



Mein Übungsbuch

Funktionen

Mathematik 7.-10. Klasse

im Griff



Heike Homrighausen

Klett
Funktionen im Griff
Mathematik 7.- 10. Klasse

Mein Übungsbuch für
Gymnasium und Realschule

Klett Lerntraining

Heike Homrighausen ist Gymnasiallehrerin für die Fächer Mathematik und Geschichte in Baden-Württemberg.

Hinweis:

Zu diesem Buch gehören Online-Tests unter
www.klasse5bis10.klett-lertraining.de.

Der Zugang zu den Online-Abschlusstests ist bis drei Jahre nach
Ersterscheinen des Buches gewährleistet.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind
im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in
anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schrift-
lichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 52a UrhG: Weder das Werk noch
seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netz-
werk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen
Bildungseinrichtungen. Fotomechanische Wiedergabe nur mit Genehmigung des
Verlages.

1. Auflage 2019

© PONS GmbH, Stöckachstraße 11, 70190 Stuttgart 2019. Alle Rechte vorbehalten.

www.klett-lertraining.de

Umschlaggestaltung: Sabine Kaufmann, Stuttgart

Umschlagfoto: istockfoto (Viorika), Calgary, Alberta

Illustrationen: Martin Lay, Breisach a. Rh.: S. 38, 39

Satz: DTP-Studio Andrea Eckhardt, Göppingen

ISBN 978-3-12-050202-9

Inhaltsverzeichnis

So übst du mit diesem Buch	6
So funktioniert der Abschlusstest online	7

1 Proportionale Funktionen

1.1 Koordinaten im Koordinatensystem	8
1.2 Was sind Funktionen?	10
1.3 Proportionale Zuordnungen – besondere lineare Funktionen mit $y = mx$	12
1.4 Die Steigung m von proportionalen Zuordnungen	14
1.5 Zeichnen von Graphen proportionaler Zuordnungen	16
1.6 Vermischte Aufgaben	18
Abschlusstest online	21

2 Lineare Funktionen

2.1 Was sind lineare Funktionen?	22
2.2 Zeichnen des Graphen einer linearen Funktion	24
2.3 Bestimmung der Funktionsgleichung	26
2.4 Nullstellen linearer Funktionen – Lösen linearer Gleichungen	30
2.5 An welcher Stelle nimmt die lineare Funktion den Wert d an – Lösen der Gleichung $mx + c = d$	32
2.6 Lineare Funktionen als Darstellung von linearen Gleichungen mit zwei Variablen	34
2.7 Modellieren mit linearen Funktionen	36
2.8 Vermischte Aufgaben	40
Abschlusstest online	43

3 Lagebeziehungen von Geraden – Lineare Gleichungssysteme

3.1	Parallele und zueinander senkrechte Geraden	44
3.2	Lineare Gleichungssysteme und ihre Lösungen grafisch darstellen	46
3.3	Die Sonderfälle keine Lösung oder unendlich viele Lösungen	50
3.4	Das Gleichsetzungsverfahren	51
3.5	Das Einsetzungsverfahren	52
3.6	Das Additionsverfahren	54
3.7	Lineare Gleichungssysteme mit dem GTR lösen	56
3.8	Modellieren mit linearen Gleichungssystemen	58
3.9	Vermischte Aufgaben	60
	Abschlusstest online	63

4 Quadratische Funktionen

4.1	Die Normalparabel	64
4.2	Verschiebung in y-Richtung – Funktionen mit $f(x) = x^2 + e$	66
4.3	Verschiebung in x-Richtung – Funktionen mit $f(x) = (x - d)^2$	68
4.4	Verschiebung in x- und y-Richtung – Funktionen mit $f(x) = (x - d)^2 + e$	70
4.5	Nach oben und nach unten geöffnete Parabeln	73
4.6	Streckung und Stauchung in y-Richtung – die quadratischen Funktionen mit $f(x) = ax^2$	76
4.7	Verschieben, gespiegelt und gestreckt – quadratische Funktionen in Scheitelpunktform mit $f(x) = a(x - d)^2 + e$	80
4.8	Die allgemeine quadratische Funktion – Funktionen in Normalform mit $f(x) = ax^2 + bx + c$	82
4.9	Von der Normalform zur Scheitelpunktform	84
4.9	Vermischte Aufgaben	86
	Abschlusstest online	89

