ihr alle wart mir eine wertvolle Hilfe und habt diese Studie erst umsetzbar gemacht. Mein Dank gilt weiterhin den Eltern und Kindern aus dem Programm „Junge Mathe-Adler Frankfurt“ für das Vertrauen und die Bereitschaft an meiner Studie – zum Teil auch unter erschwerten Covid19-Bedingungen – teilzunehmen.

Mein besonderer Dank gilt meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, die mich inhaltlich, organisatorisch und mental in der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Danke, Annie, dass du mir jegliche Projektorganisation um einiges leichter gemacht hast. Ein ganz herzlicher Dank geht an meine „Doktorfamilie“ Hanna, Joerg, Iwan, Moritz, Simon, Gregor (auch, wenn ich für diese Aufzählung kurzzeitig seinen Dokortitel außer Acht lasse) und Sina. Unsere (konstruktiven) Kaffeepausen, gemeinsamen Projekte, Konferenzreisen und Freizeitaktivitäten haben diese Zeit zu einer ganz besonderen gemacht.

Insbesondere meine Familie und Freunde haben mir viel Unterstützung und Zuspruch entgegengebracht. Ich möchte ganz herzlich Simon, meinen Eltern Dagmar und Jan sowie meinen lieben Freunden Anja, Carina und Jan-Erik für eure Zuversicht, euer Verständnis in jeglicher Hinsicht und die gemeinsame Zeit danken. Danke, dass ihr immer für mich da seid!

Zusammenfassung der Arbeit

Mathematisches Argumentieren im Sinne eines Begründens von (Zahl-) Zusammenhängen ebenso wie eines Aufstellens, Prüfens und Widerlegens von Vermutungen ist zweifelsfrei ein Ziel des Mathematiklernens und Teil des mathematischen Tätigseins – und das bereits im Primarstufenalter. Auch wenn es um die Förderung potenziell mathematisch begabter Kinder geht, so wird die Relevanz, mathematisches Argumentieren zu erlernen, deutlich. Nichtsdestotrotz zeigen beispielsweise die PISA-Ergebnisse (Programme for International Student Assessment), dass es auch potenziell mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe I noch schwerfällt, fachlich korrekt, vollständig und schlüssig zu argumentieren.

Da weitestgehend Konsens darüber herrscht, dass die Entfaltung des Begabungspotenzials ein langfristiger Prozess ist, stellt sich auch die Frage, wie eine langfristige Förderung des mathematischen Argumentierens hiermit in Einklang gebracht werden kann. Bevor diese Frage jedoch beantwortet werden kann, ist zunächst zu untersuchen, wie sich das mathematische Argumentieren bei potenziell mathematisch begabten Kindern längsschnittlich verändert. Zwar gibt es Indikatoren für mögliche Änderungen im Alter zwischen neun und zwölf Jahren aus der Entwicklungspsychologie und der Begabtenforschung, allerdings konzentrieren sich bisherige Studien primär auf Querschnittsanalysen oder allgemeine, bereichsunspezifische Längsschnittanalysen von ausschließlich Begabung oder Argumentieren.

An dieser Stelle knüpft die vorliegende Arbeit an und untersucht in einer Längsschnittstudie, wie sich die mündlichen Argumentationen von potenziell mathematisch begabten Kindern der dritten bis sechsten Klassenstufen ändern.

Die Argumentationsprodukte entstehen in aufgabenbasierten und leitfadengesteuerten Einzelinterviews mit 37 teilnehmenden Kindern aus dem Enrichmentprogramm „Junge Mathe-Adler Frankfurt“. Mit jedem Kind werden vier Datenerhebungen mit einem Abstand von sechs Monaten durchgeführt. Dabei setzt sich die Stichprobe aus drei verschiedenen Altersstufen zusammen, sodass ein Vergleich der Gruppen eine Beobachtungsspanne der Klassenstufen 3 bis 6 abdeckt. Die Argumentationsprodukte werden mithilfe eines eigens entwickelten, passgenauen Analyseschemas für mündliche Einzelinterviews in den Kategorien (1) Struktur des Arguments nach Toulmin, (2) Inhalt des Garanten, (3) Gültigkeit und Geltungsanspruch, (4) Schlussweise und (5) Eigenständigkeit kodiert und analysiert. Das Analyseschema wird im Rahmen der Arbeit mit guten Werten der Interkoderreliabilität empirisch bestätigt.

Die Auswertung der Daten erfolgt multiperspektivisch in mehreren Schritten. Zunächst werden die Ergebnisse in einer quantitativen Inhaltsanalyse dargestellt und anschließend qualitativ auf der Ebene der individuellen Kinder kategorisiert, um Aussagen über die Variabilität und Stabilität einzelner Kategorien zu treffen. Mithilfe zweier Merkmalskombinationen erfolgt eine Typenbildung, ebenfalls in Hinblick auf Veränderungen beim Argumentieren. Letztlich werden die gebildeten Typen mit bewertenden Überlegungen und mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen in Verbindung gesetzt.

