Lexikon der Mathematik

Band 5

Sed bis Zyl

Springer Spektrum

Lexikon der Mathematik: Band 5

Guido Walz
(Hrsg.)

Lexikon der Mathematik: Band 5

Sed bis Zyl

2. Auflage

Springer Spektrum

Herausgeber
Guido Walz
Mannheim, Deutschland

ISBN 978-3-662-53505-9 ISBN 978-3-662-53506-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-53506-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum
1. Aufl.: © Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg 2002
2. Aufl.: © Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.
Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.
Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Iris Ruhmann
Redaktion: Prof. Dr. Guido Walz

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Germany
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Autorinnen und Autoren im 5. Band des *Lexikon der Mathematik*

Prof. Dr. Hans-Jochen Bartels, Mannheim
PD Dr. Martin Bordemann, Freiburg
Dr. Andrea Breard, Paris
Prof. Dr. Martin Brokate, München
Prof. Dr. Rainer Brück, Dortmund
Dipl.-Ing. Hans-Gert Dänel, Pesterwitz
Dr. Ulrich Dirks, Berlin
Dr. Jörg Eisfeld, Gießen
Prof. Dr. Heike Faßbender, München
Dr. Andreas Filler, Berlin
Prof. Dr. Robert Fittler, Berlin
PD Dr. Ernst-Günter Giessmann, Berlin
Dr. Hubert Gollek, Berlin
Prof. Dr. Barbara Grabowski, Saarbrücken
Prof. Dr. Andreas Griewank, Dresden
Dipl.-Math. Heiko Großmann, Münster
Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch, Kiel
Prof. Dr. K. P. Hadeler, Tübingen
Prof. Dr. Adalbert Hatvany, Kuchen
Dr. Christiane Helling, Berlin
Prof. Dr. Dieter Hoffmann, Konstanz
Prof. Dr. Heinz Holling, Münster
Hans-Joachim Ilgauds, Leipzig
Dipl.-Math. Andreas Janßen, Stuttgart
Dipl.-Phys. Sabina Jeschke, Berlin
Prof. Dr. Hubertus Jongen, Aachen
Dr. Uwe Kasper, Berlin
Dipl.-Phys. Akiko Kato, Berlin
Dr. Claudia Knütel, Hamburg
Dipl.-Phys. Rüdeger Köhler, Berlin
Dipl.-Phys. Roland Kunert, Berlin
Prof. Dr. Herbert Kurke, Berlin
AOR Lutz Küsters, Mannheim
PD Dr. Franz Lemmermeyer, Heidelberg
Prof. Dr. Burkhard Lenze, Dortmund
Prof. Dr. Jan Louis, Halle
Uwe May, Ückermünde
Prof. Dr. Günter Mayer, Rostock
Prof. Dr. Klaus Meer, Odense (Dänemark)
Prof. Dr. Paul Molitor, Halle
Prof. Dr. Helmut Neunzert, Kaiserslautern
Prof. Dr. Günther Nürnberger, Mannheim
Dipl.-Inf. Ines Peters, Berlin
Dr. Klaus Peters, Berlin
Prof. Dr. Gerhard Pfister, Kaiserslautern
Dipl.-Math. Peter Philip, Berlin
Prof. Dr. Hans Jürgen Prömel, Berlin
Dr. Dieter Rautenbach, Aachen
Dipl.-Math. Thomas Richter, Berlin
Prof. Dr. Thomas Rießinger, Frankfurt
Prof. Dr. Heinrich Rommelfanger, Frankfurt
Prof. Dr. Robert Schaback, Göttingen
PD Dr. Martin Schlichenmaier, Mannheim
Dr. Karl-Heinz Schlote, Altenburg
Dr. Christian Schmidt, Berlin

PD Dr.habil. Hans-Jürgen Schmidt, Potsdam
Dr. Karsten Schmidt, Berlin
Prof. Dr. Uwe Schöning, Ulm
Dr. Günter Schumacher, Karlsruhe
PD Dr. Rainer Schwabe, Tübingen
PD Dr. Günter Schwarz, München
Dipl.-Math. Markus Sigg, Freiburg
Dipl.-Phys. Grischa Stegemann, Berlin
Dr. Anusch Taraz, Berlin
Prof. Dr. Stefan Theisen, Potsdam
Prof. Dr. Lutz Volkmann, Aachen
Dr. Johannes Wallner, Wien
Prof. Dr. Guido Walz, Mannheim
Prof. Dr. Ingo Wegener, Dortmund
Prof. Dr. Bernd Wegner, Berlin
Prof. Dr. Ilona Weinreich, Remagen
Prof. Dr. Dirk Werner, Berlin
PD Dr. Günther Wirsching, Eichstätt
Prof. Dr. Jürgen Wolff v. Gudenberg, Würzburg
Prof. Dr. Helmut Wolter, Berlin
Dr. Frank Zeilfelder, Mannheim
Dipl.-Phys. Erhard Zorn, Berlin

Hinweise für die Benutzer

Gemäß der Tradition aller Großlexika ist auch das vorliegende Werk streng alphabetisch sortiert. Die Art der Alphabetisierung entspricht den gewohnten Standards, auf folgende Besonderheiten sei aber noch explizit hingewiesen: Umlaute werden zu ihren Stammlauten sortiert, so steht also das „ä“ in der Reihe des „a“ (nicht aber das „ae“!); entsprechend findet man „ß“ bei „ss“. Griechische Buchstaben und Sonderzeichen werden entsprechend ihrer deutschen Transkription einsortiert. So findet man beispielsweise das α unter „alpha“. Ein Freizeichen („Blank“) wird *nicht* überlesen, sondern gilt als „Wortende“: So steht also beispielsweise „a priori“ *vor* „Abakus“. Im Gegensatz dazu werden Sonderzeichen innerhalb der Worte, insbesondere der Bindestrich, „überlesen“, also bei der Alphabetisierung behandelt, als wären sie nicht vorhanden. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß Exponenten ebenso wie Indizes bei der Alphabetisierung ignoriert werden.