5 Nullstellen und Schnittpunkte von Parabeln – Lösen quadratischer Gleichungen

5.1 Was sind quadratische Gleichungen?	90
5.2 Nullstellen von Parabeln – Lösungsmengen von reinquadratischen Gleichungen	92
5.3 Nullstellen von Parabeln in Normalform – Lösen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$	95
5.4 Spezialfall: Lösen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx = 0$	98
5.5 Modellieren mit quadratischen Funktionen und Gleichungen	100
5.6 Vermischte Aufgaben	104
Abschlusstest online	107

6 Potenzfunktionen

6.1 Potenzfunktionen mit positiven Exponenten	108
6.2 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten	110
6.3 Veränderungen am Graphen – Streckung und Stauchung in y-Richtung und Spiegelung an der x-Achse	112
6.4 Veränderungen am Graphen – Verschiebung in y-Richtung und x-Richtung	115
6.5 Vermischte Aufgaben	120
Abschlusstest online	123

Lösungen	125
-----------------	-----

Stichwortverzeichnis	174
----------------------	-----

So übst du mit diesem Buch

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

du möchtest fit im Umgang mit Funktionen werden?

Dann ist „Funktionen im Griff“ genau das richtige Übungsbuch für dich!

Es hilft dir dabei, alle wichtigen Themen aus dem Bereich Funktionen und Gleichungen zu wiederholen und zu üben. Gehe so vor:

Schritt 1

Suche aus dem Inhaltsverzeichnis das **Thema heraus**, das du wiederholen möchtest.

Schritt 2

Lies das **Merkwissen** im Kasten **durch**.
Dort steht alles, was du zu diesem Thema wissen und können solltest.

Schritt 3

Jetzt kannst du mit den vielen unterschiedlichen **Aufgaben üben**. Einige Aufgaben lassen sich aus Platzgründen nicht im Buch lösen – lege dir dafür ein Heft zu.

Schritt 4

Vergleiche deine Antworten mit den **Lösungen** hinten im Buch.

Schritt 5

Wenn du ein Kapitel abgeschlossen hast, kannst du dich mit dem **Abschlusstest online testen**. Die Ergebnisse aus dem Test kannst du in die Tabelle am Kapitelende übertragen. So behältst du immer den Überblick.

So funktioniert der Abschlusstest online

Gehe auf <https://www.klett-lertraining.de/8D5Q>.

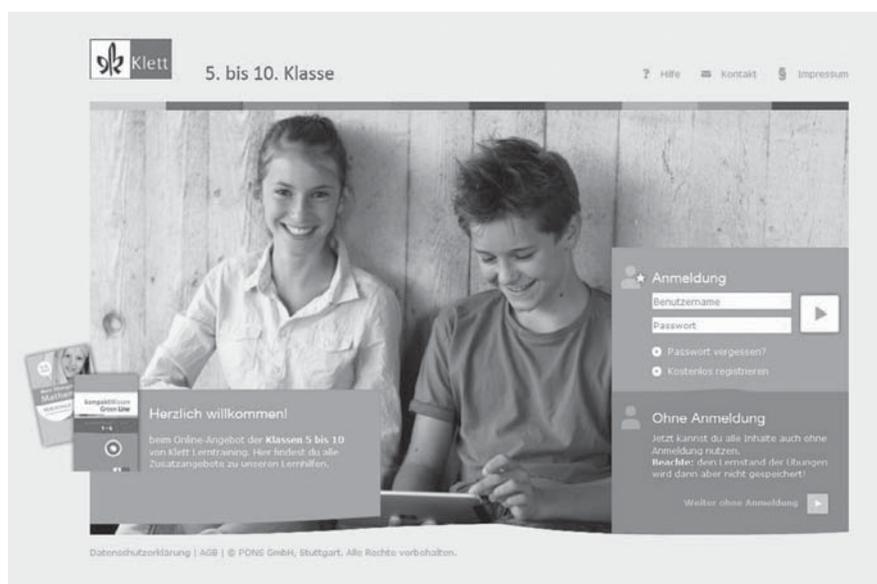
Du erhältst eine Übersicht über alle Kapitel und darunter alle verfügbaren Abschlusstests.