Aus den Analysen der Veränderungen in den drei Altersstufen ergeben sich hypothetische Aussagen zur Stabilität bei der Formulierung einer Konklusion, zur altersabhängigen Zunahme der Stabilität bei der Formulierung von Garanten, vollständigen Inhalten und in der Eigenständigkeit sowie zu einer gruppenunabhängig tendenziell zunehmenden Änderung in der Kategorie Gültigkeit. Durch detaillierte Betrachtung der Änderungen in den Kategorien Inhalt und Gültigkeit ergeben sich sechs Typen, die interindividuelle Unterschiede in den Verläufen und bei zwei Typen auch intraindividuelle Unterschiede über den Untersuchungszeitraum aufzeigen und charakterisieren. Aus der Bewertung der Typen ergeben sich in Verbindung mit zwei Typen Probleme beim Argumentieren, nämlich die Formulierung falscher bzw. unvollständiger Garanten, die empirische Argumentation, ein fehlendes Begründungsbedürfnis bzw. keine eigenständigen Garanten, fehlende Sicherheit und Sprachbarrieren. Weiterhin erlaubt die Analyse der Verläufe der Typen prognostische Aussagen zur zeitlichen Veränderung des Argumentierens und zum Auftreten der genannten Probleme. Dabei scheint insbesondere das unvollständige Argumentieren ein Indikator für eine stabile Zuordnung zu einem nicht positiv verlaufenden Typen zu sein. Letztlich ergeben sich aus der Betrachtung des Argumentierens im Kontext einer potenziellen mathematischen

Begabung mögliche Zusammenhänge vom verallgemeinernden Argumentieren zu erhöhten Fähigkeiten im Strukturieren und zur mathematischen Kreativität.

Trotz der Auswahl potenziell mathematisch begabter Kinder zeigen sich eine hohe Heterogenität und interindividuelle Unterschiede beim Argumentieren. Aus diesen Beobachtungen und den ausgeführten Ergebnissen lassen sich konkrete Anregungen ableiten, wie die Förderung mathematischer Begabung mit der Förderung mathematischen Argumentierens in Einklang gebracht werden kann. Dabei werden insbesondere die Thematisierung der Struktur eines Arguments, die Herausarbeitung eines Bewusstseins für die Vollständigkeit von Argumenten sowie die Bedeutung initiierender Fragen hervorgehoben. Weiterhin scheint der Zusammenhang des verallgemeinernden Argumentierens und des Strukturierens vielversprechend für die gemeinsame Förderung mathematischen Argumentierens und einer potenziellen mathematischen Begabung.

Insgesamt hat die Betrachtung von mathematischem Argumentieren im Kontext einer potenziellen mathematischen Begabung deutlich gemacht: Eine ein-dimensionale Veränderungsbeschreibung des mathematischen Argumentierens ist trotz der Einschränkung auf eine potenzielle mathematische Begabung nicht möglich. Die Charakteristika des erarbeiteten Analyseschemas liefern einerseits hypothetisch altersbedingte, aber auch altersunabhängige Veränderungen. Weiterhin zeigen sich je nach Ausprägung eines Typs unterschiedliche Argumentationsstile im Hinblick auf den Inhalt und die Gültigkeit eines Arguments.

Dennoch hat die Typenbildung gezeigt, dass eine Vereinfachung dieser komplexen Veränderungsbeschreibungen möglich ist und darauf aufbauend konkrete Fördermöglichkeiten entwickelt werden können. Gerade die herausgearbeiteten Probleme beim Argumentieren und Prognosen zu Argumentationsverläufen sind als eine wichtige Grundlage zu betrachten. Um mathematisches Argumentieren im Kontext mathematischer Begabung zu fördern, scheint die Vermittlung und Initiierung von methodischen Werkzeugen ebenso wichtig und zielführend wie die Erarbeitung mathematischer Inhalte. Auch der Rückgriff auf mögliche Stärken aus dem Begabungsprofil, insbesondere im Hinblick auf das Strukturieren und die Kreativität der Kinder, kann dies zielführend unterstützen. Letztlich können die aus der Arbeit resultierenden Ergebnisse und Implikationen damit einen konkreten Beitrag zur Förderung mathematischer Begabung und mathematischen Argumentierens – im Sinne eines Lernziels und einer Verstehensgrundlage des Mathematikunterrichts – leisten.

Abstract

Mathematical argumentation in the sense of reasoning (number) relations as well as formulating, proving and disproving assumptions is undoubtedly a goal of learning mathematics and a part of mathematical activities – already at primary level. Even when it comes to the support of potentially mathematically gifted children, the relevance of learning mathematical reasoning can be legitimated. Nevertheless, the PISA results (Program for International Student Assessment), for example, show that it is still difficult for potentially mathematically gifted students in lower secondary level to argue technically correct, completely and conclusively.

Since there is broad consensus that the development of giftedness is a long-term process, the question arises how the long-term support of mathematical reasoning can be reconciled with it. However, before this question can be answered, it is first of all necessary to examine how mathematical reasoning changes longitudinally in potentially mathematically gifted children. Although research in developmental psychology and giftedness suggests that there are indicators of possible changes between the ages of nine and twelve years, previous studies have primarily focused on cross-sectional analyses, or in general, multidisciplinary longitudinal analyses of giftedness or reasoning.

At this point, the present work follows up examining in a longitudinal study how the oral arguments of potentially mathematically gifted children in grades 3 to 6 change. The argumentation products result from task-based and guideline-controlled individual interviews with 37 participating children from the enrichment program “Junge Mathe-Adler Frankfurt”. Four data collections are carried out with each child at intervals of six months. Thereby, the sample is made up of three different age groups, so that a comparison of the groups covers an observation period of grades 3 to 6. The argumentation products are coded and analyzed using a specifically developed scheme of analysis in the categories

(1) Structure of the Argument according to Toulmin, (2) Content of the Warrant, (3) Validity, (4) Inference and (5) Independency. The analysis scheme is adapted to the individual interview setting and empirically confirmed with good values of intercoder reliability.

The analysis involves several multi-perspective steps. Firstly, the results are presented in a quantitative content analysis and then qualitatively categorized at the level of the individual cases in order to make statements about the variability and stability of individual categories. With the help of two combinations of characteristics, typical changes are defined with regard to changes in arguments. Finally, the formed types are connected with evaluative considerations and mathematically specific features of giftedness.