Sedezimalsystem, Positionssystem zur Notation von Zahlen auf der Basis von 16 Ziffern, meist als ↗Hexadezimalsystem bezeichnet (s. d.).

Seekarte, geographische Karte für die Seefahrt.

Solche Karten erfordern winkeltreue ↗Kartennetzentwürfe, da der Kurs eines Schiffes in der Regel durch Peilung bestimmt wird. Diese Eigenschaft haben z. B. der ↗stereographische Entwurf und der ↗Mercator-Entwurf.

Segment-Approximation, Problem der Bestimmung einer besten Approximationen durch Splines mit freien Knoten, die nicht notwendigerweise stetig sind.

Es bezeichne $C[a,b]$ die Menge der stetigen Funktionen auf einem Intervall $[a,b]$, P_m den Raum der Polynome vom Grad m, und $PP_{m,k}$ die Menge der Splines vom Grad m mit k freien Knoten, d. h.

$$\begin{aligned} PP_{m,k} = \{s : [a,b] \mapsto \mathbb{R} :\ &\text{es gibt} \\ &a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b \\ &\text{so, daß } s|_{[x_j, x_{j+1})} \in P_m,\ j = 0, \ldots, k-1, \\ &\text{und } s|_{[x_k, x_{k+1}]} \in P_m\} \,. \end{aligned}$$

Das Problem der besten Approximation aus $PP_{m,k}$ hinsichtlich der ↗Maximumnorm $\|.\|_\infty$ ist wie folgt definiert: Für vorgegebenes $f \in C[a,b]$ bestimme man $s_f \in PP_{m,k}$ so, daß

$$\|f - s_f\|_\infty = \inf\{\|f - s\|_\infty :\ s \in PP_{m,k}\}$$

gilt. In diesem Fall wird s_f beste Approximation an f aus $PP_{m,k}$ genannt und die zu s_f gehörigen Knoten $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} = b$ heißen optimale Knotenmenge von f. Der Ausdruck

$$d(f, PP_{m,k}) = \inf\{\|f - s\|_\infty :\ s \in PP_{m,k}\}$$

heißt Minimalabweichung von f zu $PP_{m,k}$.

Bei der Segment-Approximation geht es um die Bestimmung von besten Approximationen s_f aus $PP_{m,k}$. Wichtig ist in diesem Zusammenhang der Begriff einer ausgeglichenen Knotenmenge von f. Dies sind Knoten $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_k \le x_{k+1} = b$ mit der Eigenschaft

$$d(f, P_m, [x_{i-1}, x_i]) = d(f, P_m, [x_i, x_{i+1}])$$

für alle $i \in \{0, \ldots, k\}$, wobei $d(f, P_m, I)$ die Minimalabweichung von f zu P_m auf der Menge I bezeichnet.

1986 wurde von G. Nürnberger, M. Sommer und H. Strauß der nachfolgend beschriebene Algorithmus zur Bestimmung einer besten Approximation aus $PP_{m,k}$ entwickelt. Er basiert auf dem folgenden Satz, dessen Inhalt in der Literatur Lawson-Prinzip genannt wird.

Es sei $f \in C[a,b]$. Dann gilt:

(i) Für alle Knotenmengen $a = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_k \le x_{k+1} = b$ ist

$$\begin{aligned} \min_i d(f, P_m, [x_i, x_{i+1}]) &\le d(f, PP_{m,k}) \\ &\le \max_i d(f, P_m, [x_i, x_{i+1}]) \,. \end{aligned}$$

(ii) Es existiert eine optimale Knotenmenge f, welche ausgeglichene Knotenmenge von f ist.

(iii) Jede ausgeglichene Knotenmenge von f ist optimale Knotenmenge von f.

Im ersten Schritt des o. g. Algorithmus zur Segment-Approximation wählt man eine (Start-)Knotenmenge

$$a = x_{0,1} < x_{1,1} < \cdots < x_{k,1} < x_{k+1,1} = b \,,$$

berechnet mit dem ↗Remez-Algorithmus die Werte

$$d_{i,1} = d(f, P_m, [x_{i,1}, x_{i+1,1}],\ i = 0, \ldots, k \,,$$

und setzt $10^{\alpha_1} = \min_i d_{i,1}$, sowie $10^{\beta_1} = \max_i d_{i,1}$. Im allgemeinen Schritt bestimmt man zunächst sukzessiv eine Knotenmenge