Wähle einen passenden Test aus und bearbeite die Aufgaben.

Du kannst alle Online-Tests mit und ohne Anmeldung nutzen.

Bitte beachte: Wenn du dich nicht anmeldest, kann dein Lernstand in den Tests **nicht gespeichert** werden.

Eine Anmeldung ist nur möglich, wenn du dich vorher bei uns registriert hast. Dafür musst du dir einen Benutzernamen und ein Passwort ausdenken und deine E-Mail-Adresse angeben. Dann erhältst du einen Aktivierungslink per E-Mail.



Informationen zu Registrierung und Anmeldung findest du immer unter „Hilfe“ in unserem Lernportal www.klasse5bis10.klett-lertraining.de.

Viel Erfolg wünschen dir die Autoren und das Team von Klett-Lerntraining

1

Proportionale Funktionen

1.1 Koordinaten im Koordinatensystem

Ein rechtwinkliges Koordinatensystem heißt auch **kartesisches Koordinatensystem**.

Die **Rechts-Achse** heißt **x-Achse**.

Die **Hoch-Achse** heißt **y-Achse**.

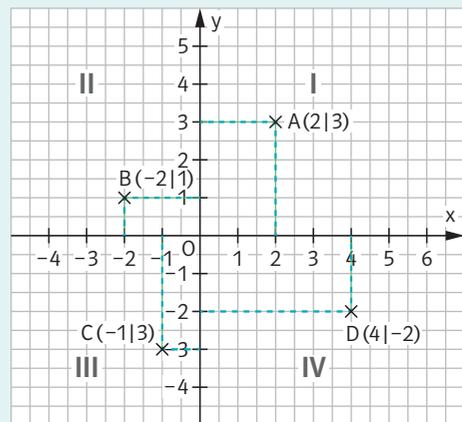
Die Einteilung der beiden Koordinatenachsen besteht normalerweise aus gleichen Einheiten.

Der Schnittpunkt der beiden Koordinatenachsen ist der **Ursprung O**.

Das Koordinatensystem wird entgegen dem Uhrzeigersinn in vier

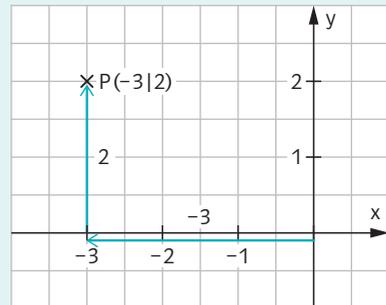
Quadranten unterteilt, die mit den römischen Zahlzeichen I, II, III und IV bezeichnet werden.

Jeder **Punkt** im Koordinatensystem kann durch die Angabe seiner x-Koordinate und y-Koordinate eindeutig dargestellt werden. Schreibweise: **P(x|y)**



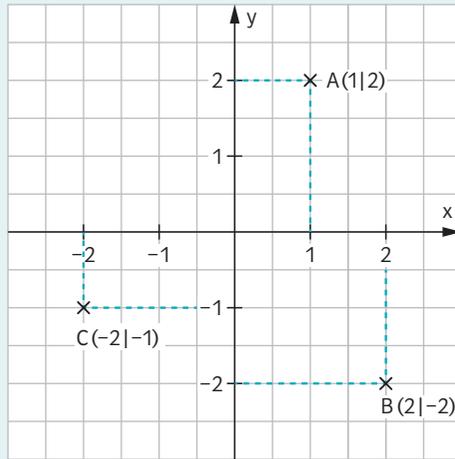
So kannst du einen Punkt im Koordinatensystem einzeichnen:

1. Gehe so viele Einheiten wie in der x-Koordinate (der ersten Koordinate) angegeben nach rechts (bei negativem Vorzeichen in negative x-Richtung nach links).
2. Gehe so viele Einheiten wie in der y-Koordinate (der zweiten Koordinate) angegeben nach oben (bei negativem Vorzeichen in negative y-Richtung nach unten).