The analysis of the changes in the three age groups provide hypothetical statements on the stability when formulating a conclusion, on the age-dependent increase in stability in the formulation of warrants, complete content and independence, and on a group independent increasing change in the category of validity. A detailed examination of the changes in the categories Content and Validity reveals six types that show and characterize inter-individual differences in the courses and, for two types, intra-individual differences over the investigation period. The evaluation of the types leads to potential problems when arguing, namely the formulation of incorrect or incomplete warrants, the empirical reasoning, a lack of justification or no independent warrants, lack of security and language barriers. Furthermore, the analysis of the types' courses allows prognostic statements on the change in reasoning over time and the occurrence of the problems mentioned. In particular, the incomplete reasoning seems to be an indicator of a stable assignment to a non-positive type. Ultimately, considering arguments in the context of a potential mathematical giftedness gives rise to possible connections from general reasoning to increased structuring skills and an influence on mathematical creativity.

Despite the selection of potentially mathematically gifted children, there is a high degree of heterogeneity and inter-individual differences in arguments. From these observations and the results carried out, concrete suggestions are made as to how the support of mathematical giftedness can be reconciled with the support of mathematical reasoning. In particular, the thematization of the structure of an argument, the development of an awareness of the completeness of arguments, and the importance of initiating questions are emphasized. Furthermore, the connection between generally formulated arguments and structuring abilities seems promising for the support.

Overall, the consideration of mathematical argumentations in the context of a potential mathematical giftedness has made obvious: A one-dimensional description of changes in mathematical argumentations is not possible despite the restriction to potentially mathematically gifted children. The characteristics of the developed scheme of analysis provide on the one hand hypothetically age-related, but also age-independent changes. Furthermore, depending on the characteristics of a type, there are different styles of argumentation with regard to the content and validity of an argument.

Nevertheless, the type formation has shown that a simplification of these complex descriptions of changes is possible. Especially the examined problems and prognostic considerations are an important basis. In order to promote mathematical argumentation in the context of mathematical giftedness, the transmission and initiation of methodological tools seems as important as the development of mathematical content. Further, connections to possible strengths from the giftedness profile, i.e. structuring and creativity, should be taken into account. Ultimately, the results and implications resulting from the work can thus make a concrete contribution to the support of mathematical giftedness and mathematical argumentation – in the sense of a learning goal and a basis for a deeper understanding in mathematics lessons.

Inhaltverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Forschungsinteresse	1
1.2	Aufbau der Arbeit	3
2	Theoretischer Hintergrund zum Argumentieren	7
2.1	Überblick zu Definitionen und Sichtweisen zum Argumentieren	8
2.1.1	Rhetorisch-kommunikative Sichtweise	11
2.1.2	Analytisch-strukturelle Sichtweise	13
2.1.3	Entwicklungspsychologische Sichtweise	25
2.2	Relevante Aspekte des mathematischen Argumentierens	28
2.2.1	Argumentieren als Lernziel und Verstehensgrundlage	30
2.2.2	Argumentieren im Kontext des Begründens und Beweisens	36
2.2.3	Argumentationsprozess und Argumentationsprodukt	43
2.2.4	Mündliches und schriftliches Argumentieren	46
2.2.5	Argumentationsanlässe schaffen	49
2.2.6	Argumentationen analysieren	52
2.3	Eigene Positionierung und Begriffsbestimmung	58
3	Das Begabungspotenzial im Alter der Primar- und unteren Sekundarstufe	61
3.1	Theoretische Ansätze zur Beschreibung von Begabung	62
3.1.1	Positionen und Definitionen	62
3.1.2	Begabung im Kontext von Intelligenztheorien	67
3.1.3	Mehrdimensionale Begabungsmodelle	70
3.2	Mathematische Begabung	75

3.2.1	Kennzeichnung mathematischer Begabung	77
3.2.2	Merkmale mathematischer Begabung	84
3.2.3	Förderung mathematischer Begabung	88
3.3	Eigene Positionierung und Begriffsbestimmung	91
4	Herleitung des Forschungsdesiderates	95
4.1	Zusammenfassung des Forschungsstandes	95
4.2	Mathematisches Argumentieren im Kontext von mathematischer Begabung	98
4.3	Ableitung der Forschungsfragen	101
5	Methodisches Vorgehen	103
5.1	Konzeption und Durchführung der Studie	103
5.2	Das Enrichmentprogramm „Junge Mathe-Adler Frankfurt“	106
5.2.1	Ziele	107
5.2.2	Organisation und Förderung	107
5.2.3	Diagnostik	110
5.2.4	Charakteristika der Stichprobe	112
5.3	Die Indikatoraufgaben	113
5.4	Die Interviews	117
5.4.1	Charakterisierung der Interviews	117
5.4.2	Aufgabenformate der Interviews	118
5.4.3	Aufbau der Interviews hinsichtlich Argumentationen	124
5.4.4	Der Interviewleitfaden	126
5.4.5	Die Interviewerhebung	126
5.4.6	Transkription	130
5.5	Pilotierung	132
5.5.1	Konzeption und Zielsetzung	132
5.5.2	Ablauf und Stichprobe	132
5.5.3	Ergebnisse der Pilotstudie	133
5.6	Entwicklung und Operationalisierung eines Analyseschemas	136
5.6.1	Dimensionen und Kategorien des Analyseschemas	139
5.6.2	Zusammenfassung und Festlegung des Kodierschemas	145
5.6.3	Beispielanalysen	147
5.6.4	Übertragbarkeit auf schriftliche Argumentationsprodukte	151
5.6.5	Bewertende Überlegungen	156
5.7	Auswertungsschema	159
5.8	Gütekriterien	161

