Wahrscheinlichkeits-rechnung

Mathematik 5 – 10

im Griff!

mit Online-Tests

- Das Übungsbuch mit ausführlichen Erklärungen, Aufgaben und Lösungen
- Extra: Jedes Thema mit Online-Abschlusstest

Klett

Heike Homrighausen

Wahrscheinlichkeitsrechnung im Griff
Mathematik 5.–10. Klasse

Klett Lerntraining

Heike Homrighausen ist Gymnasiallehrerin für die Fächer Mathematik und Geschichte in Baden-Württemberg.

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Auflage 4 3 2 1 | 2016 2015 2014 2013
Die letzten Zahlen bezeichnen jeweils die Auflage und das Jahr des Druckes.

Internetadresse: www.klett.de/lernhilfen
Der Online-Zugang zu den Abschlusstests ist bis drei Jahre nach Ersterscheinen des Buches gewährleistet.
Umschlaggestaltung: Sabine Kaufmann, Stuttgart
Umschlagfoto: Klett-Archiv, Stuttgart; Fotograf: Thomas Weccard, Ludwigsburg
Illustrationen: Steffen Jähde, Berlin: S. 13, 19, 45, 68, 97; Klett-Archiv, Stuttgart: S. 15, 32, 45, 73
Redaktionsassistenz: Gabriele Niks
Projektsteuerung + Redaktion: Julia Mühleisen
Satz: DTP-Studio Andrea Eckhardt, Göppingen

ISBN 978-3-12-050159-6

INHALTSVERZEICHNIS

So übst du mit diesem Buch **6**
So funktioniert der Abschlusstest online **7**

Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1

1.1 Zufallsexperimente und Ergebnisse **8**
1.2 Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten I **10**
1.3 Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten II – Laplace-Experimente **12**
1.4 Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten III – von der Erfahrung zur Erwartung **14**
1.5 Darstellung von Zufallsexperimenten in Baumdiagrammen **16**
1.6 Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten **18**
1.7 Ereignis und Gegenereignis **20**
1.8 Verknüpfung von Ereignissen **22**
1.9 Vermischte Aufgaben **26**
Online-Abschlusstest **29**

Mehrstufige Zufallsexperimente 2

2.1 Mehrstufige Zufallsexperimente darstellen **30**
2.2 Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten – die Pfadregeln **34**
2.3 Vereinfachte Baumdiagramme **38**
2.4 Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung **42**
2.5 Erwartungswert einer Zufallsgröße **44**

2.6 Wann sind Glücksspiele fair? – Modellieren mit dem Erwartungswert 46
2.7 Bedingte Wahrscheinlichkeiten 50
2.8 Vermischte Aufgaben 52
Online-Abschlusstest 55

3 Abzählverfahren aus der Kombinatorik

3.1 Das Zählprinzip der Kombinatorik 56
3.2 Das Zählprinzip in der Wahrscheinlichkeitsrechnung 58
3.3 Anzahlen beim Ziehen mit einem Griff – der Binomialkoeffizient 62
3.4 Wahrscheinlichkeit beim Ziehen mithilfe der Kombinatorik berechnen – Modellieren 64
3.5 Vermischte Aufgaben 68
Online-Abschlusstest 71

4 Statistik – Daten erheben, auswerten und analysieren

4.1 Grundwissen Statistik 72
4.2 Statistische Erhebung von Daten 73
4.3 Statistische Erhebungen mit relativen Häufigkeiten vergleichen 76
4.4 Auswertung von Statistiken 78
4.5 Daten darstellen und beurteilen – Boxplots 82
4.6 Voraussagen – empirische Wahrscheinlichkeiten 88
4.7 Simulation von Zufallsexperimenten 86
4.8 Simulation mithilfe von Urnenmodellen 90
4.9 Vermischte Aufgaben 92
Online-Abschlusstest 95

Bernoulli-Experimente und Binomialverteilung

5.1	Bernoulli-Experimente	**96**
5.2	Bernoulli-Ketten	**98**
5.3	Der Binomialkoeffizient – Anzahl der Pfade mit k Treffern	**100**
5.4	Bernoulli-Formel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	**102**
5.5	Mindestens oder höchstens? – Kumulierte Wahrscheinlichkeiten	**104**
5.6	Darstellen von Bernoulli-Experimenten – Binomialverteilung und Histogramme	**108**
5.7	Modellieren mit der Binomialverteilung	
5.8	Vermischte Aufgaben	**112**

Online-Abschlusstest **119**

Lösungen **122**

Stichwortregister **174**

So übst du mit diesem Buch

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

endlich Wahrscheinlichkeitsrechnung kapieren – hast du dir das auch schon mal gewünscht? Dann ist dies genau das richtige Übungsbuch für dich.