So kannst du die Koordinaten eines Punktes ablesen:

1. Gehe vom Punkt aus parallel zur y-Achse nach unten oder oben bis zur **x-Achse** und lies den Wert ab. Das ist die **erste Koordinate** des Punktes.
2. Gehe vom Punkt aus parallel zur x-Achse nach links oder rechts bis zur y-Achse und lies den Wert ab. Das ist die **zweite Koordinate** des Punktes.



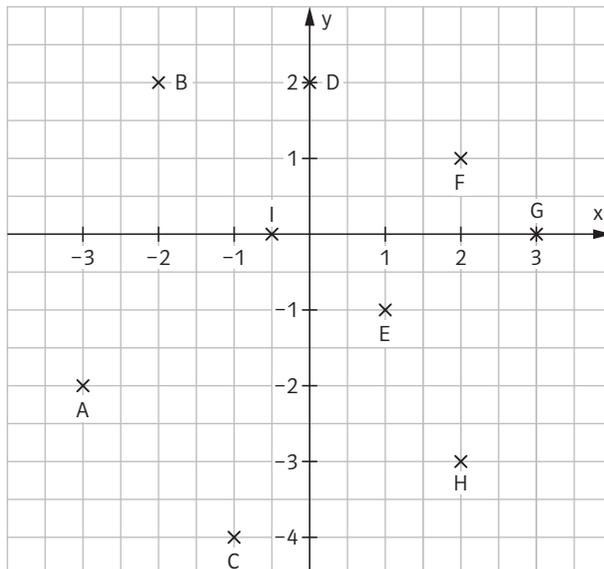
Aufgabe 1

Markiere die Punkte in einem Koordinatensystem und verbinde sie in alphabetischer Reihenfolge.

A(-1|-2), B(-1|0), C(-1|3), D(0|2), E(1|1), F(3|3), G(3|-2)

Aufgabe 2

Gib die Koordinaten der Punkte an.



1.2 Was sind Funktionen?

Eine **Zuordnung**, die jeder Größe (Zahl) **genau eine** bestimmte Größe (Zahl) zuordnet, heißt **Funktion**.

Meist wird die Eingangsgröße als **x-Wert** oder **Argument**, die zugeordnete Größe als **y-Wert** oder **Funktionswert** von x bezeichnet.

Alle möglichen x -Werte bilden die **Definitionsmenge** D .

Funktionen werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet, meist mit f , g oder h .

So kann eine Funktion angegeben werden:

1. Durch eine **Vorschrift**, die sagt, wie die Funktionswerte berechnet werden können. Man nennt

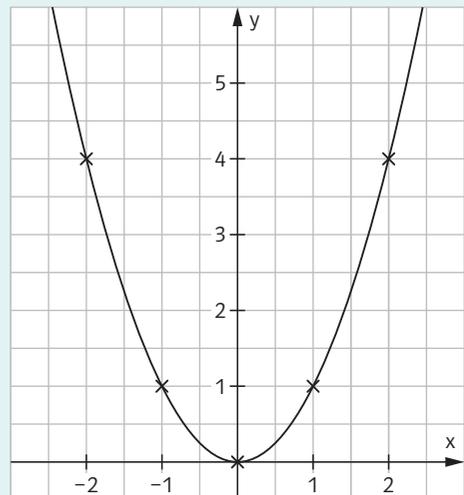
$$\underbrace{f(x) = x^2}_{\text{Funktionsgleichung}} \quad \leftarrow \text{Funktionsterm}$$

$$\text{bzw.} \quad \underbrace{y = x^2}_{\text{Gleichung des Graphen}} \quad \leftarrow \text{Funktionsterm}$$