5.8.1	Objektivität, Neutralität, kontrollierte Subjektivität	162
5.8.2	Reliabilität, Verlässlichkeit	163
5.8.3	Validität, Glaubwürdigkeit, Gültigkeit	164
5.8.4	Ethische Grundprinzipien	165
5.9	Eingrenzung der Fragestellung	165
5.9.1	Das Enrichmentprogramm „Junge Mathe-Adler Frankfurt“	165
5.9.2	Mündliche Argumentationsprodukte	166
5.9.3	Arithmetik	166
6	Ergebnisse	167
6.1	Die quantitative Inhaltsanalyse zur Übersicht der Daten	168
6.1.1	Quantitative Inhaltsanalyse in der Kategorie Struktur	169
6.1.2	Quantitative Inhaltsanalyse in der Kategorie Inhalt	171
6.1.3	Quantitative Inhaltsanalyse in der Kategorie Gültigkeit	173
6.1.4	Quantitative Inhaltsanalyse in der Kategorie Schlussweise	175
6.1.5	Quantitative Inhaltsanalyse in der Kategorie Eigenständigkeit	176
6.2	Variabilität und Stabilität der Charakteristika der Argumentationsprodukte auf individueller Ebene	177
6.2.1	Veränderung der Argumentationsprodukte in der Kategorie Struktur	178
6.2.2	Veränderung der Argumentationsprodukte in der Kategorie Inhalt	180
6.2.3	Veränderung der Argumentationsprodukte in der Kategorie Gültigkeit	184
6.2.4	Veränderung der Argumentationsprodukte in der Kategorie Schlussweise	186
6.2.5	Veränderung der Argumentationsprodukte in der Kategorie Eigenständigkeit	187
6.2.6	Die Gruppen im Vergleich	189
6.3	Typenbildung	193
6.4	Bewertende Einordnung der Typen	212
6.5	Prognosen zu Veränderungen	216
6.6	Aussagen zum Zusammenhang mit den mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen	219

7 Diskussion	229
7.1 Beantwortung der Forschungsfragen	229
7.1.1 Forschungsfrage zur Analyse von Argumentationsprodukten:	229
7.1.2 Forschungsfragen zu Veränderungen der Argumentationsprodukte:	231
7.1.3 Forschungsfrage zum Zusammenhang von individuellen begabungsspezifischen Merkmalen und Argumentationsprodukten:	235
7.2 Einordnung der Ergebnisse in den Forschungsstand	237
7.3 Konsequenzen für die Förderung potenziell begabter Kinder	239
7.4 Einschränkungen	240
8 Zusammenfassung und Ausblick	243
Literaturverzeichnis	247

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.1	Aufbau der Arbeit	5
Abbildung 2.1	Die Kernelemente des Toulmin-Layouts (vgl. Toulmin, 2003, S. 94)	15
Abbildung 2.2	Toulmin-Layout in erweiterter Form (vgl. Toulmin, 2003, S. 97)	19
Abbildung 2.3	Beispiel mit Toulmin-Layout (Krumsdorf, 2017, S. 113)	20
Abbildung 2.4	Beispielanalyse eines einfachen Schlusses mit dem Toulmin-Layout aus dem Enrichmentprogramm „Junge Mathe-Adler Frankfurt“	21
Abbildung 2.5	Beispielanalyse eines Arguments mit Garant mit dem Toulmin-Layout aus dem Enrichmentprogramm „Junge Mathe-Adler Frankfurt“	22
Abbildung 2.6	Mehrdimensionale Argumentationsstruktur (vgl. Brunner, 2014, S. 39)	24
Abbildung 2.7	Begründen, Argumentieren und Beweisen (vgl. Brunner, 2014, S. 31)	41
Abbildung 2.8	Beziehung Argumentationsprodukt, Argumentationskompetenz und Argumentationsprozess	45
Abbildung 2.9	Analyseschema aus Tebaartz & Lengnink (2015, S. 110)	55
Abbildung 2.10	Kompetenzmodell von Bezold (2009, S. 161)	56
Abbildung 3.1	Definitionsansätze nach Lucito (1964)	64

Abbildung 3.2	Begabungskriterien der Pentagonal Theory von Sternberg et al. (2010)	66
Abbildung 3.3	Drei-Ringe-Modell von Renzulli (vgl. Bardy, 2013, S. 17)	70
Abbildung 3.4	Das Mehr-Faktoren-Modell von Mönks (vgl. Mönks & Katzko, 2010, S. 191)	72
Abbildung 3.5	Das Münchner (Hoch-)Begabungsmodell von Heller (2008, S. 449)	74
Abbildung 3.6	Modell mathematischer Begabungsentwicklung im Grundschulalter von Käpnick und Fuchs (Fuchs, 2013, S. 109)	86
Abbildung 3.7	Übersicht der Fördermaßnahmen zur Förderung mathematischer Begabung	89
Abbildung 4.1	Übersicht zur Herleitung des Forschungsdesiderats ...	96
Abbildung 5.1	Überblick zum methodischen Vorgehen unter Berücksichtigung der theoretischen Überlegungen und Forschungsziele	104
Abbildung 5.2	Logo des Enrichmentprogramms	106
Abbildung 5.3	Impressionen aus den Forscherstunden der „Jungen Mathe-Adler Frankfurt“	109
Abbildung 5.4	Impressionen der Exkursionen im Rahmen der „Jungen Mathe-Adler Frankfurt“	110
Abbildung 5.5	Dreistufige diagnostische Auswahl im Programm „Junge Mathe-Adler Frankfurt“	111
Abbildung 5.6	Indikatoraufgabe zum Strukturieren (Nach Käpnick, 2001, S. 175)	114
Abbildung 5.7	Darstellung von Tor 1 und 2 (Nach Fuchs & Käpnick, 2009)	115
Abbildung 5.8	Darstellung zur Aufgabe Dreieckszahlen (Nach Käpnick, 2001, S. 177)	115
Abbildung 5.9	Boxplots für die Ergebnisse der Indikatoraufgaben ...	117
Abbildung 5.10	Zahlenmauern mit Addition und Multiplikation	119
Abbildung 5.11	Schülerlösung Zahlenmauern (mit Operation Addition) mit vertauschten Grundsteinen	121
Abbildung 5.12	Zahlengitter mit Addition und Multiplikation	122
Abbildung 5.13	Schülerlösung Zahlengitter (mit Operation Addition) mit vertauschten Pfeilzahlen	123
Abbildung 5.14	Grafische Darstellung des Aufbaus der Interviews in Bezug auf Argumentationstätigkeiten	125