$$\begin{aligned} a = x_{0,p+1} \ &< \ x_{1,p+1} < \cdots < x_{k,p+1} \\ &< \ x_{j_{p+1}+1,p+1} = \cdots = x_{k+1,p+1} = b \end{aligned}$$

so, daß

$$10^{\frac{\alpha_p + \beta_p}{2}} = d(f, P_m, [x_{i,p}, x_{i+1,p}])$$

für alle $i \in \{0, \ldots, j_{p+1} - 1\}$. Hierzu verwendet man den Remez-Algorithmus in Kombination mit der ↗Regula Falsi. Danach setzt man

$$\begin{aligned} 10^{\alpha_{p+1}} &= \max\{10^{\alpha_p}, \min\{10^{\frac{\alpha_p+\beta_p}{2}}, d(f, P_m, I)\}\} \\ 10^{\beta_{p+1}} &= \min\{10^{\beta_p}, \max\{10^{\frac{\alpha_p+\beta_p}{2}}, d(f, P_m, I)\}\} \,, \end{aligned}$$

wobei $I = [x_{k,p+1}, x_{k+1,p+1}]$, und iteriert das Verfahren.

Der Algorithmus erzeugt induktiv für vorgegebenes $f \in C[a,b]$ eine ausgeglichene Knotenmenge von f, und die Folge $10^{\frac{\alpha_p+\beta_p}{2}}$, $p \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen die Minimalabweichung von f zu $PP_{m,k}$.

In der Literatur wird vorgeschlagen, diesen Algorithmus mit einem für Splines mit festen Knoten entwickelten Remezalgorithmus zu kombinieren, um gut approximierende Splines mit freien Knoten zu bestimmen.

Mitte der 90er Jahre wurden von G. Meinardus, G. Nürnberger und G. Walz ähnliche Verfahren zur bivariate Segment-Approximation entwickelt.

[1] Nürnberger G.: Approximation by Spline Functions. Springer-Verlag Heidelberg/Berlin, 1989.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017
G. Walz (Hrsg.), *Lexikon der Mathematik: Band 5*,
DOI 10.1007/978-3-662-53506-6_1

Segmentieren einer Fläche, Begriff aus der ↗geometrischen Datenverarbeitung.

Viele Klassen von ↗Freiformkurven und ↗Freiformflächen, welche durch ↗Kontrollpunkte festgelegt sind, besitzen die Eigenschaft, daß ihre Einschränkungen auf gewisse Teilmengen des Parameterbereichs wieder Kurven bzw. Flächen gleichen Typs sind, und daß sich deren Kontrollpunkte leicht aus den ursprünglichen bestimmen lassen. Dies kann man dazu benützen, um eine Fläche in Teilflächen zu zerlegen (zu 'segmentieren'). Diese Eigenschaft ist für viele Algorithmen nützlich, etwa zum Bestimmen der Schnittpunkte von ↗Bézier-Flächen, wo man die Fläche iterativ zerteilt und mit Hilfe der ↗convex hull property einfach feststellen kann, daß zwei Teile einander nicht schneiden.

Das Segmentieren ist die Basis von diskreten ↗Unterteilungsalgorithmen.

Segre, Corrado, italienischer Mathematiker, geb. 20.8.1863 Saluzzo (Italien), gest. 18.5.1924 Turin.

Nach dem Studium in Turin promovierte Segre 1883 und wurde Dozent für höhere Geometrie in Turin.

Segre leistete grundlegende Beiträge zur algebraischen Geometrie, zur komplexen Geometrie und zur projektiven Geometrie. Dabei wurde er wesentlich beeinflußt von D'Ovidio, der in Turin über abwickelbare Flächen, projektive Geometrie und bilineare und quadratische Formen las.

Segre selbst studierte geometrische Invarianten von linearen Transformationen, algebraische Kurven und Flächen, Quadriken, Kubiken und Flächen, definiert durch Differentialgleichungen. 1864 fand er eine einfache Darstellung der Kummerschen Fläche ($K3$-Fläche). Bei der Untersuchung der Eigenschaften Riemannscher Flächen führte er bikomplexe Punkte in die Geometrie ein.

Segre-Einbettung, Einbettung von $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ in $\mathbb{P}^{nm+n+m}$, die sich in homogenen Koordinaten $(X_i)_{i=0,\dots,n}$ auf $\mathbb{P}^n$, $(Y_j)_{j=0,\cdots,m}$ auf $\mathbb{P}^m$, und $(Z_{ij})_{0\le i\le n,\ 0\le j\le m}$, auf $\mathbb{P}^{nm+n+m}$ durch

$$Z_{ij} = X_i Y_j$$

ausdrückt. Das Bild ist durch $rg(Z_{ij}) = 1$ (d. h. Verschwinden der 2×2-Minoren) definiert.

Analoges gilt für Vektorbündel $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ auf einem Schema $X : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_X \mathbb{P}(\mathcal{F}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$.

Diese Einbettung ist durch die Surjektion

$$p_1^*\pi_1^*\mathcal{E} \otimes p_2^*\pi_2^*\mathcal{F} \;\to\; p_1^*\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1) \otimes p_2^*\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(1)$$

induziert, mit den Bezeichnungen

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \times_X \mathbb{P}(\mathcal{F}) \xrightarrow{p_1} \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi_1} X,$$

und analog für p_2, π_2.

Segre-Klassen, Begriff aus der Algebra.