2. Durch eine **Wertetabelle**, in der zu jedem x -Wert der zugeordnete Funktionswert (y -Wert) angegeben ist.

x	-2	-1	0	1
y	$(-2)^2 = 4$	$(-1)^2 = 1$	0	1

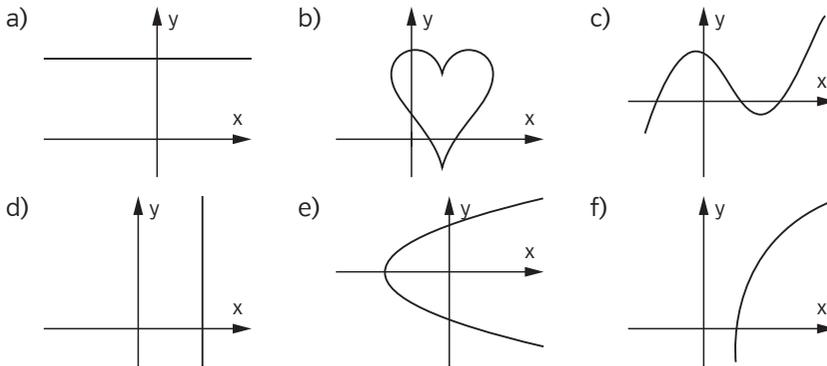
3. **Grafisch** in einem Koordinatensystem. Trage dazu die Koordinaten der Wertetabelle als Punkte in ein Koordinatensystem ein.



Dem x -Wert $x = -2$ wird der Funktionswert $y = 4$ zugeordnet, oder kurz: $f(-2) = 4$.

Aufgabe 3

Welche Abbildungen zeigen keinen Funktionsgraphen? Begründe.



Aufgabe 4

Ordne die Funktionsgleichungen ① – ③ jeweils einer Wertetabelle a) – c) und einem Graphen f, g, oder h zu.

a)

x	0	1	2	3
y	-	1	0,5	$\frac{1}{3}$

① $y = x + 1$

② $y = 2x$

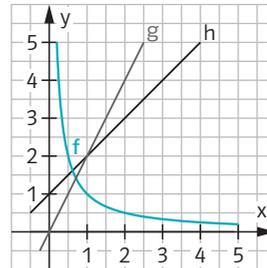
③ $y = \frac{1}{x}$

b)

x	0	1	2	3
y	0	2	4	6

c)

x	0	1	2	3
y	1	2	3	4



Aufgabe 5

Welche Zuordnungen sind Funktionen? Begründe.

- a) Seitenlänge eines Quadrats → Umfang eines Quadrats
 b) Umfang eines Quadrats → Seitenlänge eines Quadrats
 c) Körpergröße → Schuhgröße
 d) Zahl → Hälfte der Zahl

Der Pfeil →
bedeutet: „wird
zugeordnet“.

1.3 Proportionale Zuordnungen - besondere lineare Funktionen mit $y = mx$

Eine Zuordnung beschreibt eine **proportionale Funktion**, wenn gilt:
Wird der x-Wert (die Ausgangsgröße) verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ..., dann wird der y-Wert (der zugeordnete Funktionswert) auch verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, ...

So kannst du eine proportionale Zuordnung (Funktion) beschreiben:

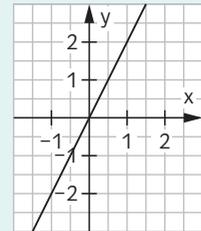
Merke:
Der Faktor m heißt Proportionalitätsfaktor.
Es gilt: $m = \frac{y}{x}$ (für $x \neq 0$).
Er ist für alle Wertepaare gleich!

- mit einer **Funktionsgleichung** der Form $f(x) = mx$ bzw. $y = mx$
Beachte: mx ist die Kurzschreibweise für $m \cdot x$.
- mit einer **Wertetabelle**
 - Zu einem gegebenen x-Wert erhältst du den y-Wert durch Multiplikation mit m .
 - Zu einem gegebenen y-Wert erhältst du den x-Wert durch Division durch m .

