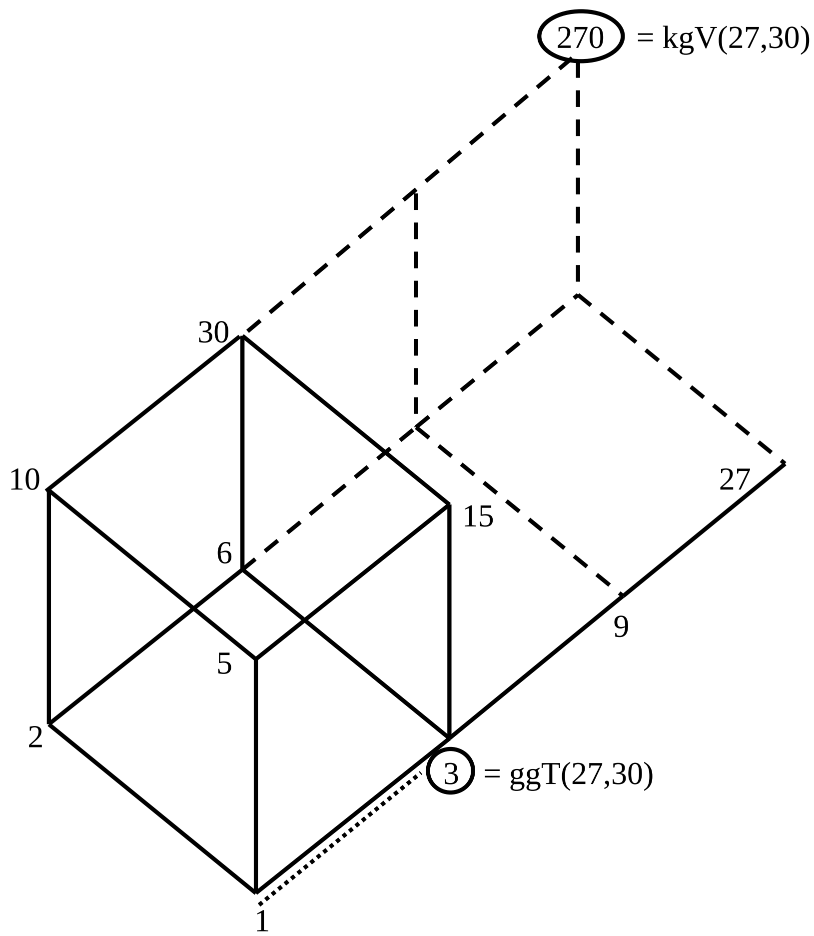
M. Stein

Basiswissen Arithmetik und Zahlentheorie



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

scripta didactica mathematica 2

scripta didactica mathematica

Herausgegeben von
Gilbert Greefrath und Martin Stein

Band 2

MARTIN STEIN

BASISWISSEN ARITHMETIK UND ZAHLENTHEORIE

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2015
ISBN 978-3-942197-79-3

Vorwort

Dieses Buch ist aus Vorlesungen zur elementaren Arithmetik und Zahlentheorie entstanden, die ich seit 1995 immer wieder an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster gehalten habe. Aus der Erfahrung der Vorlesungen heraus wurden an vielen Stellen anschauliche Elemente und konkrete Beweisführungen aufgenommen. Dabei wird stets darauf geachtet, dass eine exakte Formalisierung im Anschluss stattfindet oder doch zumindest grundsätzlich möglich ist.

An der Entwicklung der ersten Skript-Fassungen war Frau Dr. Antje Hoffmann maßgeblich beteiligt, der ich an dieser Stelle für ihr Engagement herzlich danken möchte.

Herr Timon Wies hat sich der mühsamen Aufgabe unterzogen, das ursprüngliche und teilweise unbrauchbar gewordene WordPerfect-Manuskript nach WORD zu übertragen. Für seine sorgfältige Arbeit sei ihm an dieser Stelle ebenfalls herzlich gedankt.