Dieses Buch hilft dir dabei, alle wichtigen Themen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu wiederholen und zu üben.

So gehst du am besten vor:

- Suche aus dem Inhaltsverzeichnis das Themengebiet heraus, das du wiederholen möchtest.
- Beginne jedes Kapitel, indem du das **Merkwissen** im grünen Kasten durchliest. Dort steht, wie du vorgehen und was du besonders beachten musst.
- Danach kannst du die Bereiche in immer wechselnden **Aufgabenstellungen** einzeln üben. Lege dir dazu ein Trainingsheft an.
- Vergleiche anschließend deine Ergebnisse mit den Lösungen.

Hast du ein komplettes Kapitel durchgearbeitet? Dann kannst du deinen **Lernerfolg mit den Online-Tests überprüfen**.
Am Ende jedes Kapitels findest du eine Seite, auf der die vorhandenen Tests angezeigt werden.
Dort hast du auch die Möglichkeit dein Testergebnis zu notieren. So siehst du immer, wie fit du in den einzelnen Bereichen schon bist.

Wie du zu den Abschlusstests online kommst, erfährst du auf der nächsten Seite.

So funktioniert der Abschlusstest online

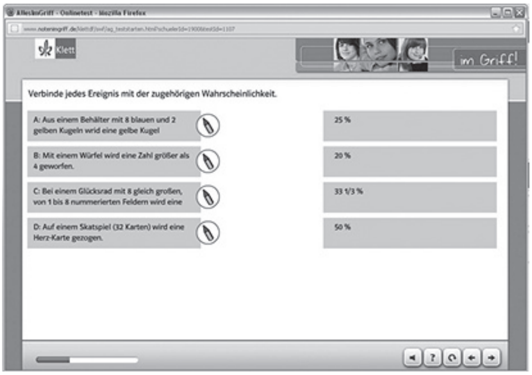
1. So meldest du dich an:
Gehe auf **www.notenimgriff.de** und registriere dich beim ersten Mal mit deiner E-Mail-Adresse und einem von dir selbst ausgewählten Benutzernamen und Passwort.

Bist du registriert, erwartet dich eine Übersicht über alle Übungsbücher dieser Reihe. Klickst du dein Buch an, erhältst du eine Kapitelübersicht.
Gib **oben rechts** folgenden **Code** ein:

MA5ZW57

Die kostenlosen Tests sind jetzt für dich freigeschaltet.

2. So testest du dich:
Klickst du ein Kapitel an, werden die vorhandenen Tests angezeigt.
Jeden Test kannst du beliebig oft wiederholen, mittendrin abbrechen und später beenden.
Wenn du **alle** Aufgaben eines Tests gemacht und abgegeben hast, bekommst du eine Auswertung mit deinem Ergebnis und kannst dir die Lösungen anzeigen lassen.



1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1 Zufallsexperimente und Ergebnisse

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Teilgebiet der Mathematik, das von der **Beschreibung zufälliger Ereignisse** handelt und zur **Vorhersage künftiger Entwicklungen** angewandt wird. Erste Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung stammen aus dem Bereich des Glücksspiels. Heute wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung hauptsächlich dazu genutzt, um Umfrageergebnisse zu analysieren und zu beurteilen und um Prognosen zu erstellen.

Was ist ein Zufallsexperiment?

Mit einem **Zufallsexperiment** oder auch Zufallsversuch ist ein Vorgang mit **zufälligem Ausgang** bezeichnet. Jeder mögliche Ausgang heißt **Ergebnis**.
Bei jedem Zufallsexperiment gilt:

1. Der Vorgang ist (zumindest theoretisch) **beliebig oft durchführbar** und zwar immer nach den gleichen Regeln.
2. Es gibt mindestens **zwei (verschiedene) Ergebnisse**. Alle möglichen Ergebnisse können schon vor der Durchführung angegeben werden. Sie bilden die so genannte **Ergebnismenge** S.
3. Jedes Ergebnis ist **zufällig**, d.h. es kann nicht vorhergesagt werden.

Es gibt im Alltag auch Situationen, bei denen mit einem zufälligen Ergebnis eine Entscheidung getroffen werden soll. Dann führt man ein Zufallsexperiment mit einem geeigneten **Zufallsgerät** durch.