Beispiel: $y = 2x$

x	y
-3	$2 \cdot (-3) = -6$
-2	$2 \cdot (-2) = -4$
-1	$2 \cdot (-1) = -2$
0	0
$\frac{1}{2}$	1
1	2
2	4

- grafisch**
Jeder Graph einer proportionalen Zuordnung ist eine **Gerade durch den Ursprung** (kurz **Ursprungsgerade**).
Es genügt, wenn du einen Punkt einzeichnest und mit dem Ursprung verbindest oder wenn du zwei Punkte einzeichnest und verbindest.



So kannst du überprüfen, ob ein Punkt auf dem Graphen einer proportionalen Zuordnung liegt:

Mache eine **Punktprobe**:

- Setze die x-Koordinate des Punktes für x in die Funktionsgleichung ein und berechne den zugehörigen y-Wert.
- Ist die y-Koordinate des Punktes gleich, liegt der Punkt auf dem Graphen.

Beispiel: $y = \frac{1}{2}x$

a) A(4|2), b) B(8|6)

zu a) $\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{4}{2} = 2$ ✓

zu b) $\frac{1}{2} \cdot 8 = \frac{8}{2} = 4 \neq 6$

B liegt also nicht auf dem Graphen von $y = \frac{1}{2}x$.

Aufgabe 6

Entscheide, ob eine proportionale Zuordnung vorliegt oder nicht und begründe deine Entscheidung.

	Ausgangsgröße	zugeordnete Größe	proportionale Zuordnung	Begründung
a)	Seitenlänge eines Quadrats	Umfang des Quadrats	<input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	
b)	Seitenlänge eines Quadrats	Flächeninhalt des Quadrats	<input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	
c)	Anzahl der Testaufgaben	Zeit für die Bearbeitung	<input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	
d)	Gewicht	Körpergröße	<input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	
e)	Gewicht der Äpfel (in kg)	Preis	<input type="checkbox"/> ja <input type="checkbox"/> nein	

Aufgabe 7

Ergänze die Tabelle so, dass die Zuordnungen proportional sind und schreibe die zugehörige Funktionsgleichung auf.

a)	x	0	1	2	3	4		
	f(x)			5			17,5	1
b)	x	0	1	2	3	4		
	f(x)				6,3		12,6	3,15

Aufgabe 8

Überprüfe, welcher Punkt auf dem Graphen welcher proportionalen Zuordnung liegt.

A(3|1), B(1|3), C(0|0), D(3|3), E(-1|-3), F(-9|-3)

a) $y = 3x$ b) $y = x$ c) $y = \frac{1}{3}x$

1.4 Die Steigung m von proportionalen Zuordnungen

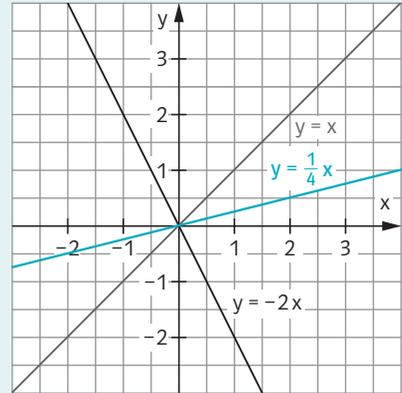
Bei einer proportionalen Zuordnung mit $y = mx$ ist m die **Steigung** der Geraden.

Man sagt:

- die Gerade **steigt**, wenn m positiv ($m > 0$) ist. Die Gerade verläuft dann im III. und I. Quadranten.
- die Gerade **fällt**, wenn m negativ ($m < 0$) ist. Die Gerade verläuft dann im II. und IV. Quadranten.

Die Gerade $y = x$ hat die Steigung $m = 1$. Sie heißt auch 1. **Winkelhalbierende**, da sie den I. Quadranten halbiert.

- Geraden mit der Steigung $0 < m < 1$ verlaufen im I. Quadranten unterhalb der Winkelhalbierenden.
- Geraden mit der Steigung $m > 1$ verlaufen im I. Quadranten oberhalb der Winkelhalbierenden.