Weitere Überarbeitungen wurden von Frau Katrin Sauer und Frau Yvonne Korflür vorgenommen. Auch Ihnen sei herzlich gedankt.

Den eigentlichen zahlentheoretischen Kapiteln ist ein Kapitel *Bereitstellung der logischen Grundlagen* vorangestellt – dieses enthält Elemente der Logik und der Mengenlehre sowie Informationen über verschiedene Beweistechniken, die nach Ansicht des Verfassers für das Verständnis der folgenden Kapitel notwendig sind. Je nach Schwerpunktsetzung der Vorlesung kann man hier Auswahlen treffen oder das Kapitel ganz überspringen.

Inhaltsverzeichnis

Bereitstellung der logischen Grundlagen

1 Aussagenlogik

Menschliche Kommunikation bedient sich vieler Ausdrucksmittel: Neben der Sprache können wir uns durch Gesten, durch Musik etc. untereinander verständigen.
Mathematische Kommunikation dagegen bedient sich ausschließlich der *Sprache* in Wort und Schrift. Der besonderen Eigenart der „mathematischen Gegenstände“ entsprechend ist diese Sprache eine „Kunstsprache“, die sich zum einen zusätzlicher Zeichen und Symbole bedient, zum anderen vertraute Begriffe in neuer Form benutzt.
Die mathematische Sprache kennt viele verschiedene Formulierungen:

- „Dieser Satz ist trivial“
- „In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Quadrat über der Hypotenuse“
- „Was zu beweisen war“ - oder „wzbw“
- „qued“ (... was das gleiche wie wzbw bedeutet ...)
- „Sei $x \neq 0$ eine natürliche Zahl. Dann nennt man x *Primzahl* genau dann, wenn x keinen nicht-trivialen Teiler hat.“

Argumentieren im zwischenmenschlichen Bereich bedient sich vieler Überzeugungsmittel. Wir können unser Gegenüber durch logische Argumente überzeugen, ebenso wichtig sind aber häufig persönliche Zu- oder Abneigungen etc.
Argumentieren in der Mathematik darf dagegen nur auf logisch einwandfreie Mittel zurückgreifen. Dies sind zum einen allgemein gültige logische Schlussregeln, zum anderen so genannte *Axiome*, die zum Aufbau bestimmter Theorien benötigt werden.

Im Rahmen der im Folgenden behandelten Aussagenlogik werden wir einen ersten Ausschnitt der mathematischen Fachsprache formal erfassen und dabei eine Reihe von Grundregeln des logischen Schließens kennen lernen.

Definition 1: Ein sprachliches Gebilde, das inhaltlich entweder falsch oder wahr ist, heißt **Aussage.**

Aufgrund obiger Charakterisierung können wir jeder Aussage einen Wahrheitswert zuordnen. Eine inhaltlich falsche Aussage erhält den Wahrheitswert (f), eine Aussage, die inhaltlich richtig ist, erhält den Wahrheitswert (r).
Jede Aussage lässt sich also in genau eine von zwei Klassen einordnen, entweder in die Klasse der falschen oder in die Klasse der wahren Aussagen.

1.1 Aussagenlogische Junktoren

Zu jeder Aussage p lässt sich das logische Gegenteil bilden, das **Negat** von p. Wir setzen dafür „$\neg$ p“ (gelesen: „nicht p“). Wir definieren:

Definition 2: $\neg$ p ist genau dann falsch, wenn p wahr ist und genau dann wahr, wenn p falsch ist.

Die Abhängigkeit des Wahrheitswertes von $\neg$ p vom Wahrheitswert von p wird in einer *Wahrheitswertetafel* festgehalten.

Für die Wahrheitswertetafel bedeutet obige Definition demnach:

p	$\neg$ p
w	f
f	w

Bei der Verneinung von Aussagen ist Vorsicht geboten.
Will man die falsche Aussage „4 ist kleiner als 4“ verneinen, so ist das Negat dieser Aussage *nicht* „4 ist größer als 4“ (diese Aussage wäre ja immer noch falsch), sondern das Negat lautet „4 ist nicht kleiner als 4“.
Wirklich interessant ist aber erst die Verknüpfung von Aussagen.