Abbildung 5.15	Zeitliche Übersicht der Interviewdatenerhebung	128
Abbildung 5.16	Nummerierung Zahlenmauer	131
Abbildung 5.17	Nummerierung Zahlengitter	131
Abbildung 5.18	Boxplot zur Übersicht der Interviewzeiten	135
Abbildung 5.19	Vergleich der Niveaustufen zur Aufgabe 1	138
Abbildung 5.20	Vergleich der Niveaustufen zur Aufgabe 2	139
Abbildung 5.21	Übersicht über die Dimensionen und Kategorien des Analyseschemas	140
Abbildung 5.22	Zahlenmauer mit den Grundsteinen 50, 20 und 10	140
Abbildung 5.23	Toulmin-Layout in erweiterter Form (vgl. Toulmin, 2003, S. 97)	141
Abbildung 5.24	Modellhafte Darstellung des Kodierschemas	146
Abbildung 5.25	Berechnung der Zahlenmauern als Grundlage für Aufgabe 3	147
Abbildung 5.26	Berechnung der Zahlengitter als Grundlage für Aufgabe 3	149
Abbildung 5.27	Beispielanalyse eines einfachen Schlusses mit Toulmin	152
Abbildung 5.28	Beispielanalyse eines Arguments mit Garant mit Toulmin	153
Abbildung 5.29	Beispielantwort unvollständiger Garant	154
Abbildung 5.30	Beispielantwort vollständiger Garant	154
Abbildung 5.31	Beispielantwort beispielgebundene Konklusion	155
Abbildung 5.32	Beispielantwort verallgemeinernde Konklusion	155
Abbildung 5.33	Übersicht der bewertenden Überlegungen für die Kategorien des Analyseschemas	158
Abbildung 6.1	Übersicht der Auswertungsschritte zur Ergebnispräsentation	168
Abbildung 6.2	Visuelle Darstellung der gebildeten Intervalle	177
Abbildung 6.3	Streudiagramm vollständige und verallgemeinerte Elemente der Datenerhebung t_1	196
Abbildung 6.4	Streudiagramm vollständige und verallgemeinerte Elemente der Datenerhebung t_4	197

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1	Argumentationsanlässe zusammengefasst nach Bezold (2009) und Büchter & Leuders (2011)	50
Tabelle 3.1	Mathematikspezifische Begabungsmerkmale für die Klassenstufen 3 und 4 (Käpnick, 1998, S. 108–118)	83
Tabelle 3.2	Mathematikspezifische Begabungsmerkmale für die Klassenstufen 5 und 6 (Sjuts, 2017, S. 137–140)	85
Tabelle 3.3	Problemlösestile begabter Kinder der Klassenstufen 3 und 4 (Fuchs & Käpnick, 2009, S. 12 ff.)	87
Tabelle 5.1	Übersicht der Fördergruppen und Teilnehmerzahlen	108
Tabelle 5.2	Übersicht der Fördergruppen	112
Tabelle 5.3	Merkmale und Fertigkeiten in den eingesetzten Indikatoraufgaben	113
Tabelle 5.4	Übersicht Ergebnisse der Indikatoraufgaben	116
Tabelle 5.5	Übersicht der Aufgaben in Hinblick auf Argumentationen	125
Tabelle 5.6	Übersicht der Aufgaben und kritische Nachfragen im Leitfaden	127
Tabelle 5.7	Übersicht der an der Studie teilnehmenden Kinder	129
Tabelle 5.8	Gruppeneinteilung bezüglich der Reihenfolge der Interviews	130
Tabelle 5.9	Auszug aus dem Interviewtranskript 2_06_1 vom 28.05.2018, Zeile 97–116 zur Aufgaben 3 (ZM-Add)	148
Tabelle 5.10	Übersicht der Analyse zum Interviewtranskript 2_06_1 vom 28.05.2018, Zeile 97–116	149
Tabelle 5.11	Auszug aus dem Interviewtranskript 1_06_1 vom 28.05.2018, Zeile 102–133 zur Aufgaben 3 (ZG-Add)	150