Merke:
Den Verlauf eines Graphen beschreibt man immer dem Verlauf der x-Achse nach, also von links nach rechts.

So kannst du die Steigung einer proportionalen Zuordnung aus einem gegebenen Punkt berechnen:

Für jede proportionale Zuordnung gilt $m = \frac{y}{x}$. Schreibe also die y-Koordinate in den Zähler und die zugehörige x-Koordinate in den Nenner.

Merke:

Sind von einer Funktion mehrere Punkte gegeben, so handelt es sich genau dann um eine proportionale Zuordnung, wenn **alle** Punkte auf dem Graphen liegen, also wenn $m = \frac{y}{x}$ für alle Punkte den gleichen Wert hat.

Damit erhältst du die Gleichung mit $y = mx$.

Aufgabe 9

Kreuze an und ergänze die fehlenden Angaben in der Tabelle.

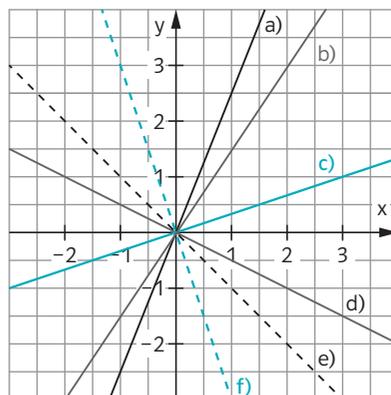
	Gleichung	Steigung m	Die Gerade ...	Punkt P
a)	$y =$	$m =$	<input type="checkbox"/> steigt <input type="checkbox"/> fällt	P(1 4)
b)	$y =$	$m =$	<input type="checkbox"/> steigt <input type="checkbox"/> fällt	P(-2 1)
c)	$y = -\frac{3}{4}x$	$m =$	<input type="checkbox"/> steigt <input type="checkbox"/> fällt	P(8 _____)
d)	$y = 3x$	$m =$	<input type="checkbox"/> steigt <input type="checkbox"/> fällt	P(_____ 6)
e)	$y =$	$m = \frac{4}{5}$	<input type="checkbox"/> steigt <input type="checkbox"/> fällt	P(-5 _____)
f)	$y =$	$m = \frac{-2}{\underline{\quad}}$	<input type="checkbox"/> steigt <input type="checkbox"/> fällt	P(-10 4)

Aufgabe 10

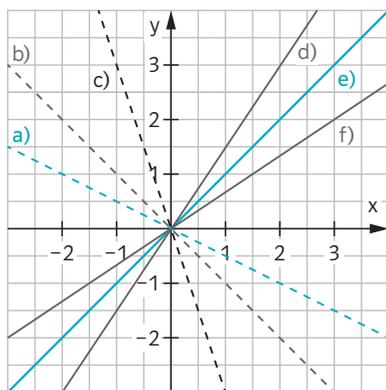
In dem Schaubild siehst du die Geraden a) – f) und unten die zugehörigen Funktionsgleichungen.

a) $y = 2,5x$ b) $y = \frac{2}{3}x$ c) $y = \frac{1}{3}x$
 d) $y = \frac{1}{2}x$ e) $y = -x$ f) $y = 3x$

Welche Funktionsgleichungen sind richtig, welche falsch? Korrigiere die falschen.



Aufgabe 11



Gib zu jeder Geraden die zugehörige Steigung und Funktionsgleichung an.

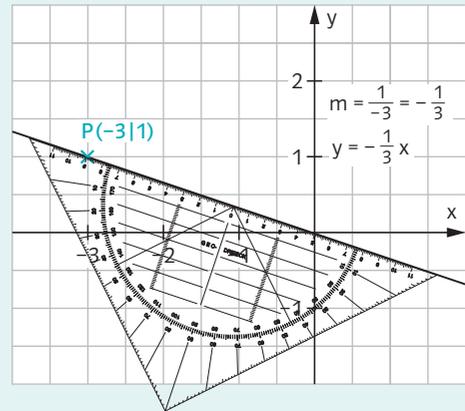
1.5 Zeichnen von Graphen proportionaler Zuordnungen

Im Koordinatensystem sind die Punkte besonders geeignet, die auf den Ecken der Kästchen liegen.