Die Konjunktion

Das logische „und“ entspricht genau der umgangssprachlichen Bedeutung: Wenn wir sagen „Elke ist gut in Mathematik, und Dirk ist gut in Englisch“, so meinen wir damit, dass *beide* Einzelaussagen zutreffen, die eine auf Elke, die andere auf Dirk.
Wir führen für die **Konjunktion** (Und-Verknüpfung) zweier Aussagen p und q das Zeichen p $\wedge$ q ein (gelesen: „p und q“) und setzen fest:

Definition 3: Die Konjunktion p $\wedge$ q ist genau dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind. Diese Definition lässt sich in Form einer Wahrheitswertetafel wie folgt darstellen:

p	q	p $\wedge$ q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiele: 1) p: 3 ist ein Teiler von 18. (w)
q: 3 ist eine Primzahl. (w)
p $\wedge$ q: 3 ist ein Teiler von 18 und 3 ist eine Primzahl. (w)

2) p: Alle Primzahlen sind ungerade. (f)
   q: Die Erde ist keine Scheibe. (w)
   $p \wedge q$: Alle Primzahlen sind ungerade und die Erde ist keine Scheibe. (f)

Man muss jedoch berücksichtigen, dass in der Umgangssprache viele andere Formulierungen für das „und“ gewählt werden können. „Elke ist gut in Mathematik, aber nicht in Englisch.“ bedeutet „Elke ist gut in Mathematik, *und* Elke ist nicht gut in Englisch.“.

Die Alternative

Das logische „oder“ deckt sich nicht immer mit unserer umgangssprachlichen Vorstellung.
Wenn wir sagen „Karl wird versetzt, oder er geht von der Schule ab.“, so meinen wir

1) Es ist möglich, dass Karl versetzt wird. In diesem Fall bleibt er auf der Schule.
2) Es ist möglich, dass Karl nicht versetzt wird. Dann wird er die Schule verlassen.
3) Wenn wir erfahren, dass Karl die Schule verlassen hat, werden wir davon ausgehen, dass er nicht versetzt wurde.

Beim umgangssprachlichen „oder“ wird also in der Regel davon ausgegangen, dass stets eine der beiden Teilaussagen zutrifft, *nicht aber* beide gleichzeitig.
Schärfer und exakter bezeichnet man dies als „Entweder-oder-Verknüpfung“ bzw. als **Alternative**.
Für die Alternative zweier Aussagen p und q verwenden wir das Zeichen $p \underline{\vee} q$ (gelesen: „entweder p oder q“) und definieren:

Definition 4: Die Alternative $p \underline{\vee} q$ ist genau dann wahr, wenn p und q verschiedene Wahrheitswerte haben.

Durch die Wahrheitswertetafel lässt sich das so veranschaulichen:

p	q	$p \underline{\vee} q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die Adjunktion

Das logische „oder“, die **Adjunktion** wird dagegen stets dann gebraucht, wenn *mindestens eine* der beiden Aussagen zutrifft (ggf. also auch beide gleichzeitig).
Für die Adjunktion zweier Aussagen p und q benutzen wir das Zeichen „$p \vee q$“ (gelesen: „p oder q“) und definieren:

Definition 5: Die Adjunktion $p \vee q$ ist genau dann falsch, wenn sowohl p als auch q falsch sind.