Tabelle 5.12	Übersicht der Analyse zum Interviewtranskript 1_06_1 vom 28.05.2018, Zeile 102–133	151
Tabelle 5.13	Richtwerte für Cohens Kappa (κ) nach Fleiss und Cohen (Döring & Bortz, 2016, S. 346)	163
Tabelle 5.14	Cohens Kappa (κ) für die Pilotstudie	163
Tabelle 5.15	Cohens Kappa (κ) für die Hauptstudie	164
Tabelle 6.1	Quantitative Inhaltsanalyse in der Kategorie Struktur	169
Tabelle 6.2	Globale Änderung der strukturellen Elemente aus dem Toulmin-Layout	170
Tabelle 6.3	Quantitative Inhaltsanalyse in der Kategorie Inhalt	172
Tabelle 6.4	Quantitative Inhaltsanalyse für die Gültigkeit der Konklusionen	173
Tabelle 6.5	Quantitative Inhaltsanalyse für die Gültigkeit der Garanten	174
Tabelle 6.6	Quantitative Inhaltsanalyse in der Kategorie Schlussweise	175
Tabelle 6.7	Quantitative Inhaltsanalyse in der Kategorie Eigenständigkeit	176
Tabelle 6.8	Individuelle Änderungen im Gruppenvergleich in der Kategorie Eigenständigkeit	188
Tabelle 6.9	Übersicht der drei Gruppen mit ausgewählten Charakteristika auf globaler (zum Zeitpunkt 4.2) und individueller Ebene	191
Tabelle 6.10	Merkmalsraum als Grundlage für die Typenbildung	194
Tabelle 6.11	Zuordnung zu den Ausprägungen der Vergleichsdimensionen	195
Tabelle 6.12	Verteilung der Merkmalskombinationen in den Gruppen	199
Tabelle 6.13	Zeitachse für Fall 1_11	200
Tabelle 6.14	Darstellung der Fälle nach Zuordnungen zu den Merkmalskombinationen	200
Tabelle 6.15	Zeitachsen der Zuordnungen zu Typ 1.1	201
Tabelle 6.16	Zeitachsen der Zuordnungen zu Typ 1.2	203
Tabelle 6.17	Zeitachsen der Zuordnungen zu Typ 2.1	205
Tabelle 6.18	Zeitachsen der Zuordnungen zu Typ 2.2	207
Tabelle 6.19	Zeitachsen der Zuordnungen zu Typ 3	209
Tabelle 6.20	Zeitachsen der Zuordnungen zu Typ 4	211
Tabelle 6.21	Übersicht zur prognostischen Analyse der Verlaufsformen	218

Tabelle 6.22	Auswahl der Einzelfälle für jeden Typen in Abhängigkeit vom Abschneiden im Indikatorrest	220
Tabelle 6.23	Kategorien aus dem Datenmaterial zur Interviewaufgabe 5	221
Tabelle 7.1	Hypothetische Aussage zur Stabilität und Variabilität	231
Tabelle 7.2	Übersicht zu den Charakteristika der gebildeten Typen ...	233
Tabelle 7.3	Übersicht zu den Typen und mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen	236



1.1 Motivation und Forschungsinteresse

Begründen, Argumentieren und Beweisen lassen sich als zentrale Lernziele des Mathematikunterrichts, aber auch als wichtige Verstehensgrundlagen des Mathematiklernens beschreiben (Hanna, 2000, S. 5 f.). Insbesondere im Sinne der zweiten Winterschen Grunderfahrung, bei der die Mathematik als deduktiv geordnete Welt wahrgenommen wird, zeigt sich die Relevanz des Beweisens sowie des Begründens und Argumentierens als seine propädeutischen Formen deutlich. „Mathematical reasoning and proof offer powerful ways of developing and expressing insights about a wide range of phenomena. Reasoning and proof should be a consistent part of students’ mathematical experiences in pre-kindergarten through grade 12.“ (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, S. 56 ff.). Diese Verankerung des Argumentierens und Beweisens als prozessbezogene mathematische Kompetenzen in den internationalen Bildungsstandards für die Primar- und Sekundarstufe unterstreicht deren Bedeutung für die Mathematik und den Mathematikunterricht. Dabei betonen die Bildungsstandards – hier als Repräsentant die NCTM-Standards – wie angeklungen nicht nur das Ziel, Begründen, Argumentieren und Beweisen zu erlernen, sondern auch deren Bedeutung für den Erwerb tiefgehender mathematischer Kenntnisse. Bereits in der Primarstufe werden Argumentationen als wichtige Grundlage für das spätere Erlernen des Beweisens verstanden (Schwarzkopf, 2000, S. 4).

Trotz dessen Bedeutung weisen internationale Schulleistungsstudien, wie PISA, TIMS und COACTIV, darauf hin, dass deutsche Schülerinnen und Schüler beim Argumentieren Defizite haben. Argumentieren stellt – sowohl in schriftlicher als auch in mündlicher Form – für viele Schülerinnen und Schüler eine

hohe Herausforderung dar (Bezold, 2009, S. 16). Die Annahme, dass potenziell mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler erhöhte Fähigkeiten beim Argumentieren haben, erscheint zunächst legitim. Die Beobachtungen von Defiziten beim Argumentieren beschränken sich jedoch keinesfalls auf die unteren Leistungsniveaus, sondern beschreiben ein übergreifendes Problem, das auch potenziell mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler betrifft. Insbesondere die PISA-Ergebnisse zeigen, dass im internationalen Vergleich „relativ wenige [deutsche] Kinder und Jugendliche die höchsten Kompetenzstufen [erreichen]. Überdurchschnittlich und hochbegabte Schülerinnen und Schüler schöpfen demnach ihr Leistungspotenzial nicht aus.“ (Schneider, Preckel & Stumpf, 2014, S. 11). Mit dem Erkennen dieser Schwierigkeiten auf der einen Seite und dem Ziel, das Begabungspotenzial mathematisch begabter Kinder bestmöglich zu entfalten auf der anderen Seite, zeigt sich aus lernpsychologischer Sicht (auch) bei der Förderung von mathematischer Begabung die Bedeutung der Förderung des Argumentierens und der Argumentationskompetenzen.

Vor der Frage, wie eine effektive Förderung der Argumentationskompetenzen potenziell mathematisch begabter Kinder aussehen kann, stellen sich aber zunächst weitere Fragen. Zum einen ist ein Zusammenhang zwischen mathematischer Begabung und mathematischem Argumentieren nicht eindeutig geklärt (Fritzlar, 2011). Während es Annahmen über das Argumentieren stützende erhöhte Teilfähigkeiten, wie besondere Entdeckungen von mathematischen Strukturen und mathematische Kreativität, gibt (Bardy, 2013), sprechen Aspekte, wie eine besonders stark ausgeprägte mathematische Intuition (Käpnick, 2010b), für ein eher implizites Vorgehen beim Argumentieren potenziell mathematisch begabter Kinder.