Für abgeschlossene Einbettungen algebraischer k-Schemata $X \subset Y$ sei $C_{X|Y} \subset \overline{C}_{X|Y} \xrightarrow{q} X$ die projektive Abschließung des Normalenkegels. Die Segre-Klassen dieser Einbettungen sind die Klassen aus den Chow-Gruppen $A_*(X)$, die durch

$$q_*\left(c_1(\mathcal{O}_{\overline{C}}(1))^i \cap [\overline{C}]\right)$$

(↗Schnitt-Theorie) definiert sind.

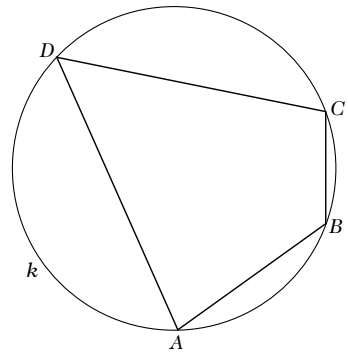
Für reguläre Einbettungen (↗Schnitt-Theorie) mit dem Normalenbündel $\mathcal{N}_{X|Y}$ ist

$$s(X,Y) = \sum_{i\ge 0} q_*\left(c_1(\mathcal{O}_{\overline{C}}(1))^i \cap [\overline{C}]\right) = c(\mathcal{N}_{X|Y})^{-1}.$$

Sehne eines Graphen, ↗chordaler Graph.

Sehne eines Kreises, Strecke, deren Endpunkte auf der Peripherie eines gegebenen Kreises liegen.

Sehnenviereck, Viereck, dessen Eckpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen, und dessen vier Seiten somit ↗Sehnen dieses Kreises sind.



Sehnenviereck

In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Winkel 180°; umgekehrt besitzen alle Vierecke, bei denen die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt, einen ↗Umkreis, sind also Sehnenvierecke. Insbesondere ist also jedes ↗Rechteck ein Sehnenviereck.

sehr amples Geradenbündel, Begriff in der Funktionentheorie mehrer Variabler.

Ein Geradenbündel $L \to M$ über einer algebraischen Varietät heißt sehr ampel, wenn $H^0(M, \mathcal{O}(L))$ eine Einbettung $M \to \mathbb{P}^N$ liefert, d. h., wenn eine Einbettung $f : M \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ existiert mit $L = f^*H$ für das Hyperebenenbündel H, das duale Bündel zu dem universellen Bündel $J \to \mathbb{P}^N$.

Dies bedeutet, daß H das Bündel ist, dessen Faser über $X \in \mathbb{P}^N$ dem Raum der linearen Funktionale auf der Geraden $\{\lambda X\}_\lambda \subset \mathbb{C}^{N+1}$ entspricht.

Seidel, Philipp Ludwig von, deutscher Mathematiker, Physiker und Astronom, geb. 24.10.1821 Zweibrücken, gest. 13.8.1896 München.

Nachdem er in Berlin und Königsberg (Kaliningrad) Mathematik und Astronomie studiert hatte, ging Seidel nach München, wo er 1846 promovierte und 1855 Professor wurde. Ein Augenleiden zwang ihn jedoch zu einer frühen Beendigung seiner Laufbahn.

Sein ganzes Leben hindurch beschäftigte sich Seidel sowohl mit der Astronomie als auch mit der Mathematik. Er promovierte mit einer Arbeit über die Spiegel eines Teleskops und habilitierte sich ein halbes jahr später mit einer Arbeit zur Konvergenz und Divergenz von Kettenbrüchen. Er beschäftigte sich mit der Verbesserung von Linsen und fand mathematische Beschreibungen für deren Aberration (Abbildungsfehler). Er führte den Begriff der nicht gleichmäßigen Konvergenz ein und verwendete wahscheinlichkeitstheoretische Methoden in der Astronomie und in der Medizin.

Seilkurve, ↗Kettenlinie.

Seinszeichen, ältere Bezeichnung für den ↗Existenzquantor.

Seitencosinussatz, Satz der ↗sphärischen Trigonometrie:

In einem beliebigen Eulerschen Dreieck (↗sphärisches Dreieck) mit den Seiten a, b und c sowie den jeweils gegenüberliegenden Innenwinkeln α, β und γ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha \ , \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta \ , \text{ und} \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \ .\end{aligned}$$

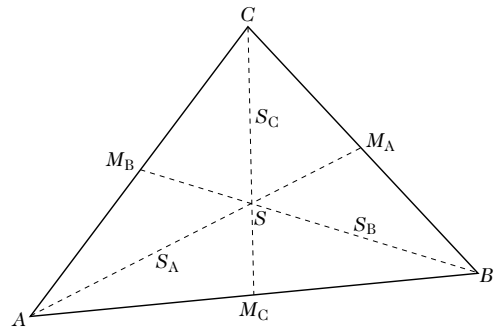
Auch in der ↗hyperbolischen Trigonometrie existiert ein Seitencosinussatz, nach dem in einem (nichteuklidischen) Dreieck mit den o. g. Bezeichnungen der Seiten und Winkel die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}&\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos \alpha \ , \\ &\cosh b = \cosh a \cdot \cosh c - \sinh a \cdot \sinh c \cdot \cos \beta \ , \\ &\text{und} \\ &\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma \ .\end{aligned}$$

Seitenhalbierende, Strecke, die einen Eckpunkt eines gegebenen Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite dieses Dreiecks verbindet.

Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ schneiden sich die drei Seitenhalbierenden s_A, s_B und s_C in einem Punkt S, der Schwerpunkt des Dreiecks genannt wird. Die Seitenhalbierenden selbst werden manchmal auch als Schwerelinien bezeichnet.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt jede der Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, sodaß der



am Eckpunkt anliegende Abschnitt doppelt so lang ist wie der an der gegenüberliegenden Seite anliegende Abschnitt. Die Längen der Seitenhalbierenden können wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}s_A &= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha} \ , \\ s_B &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\beta} \ , \\ s_C &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma} \ .\end{aligned}$$

Seitennormale, ↗Seitenvektor.

Seitenvektor, *Seitennormale*, das Vektorfeld $\mathfrak{s}(s)$ längs einer auf einer orientierten Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ verlaufenden Kurve $\alpha(s)$, das zur Tangentialebene von $\mathcal{F}$ gehört, zu $\alpha'(s)$ senkrecht ist, und zusammen mit dem Tangentialvektor der Kurve und dem Normalenvektor $\mathfrak{u}$ von $\mathcal{F}$ ein orientiertes Dreibein bildet.

Ist $\mathfrak{t}$ der Einheitstangentialvektor von α, so gilt $\mathfrak{s}(s) = \mathfrak{u}(\alpha(s)) \times \mathfrak{t}(s)$.

Sekans hyperbolicus, ↗hyperbolische Sekansfunktion.

Sekansfunktion, der Kehrwert der ↗Cosinusfunktion, also die Funktion

$$\sec = \frac{1}{\cos} : \mathbb{R} \setminus \{(k + \tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \ \to \ \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \, .$$

Aus $\cos' = -\sin$ folgt

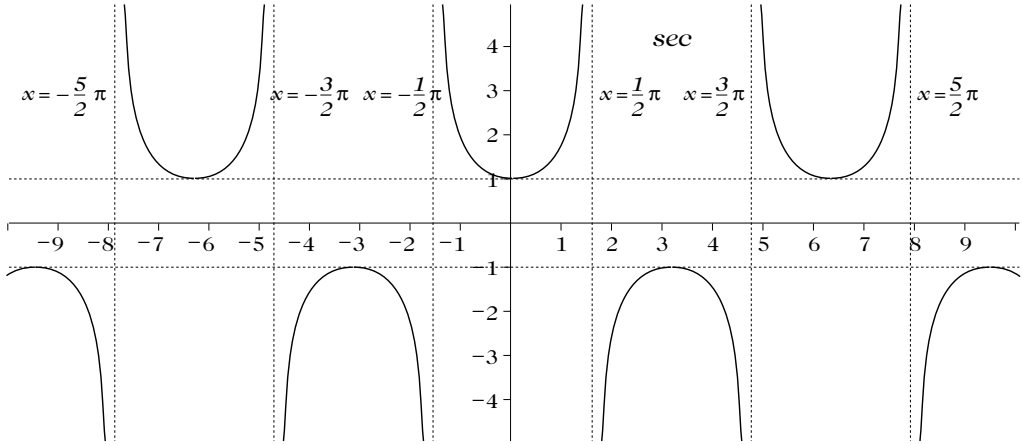
$$\sec' = \frac{\sin}{\cos^2} = \frac{\sin}{1 - \sin^2} \, .$$

Mit cos ist auch sec eine gerade 2π-periodische Funktion.

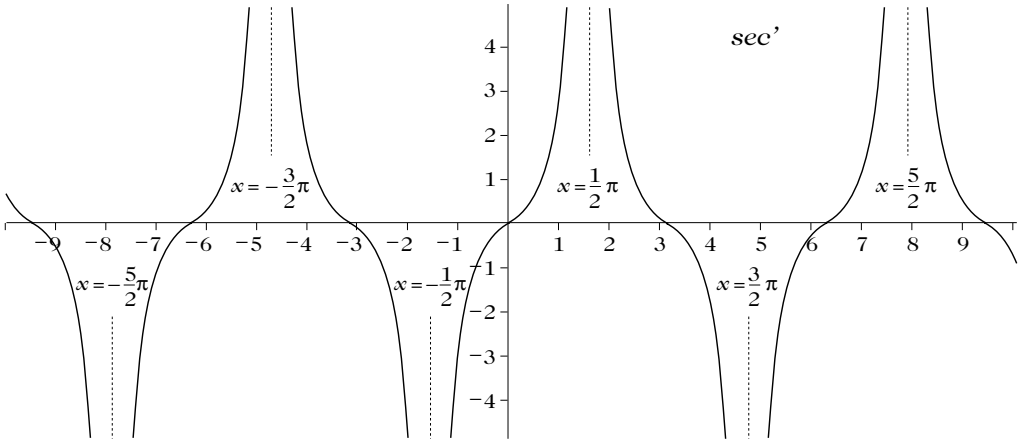
Für $|x| < \frac{\pi}{2}$ hat man die Reihendarstellung

$$\begin{aligned}\sec x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \, |E_{2n}| \, x^{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots\end{aligned}$$

mit den ↗Eulerschen Zahlen E_{2n}.