Die Wahrheitswertetafel gestaltet sich demnach folgendermaßen:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beispiele: 1) p: Alle Primzahlen sind ungerade. (f)
q: Die Erde ist keine Scheibe. (w)
$p \veebar q$: Entweder sind alle Primzahlen ungerade, oder die Erde ist keine Scheibe. (w)
2) p: 6 ist gerade. (w)
q: 6 ist keine Primzahl. (w)
$p \vee q$: 6 ist gerade, oder 6 ist keine Primzahl. (w)

Die Subjunktion

Die Subjunktion (Wenn-dann-Verknüpfung) lässt sich vielleicht am einfachsten anhand des folgenden Beispiels, einer Wette, verstehen.
„Wenn Karlchen eine 1 in Mathematik bekommt, dann kaufe ich den Eiffelturm." Wir wollen jetzt überprüfen, wann diese Wette eingehalten ist.

1) Bekommt Karlchen tatsächlich eine 1, so muss ich zur Einhaltung der Wette notgedrungen den Eiffelturm kaufen.
2) Bekommt Karlchen keine 1 in Mathematik, so halte ich meine Wette ein, ganz gleich ob ich den Eiffelturm kaufe oder nicht, denn ich habe ja für den Fall, dass Karlchen keine 1 bekommt keine Abmachungen getroffen.
3) Die Wette ist also nur dann nicht eingehalten, wenn Karlchen eine 1 bekommt und ich nicht den Eiffelturm kaufe.

Für die Subjunktion zweier Aussagen p und q setzen wir
„$p \rightarrow q$" (gelesen: „wenn p, dann q") und definieren:

Definition 6: Die Subjunktion $p \rightarrow q$ ist genau dann falsch, wenn p wahr und q falsch ist.

Die Wahrheitswertetafel sieht nun folgendermaßen aus:

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiele: 1) p: 6 ist eine Primzahl. (f)
q: 6 ist ungerade. (f)
$p \rightarrow q$: Wenn 6 eine Primzahl ist, dann ist 6 ungerade. (w)
2) p: 3 ist gerade. (f)
q: 3 ist eine Primzahl. (w)
$p \rightarrow q$: Wenn 3 gerade ist, dann ist 3 eine Primzahl. (w)

Die Bijunktion

Für die Bijunktion (Genau-dann-wenn-Verknüpfung) zweier Aussagen p und q wird im Folgenden das Zeichen „$p \leftrightarrow q$" (gelesen: „genau dann p, wenn q") verwendet, und wir setzen fest:

Definition 7: Die Bijunktion $p \leftrightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn p und q die gleichen Wahrheitswerte haben.

Die Wahrheitswertetafel der Bijunktion $p \leftrightarrow q$ sieht folgendermaßen aus:

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	F	w

Beispiele: 1) p: 2 ist eine Primzahl. (w)
q: 2 ist ungerade. (f)
$p \leftrightarrow q$: Genau dann ist 2 eine Primzahl, wenn 2 ungerade ist. (f)
2) p: Der Klapperstorch bringt die Kinder. (f)
q: 6 ist eine Primzahl. (f)
$p \leftrightarrow q$: Genau dann bringt der Klapperstorch die Kinder, wenn 6 eine Primzahl ist. (w)

1.2 Gesetze der Aussagenlogik

Bisher haben wir die Definitionen einiger aussagenlogischer Verknüpfungen kennen gelernt, die durch die Zeichen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ dargestellt werden. Diese Zeichen werden **Junktoren** genannt.
Im Folgenden soll es nun darum gehen, kompliziertere aussagenlogische Aussagen zu bilden, in denen mehrere Junktoren gleichzeitig vorkommen. Dazu ist es oft notwendig, mit Klammern zu arbeiten, um deutlich zu machen, welche Variablen zuerst miteinander verknüpft werden sollen. Da durch eine zu große Häufung von Klammern mathematische Aussagen unübersichtlich werden, werden Vereinbarungen zur Klammerersparnis getroffen.
Wir kennen das bereits aus dem Bereich der Zahlenalgebra. Dort lautet die Regel „Punkt vor Strich“: Statt 3 + (4 · 5) dürfen wir kürzer schreiben: 3 + 4 · 5, da „·“ stärker *bindet* als „+“.
Entsprechend gelten folgende *Regeln* in der Aussagenlogik:

$\neg$ bindet stärker als $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
$\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$ binden stärker als $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Sicher ist nicht jede willkürliche Aneinanderreihung von Variablen, Junktoren und Klammern eine aussagenlogische Aussage. Folgende Definition gibt nun eine Anleitung zur Bildung aussagenlogischer Aussagen.