Zum anderen ist die Entfaltung des Begabungspotenzials ein Entwicklungsprozess, der über mehrere Jahre andauert (Käpnick, 1998). Entsprechend ist durch diese Langfristigkeit aus forschungstheoretischer Sicht zu berücksichtigen, wie sich das Argumentieren potenziell mathematisch begabter Kinder verändert. Bisherige (Leistungs-)Studien zum Argumentieren konzentrieren sich auf Querschnittsanalysen von Argumentationscharakteristika und -kompetenzen in verschiedenen Altersstufen. Hingegen sind Studien zu Veränderungen des mathematischen Argumentierens über einen längeren Zeitraum selten. Studien aus der Entwicklungspsychologie, beispielsweise die Beschreibung der Entwicklung des Denkens im Alter zwischen acht und zwölf Jahren in der Stufentheorie nach Piaget (Piaget & Inhelder, 1977) und zu Merkmalen mathematisch begabter Kinder der Klassenstufen 3/4 (Käpnick, 1998) und 5/6 (Sjuts, 2017) geben dennoch Hinweise darauf, dass sich in der entsprechenden Altersspanne das Argumentieren der Kinder verändert.

Aus der bisherigen Ausführung ergibt sich – durch Verbindung der lernpsychologischen und der forschungstheoretischen Motivation – das primäre Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit, Veränderungen der Argumentationscharakteristika von potenziell mathematisch begabten Kindern zwischen den dritten bis sechsten Klassenstufen zu beschreiben und zu analysieren.

Dafür ist ein geeignetes Analyseschema zu entwickeln, das die Gegebenheiten der Studie in Bezug auf das Alter der Kinder, die Mündlichkeit als Form der Erhebung, den Produktcharakter der Argumente und den veränderungsbeschreibenden Längsschnittcharakter der Studie berücksichtigt. Mit Betonung dieses Längsschnittcharakters ergeben sich weitere Fragen zur Stabilität bzw. Variabilität der Charakteristika von Argumentationsprodukten, zu typischen Verläufen und zu Bewertungen von Argumentationscharakteristika. Weiterhin wird auch ein möglicher Zusammenhang zwischen den Argumentationscharakteristika und den Verläufen auf der einen Seite und den Merkmalen aus dem individuellen Begabungsprofil auf der anderen Seite untersucht.

1.2 Aufbau der Arbeit

Aus dem Forschungsinteresse ergeben sich zwei für die Arbeit relevante Themenkomplexe: *Mathematisches Argumentieren* und *Mathematische Begabung*. In Kapitel 2 erfolgt zunächst die theoretische Fundierung des mathematischen Argumentierens. Dafür werden interdisziplinäre Definitionsansätze und Sichtweisen auf das Argumentieren vorgestellt, mit besonderer Betonung der kommunikativen Theorie von Habermas und der Argumentationsstruktur von Toulmin, sowie unter Berücksichtigung entwicklungspsychologischer Erkenntnisse von Piaget. Anschließend werden die für die Arbeit relevanten Aspekte des mathematischen Argumentierens aufgeführt und gegebenenfalls zu den vorherigen Perspektiven kontrastiert. Grundlegend sind die Gegenüberstellungen und Ausführungen zum Argumentieren als Kompetenz, Lernziel und Verstehensgrundlage, das Argumentieren im Kontext des Begründens und Beweisens, der Argumentationsprozess und das Argumentationsprodukt, die mündliche, schriftliche und nonverbale Form des Argumentierens, ebenso wie die Schaffung von Argumentationsanlässen und Analyse von Argumentationen. Das Kapitel mündet zusammenfassend in der Formulierung einer Positionierung und Begriffsbestimmung des mathematischen Argumentierens.

Kapitel 3 widmet sich dem Begabungsbegriff zunächst aus allgemeiner Sicht im Hinblick auf Definitionen und Modelle, z. B. von Renzulli, Mönks und Heller.

Anschließend werden die bereichsspezifischen Aspekte mathematischer Begabung vorgestellt, insbesondere die Zusammenstellung von Merkmalskatalogen durch Krutetzki, Kießwetter und Käpnick, aber auch Ideen und Erkenntnisse zur inner- und außerschulischen Förderung mathematischer Begabung. Spätestens durch die Definition des mathematischen Denkens und Tätigseins werden Bezüge zum Argumentieren als grundlegende Tätigkeit des mathematischen Handelns deutlich. Auch dieses Kapitel mündet in einer eigenen Positionierung und der Definition zentraler Begriffe.

Im Kapitel 4 wird – unter Berücksichtigung der Ausführungen in Kapitel 2 und 3 – der aktuelle internationale Forschungsstand in Bezug auf mathematisches Argumentieren und mathematische Begabung zusammengefasst. An dieser Stelle wird insbesondere die Verbindung beider Forschungsgebiete berücksichtigt und unter Zuhilfenahme bereits vorliegender Forschungsarbeiten beschrieben. Abschließend wird das Forschungsdesiderat formuliert, aus dem die Forschungsfragen der Studie hergeleitet werden.

Auf den Forschungsfragen aufbauend und unter Einbezug der theoretischen Ausführungen wird in Kapitel 5 die Methodik der Studie vorgestellt. Zunächst wird die Konzeption der Studie überblicksartig erläutert. Anschließend wird das Enrichmentprogramm „Junge Mathe-Adler Frankfurt“ als Kontext und zur Beschreibung der Stichprobe vorgestellt. Die dort zum Einsatz kommenden Erhebungsinstrumente werden präsentiert, ebenso wie die Durchführung und Ergebnisse der Pilotierung. Aufbauend auf den Daten der Pilotierung ergibt sich die Herleitung des Analyse- und Auswertungsschemas, dessen Kategorien vorgestellt werden. Das Kapitel mündet in der Darlegung der in der Studie berücksichtigten Gütekriterien und der Eingrenzung der Forschungsfragen.