Sekansfunktion



Ableitung der Sekansfunktion

Sekante, die durch zwei gegebene, voneinander verschiedene Punkte eines Graphen einer reellwertigen Funktion einer oder mehrerer reeller Variablen verlaufende Gerade, also zu zwei Stellen $a \neq b$ aus dem Definitionsbereich der Funktion f die Gerade durch die Punkte $(a,f(a))$ und $(b,f(b))$. Die Sekante ist der Graph der Funktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

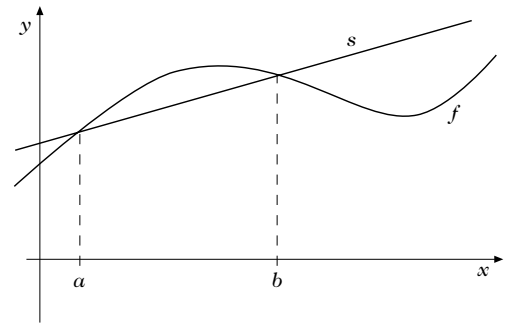
$$s(t) = (1-t)f(a) + tf(b) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Im Fall einer Funktion einer reellen Variablen läßt sich die Sekante auch angeben als Graph der Sekantenfunktion $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$s(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit der Steigung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ist a innere Stelle des Definitionsbereichs von f und f differenzierbar an der Stelle a, so erhält man die Ableitung $f'(a)$, d. h. die Steigung der ↗Tangente von f an der Stelle a, als Grenzwert der Sekantensteigung für $b \to a$.

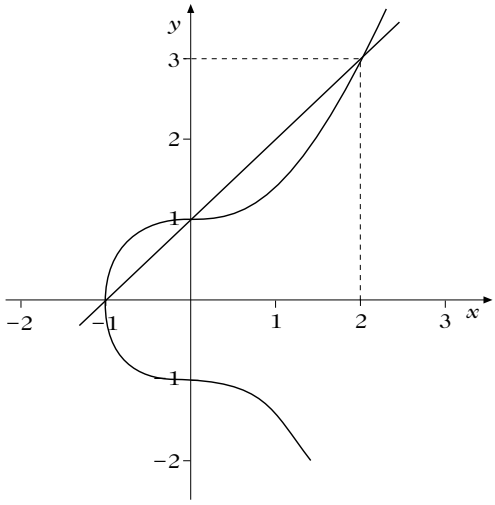


Sekantenmethode, Verfahren zur Konstruktion rationaler Punkte einer algebraischen Menge.

Die Methode läßt sich am besten an einem klassischen Beispiel erläutern: Gegeben seien zwei verschiedene rationale Lösungen (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{Q}^2$ der ↗Bachetschen Gleichung

$$x^3 - y^2 = c\,.$$

Man stelle sich nun die Menge aller reellen Lösungen dieser Gleichung als Kurve C in der Ebene vor, und verbinde die beiden gegebenen Lösungen durch eine Gerade g, die „Sekante". Falls g weder in (x_1, y_1) noch in (x_2, y_2) die Tangente an C ist, so kann man zeigen, daß g die Kurve C noch in einem dritten Punkt mit rationalen Koordinaten schneidet.



Sekantenmethode: Die „Sekante" durch $(-1,0)$ und $(0,1)$ schneidet die Kurve $x^3 - y^2 = -1$ noch im Punkt $(2,3)$.

Diese Methode, die implizit bereits in der „Arithmetika" des Diophantos von Alexandria zu finden ist, läßt sich prinzipiell auch auf in manchen komplizierteren und allgemeineren Situationen anwenden. Gelegentlich wird sie Bachet, Euler, oder Cauchy zugeschrieben.

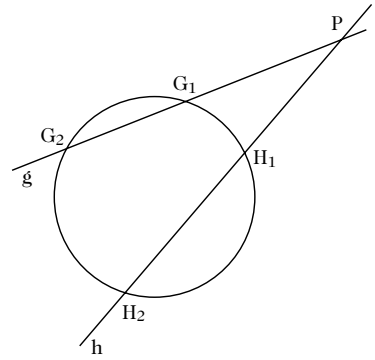
Diese Sekantenmethode ist nicht zu verwechseln mit dem in der ↗Numerischen Mathematik angewandten ↗Sekantenverfahren, wenngleich die beiden Begriffe in der Literatur gelegentlich vertauscht werden.

Sekantensatz, Aussage der elementaren Geometrie.

Gegeben sei ein Kreis K und ein außerhalb dieses Kreises liegender Punkt P. Weiter seien zwei Geraden g und h gegeben, die sich in P schneiden und mit K die Schnittpunkte G_1 und G_2 bzw. H_1 und H_2 haben.

Dann gilt die folgende Aussage über die Verhältnisse der Streckenlängen:

$$\overline{PG_1} : \overline{PH_1} = \overline{PH_2} : \overline{PG_2}\,.$$



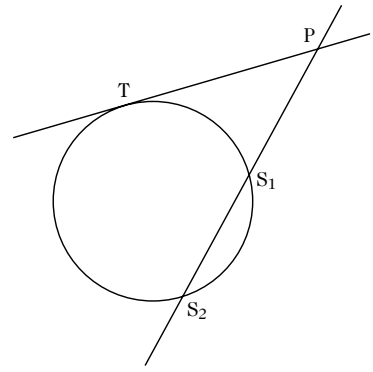
Sekantensatz

Sekanten-Tangenten-Satz, Aussage der elementaren Geometrie.