Definition 8: 1) Jede Variable p, q, r ist eine aussagenlogische Aussage.
2) Wenn A und B aussagenlogische Aussagen sind, dann auch $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \underline{\vee} B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$.

Mit dieser Definition können wir beliebig komplexe zusammengesetzte Aussagen bilden. Z. B. ist $(\neg p \wedge q) \vee \neg r$ eine aussagenlogische Aussage: p ist gemäß 1) eine Aussage, also auch $\neg p$ gem. 2). Da q eine Aussage gem. 1) ist, ist insgesamt auch $\neg p \wedge q$ eine Aussage gem. 2), usw.

Die Aufstellung von Wahrheitswertetafeln für zusammengesetzte Aussagen erfolgt schrittweise. Wir illustrieren dies an einem Beispiel.

Beispiel:
Für die Aussage $(\neg p \wedge q) \vee \neg r$ soll die Wahrheitswertetafel aufgestellt werden.

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg r$	$(\neg p \wedge q) \vee \neg r$
w	w	w	f	f	f	f
w	w	f	f	f	w	w
w	f	w	f	f	f	f
w	f	f	f	f	w	w
f	w	w	w	w	f	w
f	w	f	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f
f	f	f	w	f	w	w

Es werden also zunächst alle möglichen (2^3) Belegungen der Variablen mit den Wahrheitswerten w und f registriert (Spalten 1-3), dann werden die Verknüpfungen einzeln in der vorgegebenen Reihenfolge durchgeführt.

Nun wollen wir uns mit Aussagen beschäftigen, die entweder für jede Belegung der Variablen wahr sind oder für jede Belegung der Variablen den Wahrheitswert f annehmen. Dazu definieren wir:

Definition 9: 1) Eine aussagenlogische Aussage heißt **tautologisch** (allgemeingültig), wenn sie bei *jeder* Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten stets in eine wahre Aussage übergeht.
Eine solche Aussage heißt **Tautologie**.
2) Eine aussagenlogische Aussage heißt **kontradiktorisch** (unerfüllbar), wenn sie bei *jeder* Belegung der vorkommenden Variablen mit Wahrheitswerten stets in eine falsche Aussage übergeht.
Eine solche Aussage heißt **Kontradiktion**.

Das Besondere an einer Tautologie bzw. Kontradiktion ist also, dass man ohne Kenntnis der Wahrheitswerte der Variablen feststellen kann, dass die Aussage immer wahr bzw. immer falsch ist.

Die Entscheidung, ob eine Aussage einem dieser Spezialfälle zugeordnet werden kann, trifft man wiederum mit Hilfe einer Wahrheitswertetafel. Wir behandeln nun zwei Beispiele.

Beispiele:

1) Wir behaupten, dass die Aussage $\neg p \vee (q \rightarrow p)$ eine Tautologie ist. Anhand der Wahrheitswertetafel erkennt man die Richtigkeit dieser Behauptung.

p	q	$\neg p$	$q \to p$	$\neg p \vee (q \to p)$
w	w	f	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	f	w
f	f	w	w	w

2) Wir wollen jetzt zeigen, dass die Aussage $p \wedge (q \wedge \neg p)$ kontradiktorisch ist. Dazu stellen wir die Wahrheitswertetafel auf.

p	q	$\neg p$	$q \wedge \neg p$	$p \wedge (q \wedge \neg p)$
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

Es ist also gezeigt, dass obige Aussage für jede Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten stets den Wahrheitswert f annimmt.

Logische Äquivalenz und logische Implikation

Die pädagogisch sicher nicht wünschenswerte Aussage
A_1: Du parierst jetzt, oder ich hau Dir eine runter.
meint ja wohl:
A_2: Wenn Du nicht parierst, hau ich Dir eine runter.