Um eine Gerade in einem Koordinatensystem möglichst genau zeichnen zu können, benötigst du **zwei geeignete Punkte**, durch die du eine Gerade zeichnen kannst. Ein Punkt, der auf allen Graphen von proportionalen Zuordnungen liegt, ist der **Ursprung $0|0$** .

Möglichkeit 1: Ein (geeigneter) Punkt ist gegeben.

1. Markiere den gegebenen Punkt im Koordinatensystem.
2. Zeichne mit deinem Lineal oder Geodreieck eine Gerade durch P und den Ursprung O.
3. Musst du noch die Funktionsgleichung angeben, dann bestimme sie mithilfe der Steigung $m = \frac{y}{x}$.



Ist m als Dezimalzahl gegeben, kannst du m entweder als Bruch umwandeln oder aber du gehst 1 Schritt nach rechts und m Schritte nach oben oder unten.

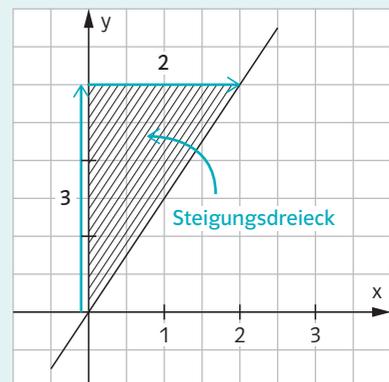
Möglichkeit 2: mithilfe der Steigung m

Für den Graphen einer proportionalen Zuordnung gilt: $m = \frac{y}{x}$.

Beispiel: $y = \frac{3}{2}x$

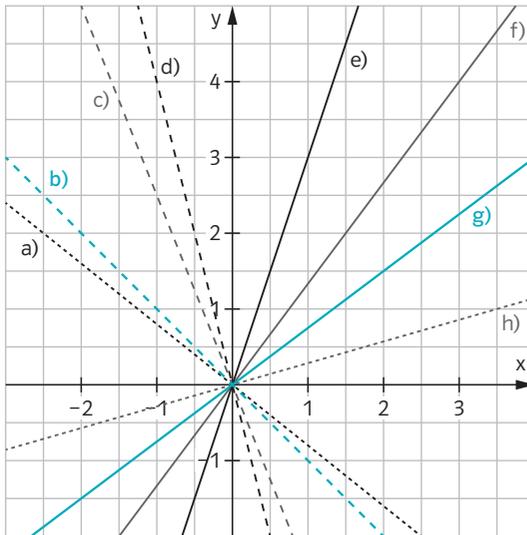
$y = \frac{3}{2}x$ 3 nach oben und 2 nach rechts

1. Gehe vom Ursprung aus y Schritte nach oben (für $y > 0$) oder unten (für $y < 0$).
2. Gehe dann x Schritte nach rechts (für $x > 0$) oder links (für $x < 0$) und markiere den Punkt mit einem kleinen Kreuzchen.
3. Zeichne eine Gerade durch den markierten Punkt und den Ursprung.



Aufgabe 12

Gib zu jeder Geraden die zugehörige Steigung und Funktionsgleichung an.



Hinweis:
Suche dabei möglichst
geschickte Punkte,
um m zu bestimmen.

Aufgabe 13

Der Graph einer proportionalen Zuordnung geht durch den Punkt P.
Zeichne die zugehörige Gerade in ein Koordinatensystem und gib die zugehörige Funktionsgleichung an.

- a) $P(2|6)$ b) $P(-3|-1,5)$ c) $P(-0,5|0,75)$ d) $P(4|-3)$

Aufgabe 14

Zeichne mithilfe der Steigung m die Graphen der proportionalen Zuordnungen in ein Koordinatensystem.

- a) $y = 2x$ b) $y = -x$ c) $y = \frac{2}{3}x$
d) $y = 2,5x$ e) $y = -1,2x$ f) $y = 0,6x$