Gegeben sei ein Kreis K, sowie eine Sekante und eine Tangente von K, deren Verlängerungen sich in einem Punkt P schneiden. Die Schnittpunkte der Sekante mit dem Kreis seien mit S_1 und S_2, der Berührpunkt der Tangente mit T bezeichnet.

Dann gilt die folgende Aussage über die Verhältnisse der Streckenlängen:

$$\overline{PS_1} : \overline{PT} = \overline{PT} : \overline{PS_2}\,.$$



Sekanten-Tangenten-Satz

Sekantenverfahren, iteratives numerisches Verfahren zur Lösung einer nichtlinearen Gleichung

$f(x) = 0$ mit stetiger reeller Funktion f und unbekanntem reellen x.

Die Iterationsvorschrift lautet explizit

$$x_{k+1} := x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

mit vorgegebenen Startwerten x_0 und x_1. Geometrisch betrachtet wird in jedem Schritt die Sekante durch x_{k-1} und x_k an f gelegt und deren Schnittpunkt mit der x-Achse als neue Näherung genommen. Abgebrochen wird die Iteration üblicherweise, wenn $|x_{k+1} - x_k|$ hinreichend klein geworden ist.

Das Sekantenverfahren beruht im Prinzip auf der Ersetzung des Differentialquotienten im ↗Newtonverfahren durch den Differenzenquotienten und stellt somit eine Vereinfachung dieses Verfahrens dar.

Dieses Sekantenverfahren ist nicht zu verwechseln mit der in der Zahlentheorie angewandten ↗Sekantenmethode, wenngleich die beiden Begriffe in der Literatur gelegentlich vertauscht werden.

Seki Kowa, Takakazu, Mathematiker, geb. 1642 Fujioka (Japan), gest. 24.10.1708 Edo (heute Tokio).

Seki war der Sohn eines Samurai, wurde jedoch schon sehr bald von der adligen Familie Seki Gorozaiemon adoptiert, die ihm auch den Namen gab. Er wurde durch einen Hauslehrer der Familie erzogen, eignete sich aber auch viele mathematische Kenntnisse im Selbststudium an. Er baute in kurzer Zeit eine umfangreiche Bibliothek mathematischer Fachliteratur aus Japan und China auf, wurde selbst zum anerkannten Experten in dieser Disziplin und gewann zahlreiche Schüler.

Seki beschäftigte sich mit Diophantischen Gleichungen, magischen Quadraten, und, lange bevor Jacob Bernoulli selbst das tat, mit Bernoullischen Zahlen. Es scheint heute auch unstrittig, daß er bereits 1683, also etwa zehn Jahre vor Leibniz, mit Determinanten gearbeitet hat. Da jedoch wissenschaftlich Resultate zu damaligen Zeit kaum die Grenzen Japans nach außen durchdrangen, blieben Sekis Entdeckungen in Europa lange Zeit unbekannt.

Selberg, Atle, norwegischer Mathematiker, geb. 14.6.1917 Langesund (Norwegen). gest. 6.8.2007 Princeton (New Jersey).

Selberg, Sohn eines Mathematik-Professors, interessierte sich schon als Schüler für Mathematik, und wurde durch das Studium der Gesammelten Werke Ramanujans zu eigenen Forschungen angeregt. Weitere wichtige Impulse erhielt er zu Beginn seiner Universitätsausbildung in Oslo durch den Vortrag von Hecke auf dem dort 1936 stattfindenden Internationalen Mathematiker-Kongreß. 1942 schloß er sein Studium mit der Promotion ab und wirkte an der Universität Oslo als wissenschaftlicher Mitarbeiter. 1947 ging er zu einem Studienaufanthalt an des Institute for Advanced Study in Princeton, an dem er nach einjähriger Tätigkeit (1948/49) als Professor an der Universität in Syracuse (NY) ab 1949 als Mitarbeiter und ab 1952 als Professor wirkte. Seit 1987 ist er dort Professor Emeritus. Mehrfach weilte er zu Gastprofessuren an anderen Universitäten in aller Welt.

Inspiriert durch Ramanujans Arbeiten galt Selbergs Hauptinteresse der Zahlentheorie. Er begann seine Forschungen mit tiefliegenden Untersuchungen zur analytischen Zahlentheorie, insbesondere zur Verteilung von Primzahlen und zur Riemannschen ζ-Funktion. Dabei gelang ihm 1946 die Entdeckung einer neuen Siebmethode, die die Brunschen Siebmethoden verallgemeinerte. 1949 publizierte er einen elementaren Beweis des Primzahlsatzes und des Dirichletschen Primzahlsatzes über die unendliche Anzahl von Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Ein weiteres zentrales Resultat war sein Nachweis, daß die Menge der Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion, die der Riemannschen Vermutung genügen, eine positive Dichte hat. In Fortsetzung seiner analytischen Studien zur Riemannschen ζ-Funktion führte er die sog. Mollifier ein, beschäftigte sich mit automorphen Formen und widmete sich intensiv den Beziehungen zwischen Gruppendarstellungen, sowie zahlentheoretischen Fragen.