Wie kann man das nun formal erfassen?
Wir formalisieren zunächst die Bestandteile der Aussagen:
p: Das Kind pariert.
q: Das Kind bekommt eine Ohrfeige.
Damit ergibt sich nun für die Aussagen:
A_1: $p \vee q$
A_2: $\neg p \to q$

Übrigens: Dem Sprachgefühl folgend könnte man auch für ein „entweder-oder“ plädieren. Wir gehen hier aber von einem „hinreichend willkürlichen“ Vater/Mutter aus und lassen es beim „nicht-ausschließenden oder“.

Jetzt erfassen wir den Wahrheitswerteverlauf in einer Wahrheitswertetafel:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg p \to q$
w	w	w	w	w
w	f	w	f	w
f	w	w	w	w
f	f	f	w	f

Wir sehen: Der Wahrheitswerteverlauf beider Aussagen ist gleich; damit ist aufgrund der Definition der Bijunktion $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$ stets wahr. Dies führt uns zu folgender

Definition 10: Sind A_1 und A_2 aussagenlogische Aussagen, so wird jede Tautologie der Form $A_1 \leftrightarrow A_2$ eine **logische Äquivalenz** genannt.
Statt „$A_1 \leftrightarrow A_2$ ist eine Tautologie“ schreiben wir im Folgenden kurz „$A_1 \Leftrightarrow A_2$“ (gelesen: A_1 ist logisch äquivalent A_2).
Wenn nur eine „Richtung“ des Subjunktionspfeils gilt, spricht man von einer **logischen Implikation.**

Statt „$A_1 \to A_2$ ist eine Tautologie“ schreiben wir im Folgenden kurz „$A_1 \Rightarrow A_2$“ (gelesen: aus A_1 folgt logisch A_2).

Wenn eine Aussage eine Tautologie ist, wird sie auch als **Gesetz** bezeichnet.

Mit dieser Definition können wir einige aussagenlogische Gesetze formulieren.

Satz 11: **Aussagenlogische Gesetze**

1) Kommutativgesetze

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$

2) Assoziativgesetze

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

3) Distributivgesetze

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

4) Absorptionsgesetze

a) $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$

b) $p \wedge q \Rightarrow p$

c) $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$

d) $p \Rightarrow p \vee q$

Man beweist diese Gesetze leicht mit Hilfe von Wahrheitswertetafeln.

Satz 12: **Gesetze über die Negation**

a) Negationsgesetze

1) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \\ 3)\ \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \end{array}\right\} \text{Gesetze von de Morgan}$$

4) $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

5) $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow p \underline{\vee} q$

b) Das tertium non datur

$p \vee \neg p$

Beweis:
Der Beweis dieser Gesetze ist einfach, deshalb wird hier darauf verzichtet.

Beispiel für eine logische Implikation:
Wir behaupten, dass aus A_1: $p \wedge (p \rightarrow q)$ logisch A_2: q folgt.

Zum Beweis stellen wir schrittweise die Wahrheitswertetafel für die Subjunktion $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ auf.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Wir haben also gezeigt, dass gilt: $A_1 \Rightarrow A_2$.

1.3 Schlussregeln der Aussagenlogik

Eine der Hauptaufgaben der Logik ist die Untersuchung des Beweisprozesses. Beweisen heißt, aus Voraussetzungen (**Prämissen**) Folgesätze (**Konklusionen**) zu gewinnen.
Wir werden im Folgenden den Übergang von Prämissen zu einer Konklusion eine **Schlussfigur** nennen. Derartige Schlussfiguren schreiben wir wie folgt auf:

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_n \\ \hline B \end{array}$$

Dabei stellen wir uns vor, dass alle über dem Strich stehenden Aussagen - die Prämissen also - durch ein „und“ zusammengefasst werden und in ihrer Gesamtheit das B implizieren sollen.