Beispiele:

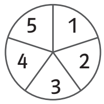
a) Jonas fährt jeden Morgen mit dem Bus in die Schule. Er weiß vorher nie, wie der Bus kommt. Der Bus kann zu spät (Ergebnis s), zu früh (Ergebnis f) oder pünktlich kommen (Ergebnis p).
Die zugehörige Ergebnismenge ist $S = \{s; f; p\}$

In der Regel werden die Elemente der Ergebnismenge mit einem Strichpunkt getrennt, damit es keine Verwechslungen mit Kommazahlen gibt.

b) Beim Würfeln können die Augenzahlen von 1 bis 6 geworfen werden.
Die zugehörige Ergebnismenge ist $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Der Würfel ist das Zufallsgerät.

Aufgabe 1

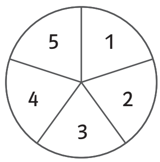
Handelt es sich bei den Situationen um Zufallsexperimente? Kreuze „ja“ oder „nein“ an und begründe deine Entscheidung.

	Situation	ja	nein	Begründung
a)	Eine Karte wird verdeckt aus einem Kartenstapel gezogen.	☐	☐	
b)	Ein Mikadostäbchen wird gezogen.	☐	☐	
c)	Ein Würfel wird geworfen.	☐	☐	
d)	Ein Verschlussdeckel einer Flasche wird geworfen.	☐	☐	
e)	Das abgebildete Glücksrad wird gedreht. 	☐	☐	
f)	Wette über den Ausgang eines Fußballspiels	☐	☐	

Aufgabe 2

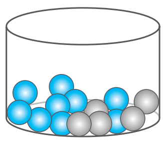
Gib für jedes Zufallsexperiment die Ergebnismenge an.

a) Werfen eines (idealen) Würfels.
b) Werfen eines Tetraederwürfels.
c) Drehen des abgebildeten Glücksrades.
d) Ein Fußgänger läuft auf eine Fußgängerampel zu.
e) Ziehen einer Kugel aus der abgebildeten Urne.



Tetraeder heißt Vierflächner (griech. tetra = vier). Ein Tetraeder besteht aus vier gleich großen Dreiecksflächen.

Aufgabe 3



Zufallsexperimente einmal umgedreht.

a) Zeichne die zugehörigen Zufallsgeräte.
- Ein Glücksrad soll die Ergebnismenge $S = \{1; 2; 3; 4\}$ haben.
- Eine Urne soll die Ergebnismenge $S = \{\text{weiß}; \text{schwarz}\}$ haben.

b) Gib ein passendes Zufallsexperiment für diese Ergebnismenge an.
- $S = \{\text{rot}; \text{blau}; \text{gelb}\}$
- $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten I

Was ist die Wahrscheinlichkeit?

Die Wahrscheinlichkeit ist eine Einstufung nach dem Grad der Gewissheit und gibt den **Wert** an, mit dem ein **Ergebnis** eines Zufallsexperiments erwartet wird.
Wahrscheinlichkeiten sind **Anteile** und können deshalb als **Bruch**, **Dezimalzahl** oder in **Prozent** geschrieben werden.
Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses schon im Vorfeld bekannt, spricht man auch von der **theoretischen** Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeit in der Mathematik wird mit P von probability (engl. = Wahrscheinlichkeit) bezeichnet. Nach dem P steht in Klammern das zugehörige Ergebnis.

Beachte: Bei manchen Zufallsexperimenten haben alle möglichen Ergebnisse die gleiche Chance aufzutreten, das nennt man auch Chancengleichheit. Bei anderen Zufallsexperimenten herrscht keine Chancengleichheit. Das Eintreten von Ergebnissen ist nicht gleich wahrscheinlich.

So bestimmst du die Wahrscheinlichkeiten bei einem (beliebigen) Zufallsexperiment:

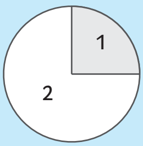
Da Wahrscheinlichkeiten Anteile sind, können sie als Bruch dargestellt werden. Bei einem Bruch steht im Zähler der Anteil am Ganzen und im Nenner, aus wie vielen (gleich großen) Teilen das Ganze besteht.
Musst du die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses eines Zufallsexperiments bestimmen, bestimmst du sozusagen den **Anteil des Ergebnisses am Zufallsexperiment.**

Dieser Sachverhalt ist die wichtigste Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung!