In Kapitel 6 werden die Ergebnisse der Studie präsentiert. Zunächst werden die Veränderungen der Argumente bezüglich der Variabilität bzw. Stabilität ihrer Charakteristika auf globaler und anschließend auf der Ebene der individuellen Kinder beschrieben. Nach einer Darstellung der Ergebnisse für die einzelnen Altersgruppen folgen Vergleiche zwischen den Altersgruppen. Darauf aufbauend erfolgt die Vorstellung verschiedener Argumentationstypen und bewertender Einordnungen der Charakteristika. Weiterhin werden in der Betrachtung relevanter Einzelfälle mögliche Bezüge zum mathematischen Begabungsprofil dargelegt.

In Kapitel 7 werden die Ergebnisse vor dem Hintergrund der formulierten Forschungsfragen diskutiert und im Rahmen der Studie eingegrenzt. Im Schlusskapitel 8 werden die Ergebnisse der Arbeit ausblickartig zusammengefasst und offene Fragen formuliert (Abbildung 1.1).

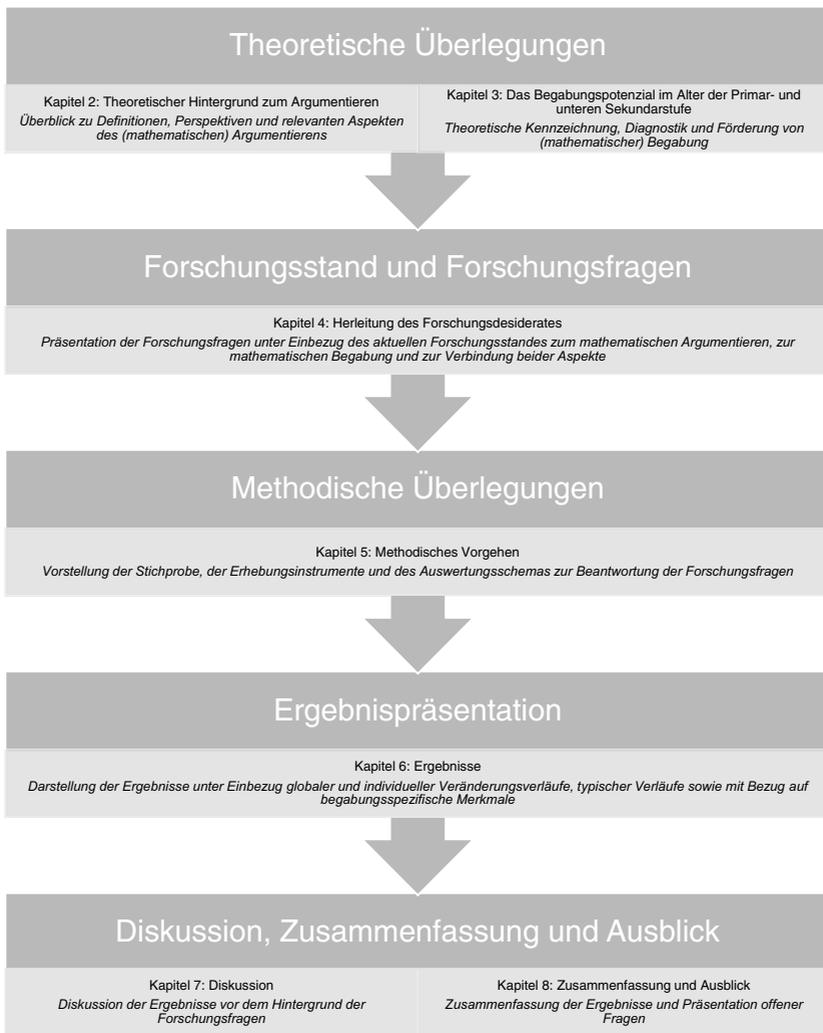


Abbildung 1.1 Aufbau der Arbeit



Theoretischer Hintergrund zum Argumentieren

2

„Denn es ist für die Erhärtung einer Sache ein großer Vorteil und für die Widerlegung eine große Hilfe, wenn man für das Ja wie für das Nein Argumente zur Verfügung hat. Da muß der Gegner nach beiden Seiten auf der Hut sein.“

(Aristoteles Topik VIII, 163b 4 ff., zitiert in Bertau, 1996, S. 113)

Argumente und Argumentationen (vom Lateinischen *argumentum*: Veranschaulichung, Darstellung) sind für die alltägliche, zwischenmenschliche Interaktion und Kommunikation von großer Bedeutung. Ihrem Wortursprung getreu wird eine solche sprachliche Veranschaulichung bzw. Darstellung eingesetzt, um einen Kommunikationspartner¹ zu überzeugen, sei es in Bezug auf die Angemessenheit eines Standpunkts oder die Gültigkeit einer Aussage (Tebaartz & Lengnink, 2015, S. 105). Das Argumentieren scheint ein grundlegendes kommunikatives Bedürfnis des Menschen zu sein und das mit bereits langer Tradition, wie das einführende Zitat belegt. „Tatsächlich reichen die Ursprünge der theoretischen Beschäftigung mit Argumentation bis zu Aristoteles zurück, der vor über 2300 Jahren in seiner „Rhetorik“ die ersten Überlegungen zur „überzeugenden Rede“ anstellte.“

¹Der Begriff „Kommunikationspartner“ wird hier und im Folgenden funktionszuschreibend verwendet. Auf die explizite Kennzeichnung des weiblichen Geschlechts wird entsprechend verzichtet. Diese Handhabung geschieht auch für weitere funktionszuschreibende Rollen, wie „Interviewer“ oder „Forscher“.