Letztlich steht also die obige Schlussfigur für die Aussage

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$$

Wenn man mit derartigen Schlussfiguren „vernünftig“ arbeiten will, ist es wesentlich, dass sie nie von einer wahren Prämisse zu einer falschen Konklusion führt. Sie darf allerdings durchaus von einer falschen Prämisse zu einer falschen oder auch zu einer richtigen Konklusion führen.
Wir definieren daher:

Definition 13: Eine Schlussfigur

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_n \\ \hline B \end{array}$$

ist genau dann **gültig** (richtig), wenn die Subjunktion

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$$

allgemeingültig ist, d.h. wenn gilt:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$$

Derartige Schlussfiguren nennen wir **Schlussregeln**.

Beispiel: Statt $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$ schreiben wir

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \rightarrow q} \\ q \end{array}$$

Nun wollen wir einige häufig verwendete Schlussregeln kennen lernen.

Satz 14: 1) bejahende Abtrennungsregel
(Regel zum modus ponens)

$$\frac{\begin{array}{l} p \\ p \to q \end{array}}{q}$$

2) verneinende Abtrennungsregel
(Regel zum modus tollens)

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

3) Kettenschlussregel (Regel zum modus barbara)

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \end{array}}{p \to r}$$

4) Regel zur Kontraposition

$$\frac{p \to q}{\neg q \to \neg p}$$

Beweis:
1) Der Beweis wird mit der Wahrheitswertetafel erbracht.

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

Da in der letzten Spalte für alle Belegungen der Variablen p und q mit Wahrheitswerten immer der Wahrheitswert w auftritt, ist die Schlussregel gültig.

2)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w

Damit ist die Gültigkeit obiger Schlussregel bewiesen.

2 Mengenlehre

Im Rahmen mathematischer Kommunikation ist es häufig sinnvoll, Gruppen von Objekten zusammenzufassen und mit einem eigenen Namen zu bezeichnen: Wir sprechen von „den“ geraden Zahlen, von „den“ natürlichen Zahlen usw.
Für eine exakte Fassung dieses Sprachgebrauchs benötigen wir den Begriff der Menge, den wir in dieser Veranstaltung in seiner von Georg CANTOR (1845-1918) begründeten Form kennen lernen.

Definition 15: Mengensprech- und Schreibweisen

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von *M* genannt werden) zu einem Ganzen.[1]
Ist a ein Element einer Menge ***A***, schreibt man $a \in \boldsymbol{A}$, ist a kein Element dieser Menge, schreibt man $a \notin \boldsymbol{A}$.

Bemerkungen

1) Mengen werden wir immer mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnen, die **fett** und *kursiv* gedruckt sind, z. B. ***M***, ***G***.
   Elemente werden mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet.
2) Endliche Mengen kann man in *aufzählender Form* angeben. Dabei werden die Elemente durch Kommata getrennt in einer geschweiften Klammer (*Mengenklammer*) angegeben,
   z. B. $\boldsymbol{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
3) Nicht endliche Mengen müssen in der *beschreibenden Form* angegeben werden. Dazu wird eine **Grundmenge *G*** angegeben und eine **definierende Eigenschaft** E. Man schreibt:
   $\boldsymbol{M} = \{x | x \in \boldsymbol{G} \text{ und } E(x)\}$ und spricht: „***M*** ist die Menge aller x, für die gilt $x \in \boldsymbol{G}$ mit der Eigenschaft E.“
   Auch endliche Mengen können in der beschreibenden Form angegeben werden. Statt
   $\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kann man schreiben $\boldsymbol{A} = \{x | x \in \boldsymbol{N} \text{ und } x < 6\}$.
4) ***N*** bezeichnet im Folgenden immer die Menge der natürlichen Zahlen $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Soll die 0 in diese Menge mit einbezogen werden, so schreibt man $\boldsymbol{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. ***Z*** bezeichnet die Menge der ganzen Zahlen $\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$.

[1] Diese Formulierung ist wörtlich entnommen aus Cantor 1960, S. 282