Beachte:
- Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis ist größer oder gleich Null.
- Da alle möglichen Ergebnisse das ganze Zufallsexperiment bilden, ist die Summe der Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse 1 oder 100 %.

Beispiele:

a) Drehen des Glücksrades
Ergebnismenge $S = \{1; 2\}$
$P(„1“) = \frac{1}{4}$; $P(„2“) = \frac{3}{4}$



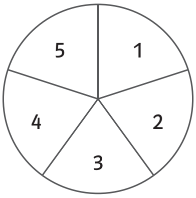
Bei diesem Glücksrad herrscht also keine Chancengleichheit.

b) Herausnehmen eines Bonbons aus einem Glas
Ergebnismenge S = {Kirsche; Apfel; Orange}
Es gibt insgesamt 10 Bonbons.
$P(„Kirsche“) = \frac{3}{10}$; $P(„Apfel“) = \frac{2}{10}$; $P(„Orange“) = \frac{5}{10}$

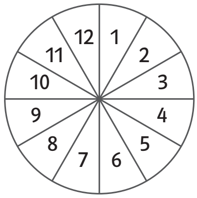
Aufgabe 4

Bestimme für jedes Ergebnis beim Drehen der Glücksräder die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

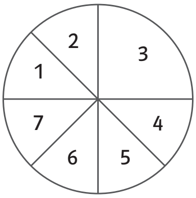
a)



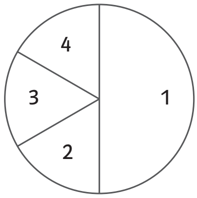
b)



c)



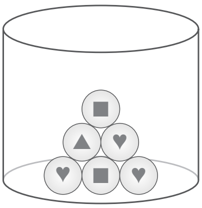
d)



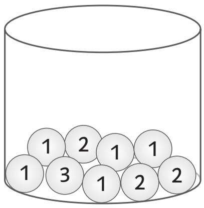
Aufgabe 5

Bestimme für jedes Ergebnis beim Ziehen aus dem Behälter die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

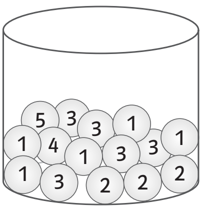
a)



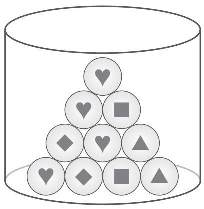
b)



c)



d)



1.3 Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten II – Laplace-Experimente

Was ist ein Laplace-Experiment?

Ein Zufallsexperiment, bei dem **alle möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich** sind, heißt Laplace-Experiment.
Mögliche Zufallsgeräte (auch Spielgeräte genannt) eines Laplace-Experiments sind z. B. eine Münze, ein Würfel, ein Glücksrad mit gleich großen Feldern, eine Urne mit Kugeln.

So kannst du die Wahrscheinlichkeit eines Laplace-Experiments berechnen:

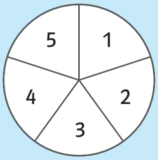
Jedes Ergebnis E eines Laplace-Experiments hat die gleiche Wahrscheinlichkeit und es gilt für jedes bzw. für ein Ergebnis E:

$$P(E) = \frac{1}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}}$$

Beachte:
Auch bei Laplace-Experimenten gilt:
- Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis ist größer oder gleich Null.
- Da alle möglichen Ergebnisse das ganze Zufallsexperiment bilden, ist die Summe der Wahrscheinlichkeit aller Ergebnisse 1 oder 100 %.

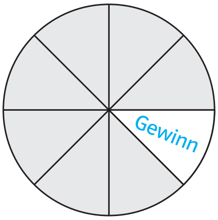
Beispiele:

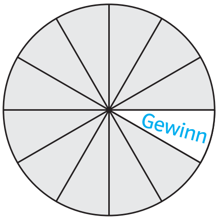
	Zufalls-experiment	Ergebnis-menge S	Anzahl der Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses: P(E)
a)	Werfen einer Münze	S = {Kopf; Zahl}	2	$\frac{1}{2}$
b)	Werfen eines (idealen) Würfels	S = {1; 2; 3; 4; 5; 6}	6	$\frac{1}{6}$
c)	Drehen des abgebildeten Glücksrades	S = {1; 2; 3; 4; 5}	5	$\frac{1}{5}$

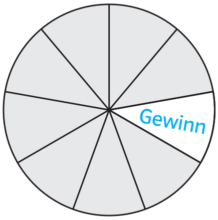


Aufgabe 6

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei dem jeweiligen Glücksrad den Hauptgewinn zu drehen?

a) 

b) 

c) 

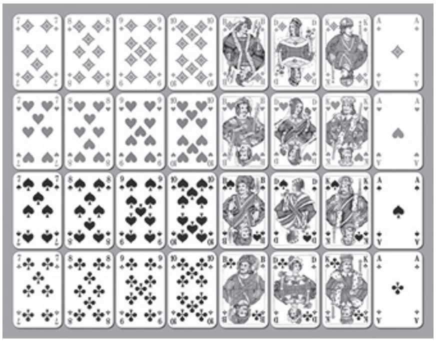
Aufgabe 7

Du hast ein Skatspiel mit 32 Karten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) das Herz-As
b) eine Karo-Karte
c) eine rote Karte
d) eine Dame

zu ziehen?



Aufgabe 8

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln?

a) 

b) 

c) 

1.4

Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten III – von der Erfahrung zur Erwartung

Bei vielen Zufallsexperimenten ist die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses im Vorfeld nicht bekannt oder man kann sie nicht direkt berechnen. Dann kann man Zufallsexperimente durchführen und zu einem relativ guten Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit kommen.

Was ist die absolute Häufigkeit?

Wird ein Zufallsexperiment durchgeführt, kannst du aufschreiben, wie oft ein bestimmtes Ergebnis E aufgetreten ist. Diese **Anzahl** wird absolute Häufigkeit genannt und ist immer eine positive und ganze Zahl.
Die absolute Häufigkeit wird in der Regel mit **H (E)** abgekürzt.

Was ist die relative Häufigkeit?

Den **Anteil der Anzahl, also der absoluten Häufigkeit an der Gesamtzahl der Durchführungen** n nennt man relative Häufigkeit. Die relative Häufigkeit eines Ergebnisses wird also in der Regel als Bruch (oder Dezimalzahl oder in Prozent) dargestellt und mit **h (E)** abgekürzt.
Für die relative Häufigkeit gilt:

$$h(E) = \frac{H(E)}{n}$$

Diese Formel der relativen Häufigkeit ähnelt sehr stark der Laplace-Formel; deshalb nennt man die Laplace-Formel auch die „klassische Definition der Wahrscheinlichkeit", die relative Häufigkeit die „statistische Definition der Wahrscheinlichkeit".

Beachte:
Ist die Gesamtzahl der Durchführungen n und die relative Häufigkeit eines Ergebnisses H (E) gegeben, kannst du die absolute Häufigkeit eines Ergebnisses berechnen, indem du die Gesamtzahl mit der relativen Häufigkeit multiplizierst, kurz

$$H(E) = h(E) \cdot n$$

Beispiel:
Eine Münze wird 200-mal geworfen. Dabei erscheint 113-mal Kopf.
Die absolute Häufigkeit für das Ergebnis Kopf ist $H(K) = 113$.
Die relative Häufigkeit für das Ergebnis Kopf ist $h(K) = \frac{113}{200} = 0{,}565 = 56{,}5\,\%$.
Die relative Häufigkeit für Zahl ist $1 - \frac{113}{200} = \frac{87}{200}$.
Die absolute Häufigkeit für Zahl ist also $\frac{87}{200} \cdot 200 = 87$.

Wie kommt man zu einem guten Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit mit der relativen Häufigkeit?

Wird ein Zufallsversuch sehr häufig durchgeführt, dann pendelt sich der Wert der relativen Häufigkeit h(E) immer mehr bei einem Wert (Endwert) ein. Dieser Wert wird dann zu einem Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit und man nennt diesen Wert auch **statistische Wahrscheinlichkeit**. Mit dieser statistischen Wahrscheinlichkeit kannst du rechnen wie mit den theoretischen Wahrscheinlichkeiten auch.

Merke:
Die Wahrscheinlichkeit ist also die beste Vorhersage (Prognose) für das zu erwartende Eintreten eines Ergebnisses, also für die relative Häufigkeit.

Aufgabe 9

Um zu ermitteln, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Reißnagel „auf den Rücken" oder „auf die Spitze" fällt, wird eine unterschiedliche Anzahl an Reißnägeln geworfen.
Die Tabelle erhält die dabei notierten Daten.

a) Gib für jeden Versuch die relative Häufigkeit für „Rücken" h (R) als Bruch und Dezimalzahl (gerundet auf 3 Nachkommastellen) an.
b) Welche Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von „Rücken" würdest du angeben?

Anzahl der geworfenen Reißnägel	H (R)	h (R)
100	43	
200	76	
500	198	
750	302	
1000	401	

Aufgabe 10

In der Tabelle stehen die relativen Häufigkeiten der Augensummen, die bei 400-maligem Werfen von 2 Würfeln gewürfelt wurden.

Summe	2	3	4	5	6	7
Anzahl						
rel. Häufigkeit	0,0275	0,0625	0,085	0,12	0,155	0,21
Summe	8	9	10	11	12	
Anzahl						
rel. Häufigkeit	0,145	0,1	0,0525	0,0375	0,005	

Berechne die absoluten Häufigkeiten.

1.5 Darstellung von Zufallsexperimenten in Baumdiagrammen

Mit einem Baumdiagramm lassen sich Zufallsexperimente übersichtlich darstellen und erklären. Ein Baumdiagramm kannst du von links nach rechts oder aber auch von oben nach unten zeichnen.

Beim Erstellen eines Baumdiagramms kannst du so vorgehen:

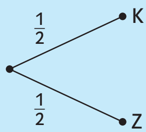
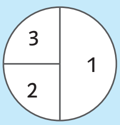
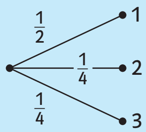
1. Jedes Baumdiagramm besteht aus einem Anfangspunkt (auch Wurzel genannt).
2. Von diesem Anfangspunkt aus gehen so viele Äste ab, wie das Zufallsexperiment Ergebnisse hat. Markiere das Ende von jedem Ast und schreibe das zugehörige Ergebnis dazu.
3. Schreibe an jeden Ast die zum Ergebnis gehörende Wahrscheinlichkeit. Zur Kontrolle kannst du überprüfen: Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben.

Baumdiagramme kannst du nicht nur von Laplace-Experimenten zeichnen, sondern von jedem beliebigen Zufallsexperiment.

Beachte:
Wenn du ein Baumdiagramm beschreiben musst, gehe einfach die Schritte wie beim Darstellen eines Baumdiagramms in einer etwas anderen Reihenfolge durch, also:

1. Schaue zuerst auf die Astenden. Notiere dir alle möglichen Ergebnisse in der Ergebnismenge S.
2. Mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten kannst du die Anteile am Zufallsexperiment angeben.
3. Beschreibe ein Zufallsexperiment, das den Regeln entspricht.

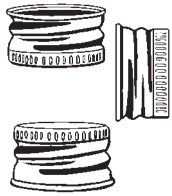
Beispiele:

Zufallsexperiment	Ergebnismenge	Baumdiagramm
Werfen einer Münze	S = {Kopf; Zahl}	
Drehen des Glücksrades 	S = {1; 2; 3}	

Aufgabe 11

Stelle die Zufallsexperimente in einem Baumdiagramm ohne die Wahrscheinlichkeiten dar.

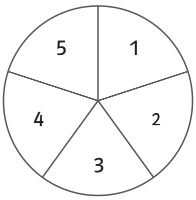
a) Wetten auf den Ausgang eines Fußballspiels.
b) Ein Fußgänger kommt an eine Fußgängerampel.
c) Werfen des Verschlusses einer Wasserflasche (s. Abbildung).



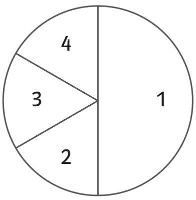
Aufgabe 12

Stelle jedes Zufallsexperiment in einem Baumdiagramm dar.

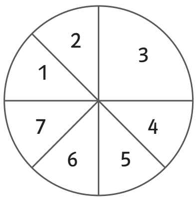
a) Werfen eine (idealen) Würfels
b) Werfen des Tetraeder-Würfels
c) In einer Tüte befinden sich 5 rote, 6 grüne und 7 gelbe Gummibärchen. Es wird ein Gummibärchen ohne Hinzuschauen genommen.
d) Einmaliges Drehen der abgebildeten Glücksräder



G_I



G_{II}

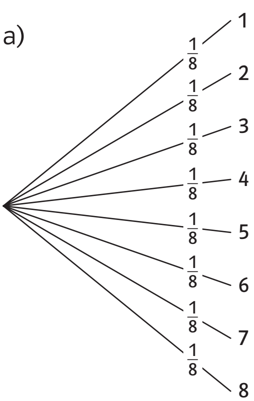


G_{III}

Aufgabe 13

Gib zu jedem Baumdiagramm ein zugehöriges Zufallsexperiment an.

a)



b)