Für fast ein halbes Jahrhundert hat Selberg die Entwicklung der Zahlentheorie maßgeblich beeinflußt und mit seinen Resultaten bereichert. Dieses Wirken wurde mit zahlreichen Auszeichnungen gewürdigt, u. a. 1950 mit der ↗Fields-Medaille.

Selbergsche Siebmethode, die im folgenden beschriebene, 1947 von Selberg publizierte „elementare Methode in der Theorie der Primzahlen".

Seien eine Menge $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$, eine Menge $\mathcal{P}$ von Primzahlen, und eine natürliche Zahl z gegeben, und bezeichne $S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z)$ die Anzahl derjenigen Elemente von $\mathcal{A}$, die durch keine der Primzahlen aus $\{p \in \mathcal{P} : p < z\}$ teilbar sind. Bezeichne weiter

$$P(z) = \prod_{p \in \mathcal{P}, p < z} p$$

und $\lambda_1 = 1$, und seien λ_d für $d \geq 2$ beliebige reelle Zahlen. Dann gilt die Ungleichung

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{d | \mathrm{ggT}(a_j, P(z))} \lambda_d \right)^2 .$$

Selbergs Idee besteht nun darin, $\lambda_d = 0$ für $d \geq z$ zu setzen, und die rechte Seite der Ungleichung

durch eine geeignete Wahl von $\lambda_2, \ldots, \lambda_{s-1}$ möglichst klein zu machen.

Die Selbergsche Siebmethode ist, zusammen mit ihren Weiterentwicklungen, ein wichtiger Bestandteil der Methoden zur Untersuchung von Fragen zur ↗Primzahlverteilung.

selbst validierendes Verfahren, ↗E-Methode.

selbstadjungierte Differentialgleichung, Differentialgleichung mit selbstadjungiertem Differentialausdruck.

Ein Differentialausdruck $L(y)$ heißt selbstadjungiert, wenn $L^*(y) = L(y)$ ist, anti-selbstadjungiert, wenn $L^*(y) = -L(y)$ ist, mit dem adjungierten Differentialausdruck L^* (↗adjungierte Differentialgleichung)

Ein ↗Randwertproblem mit dem Differentialausdruck L heißt selbstadjungiert, wenn es mit seinem adjungierten Problem im folgenden Sinne übereinstimmt:

1. L ist selbstadjungiert.
2. Die Randbedingungen sind selbstadjungiert, d. h., für je zwei beliebige Vergleichsfunktionen u und v gilt $\int_a^b (vL(u) - uL(v))\,dx = 0$.

Ein Beispiel hierfür ist das ↗Sturm-Liouvillesche Randwertproblem. ↗Eigenwertprobleme sind selbstadjungiert, wenn sie, aufgefaßt als Randwertprobleme, selbstadjungiert sind. Das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen $\mathbf{y}' = P(x)\mathbf{y}$ heißt selbstadjungiert, falls P eine ↗schiefsymmetrische Matrix ist.

[1] Kamke, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I. B. G. Teubner Stuttgart, 1977.

selbstadjungierte Matrix, eine ↗quadratische Matrix A über $\mathbb{K}$, die mit ihrer ↗adjungierten Matrix A^* übereinstimmt: $A^* = A$.

Eine selbstadjungierte Matrix dient zur Darstellung eines ↗selbstadjungierten Endomorphismus'.

selbstadjungierter Endomorphismus, ein ↗Endomorphismus $f : V \to V$ auf einem euklidischen oder unitären Vektorraum, zu dem der adjungierte Endomorphismus (↗adjungierte Matrix) f^* existiert und gleich f ist: $f = f^*$.

Ein Endomorphismus auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V ist genau dann selbstadjungiert, wenn er bzgl. einer Orthonormalbasis von V durch eine symmetrische Matrix repräsentiert wird.

Zu jedem selbstadjungierten Endomorphismus f auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V gibt es eine ↗Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f, insbesondere ist f diagonalisierbar. Umgekehrt ist ein Endomorphismus f auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V, zu dem eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von f existiert, stets selbstadjungiert.

Selbstaffinität, eine der häufigsten Eigenschaften von ↗Fraktalen.

Es seien X ein ↗Banachraum und $S_1, \ldots, S_k : X \to X$ eine Auswahl affiner Kontraktionen so, daß

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| \;\le\; c_i \|x - y\|$$

mit $0 < c_i < 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $x, y \in X$ gilt.

Eine nichtleere kompakte Teilmenge $F \subset X$, für die

$$F \;=\; \bigcup_{i=1}^{k} S_i(F)$$

gilt, heißt selbstaffine Menge.

Selbstähnlichkeit, grundlegende Eigenschaft von ↗Fraktalen.

Es seien X ein ↗Banachraum und $S_1, \ldots, S_k : X \to X$ eine Auswahl kontrahierender ↗Ähnlichkeitsabbildungen mit $0 < c_i < 1$, also

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| \;=\; c_i \|x - y\|$$

für $x, y \in X$, $i \in \{1, \ldots, k\}$. Eine nichtleere kompakte Teilmenge $F \subset X$, für die $F = \bigcup_{i=1}^{k} S_i(F)$ gilt, heißt (streng) selbstähnliche Menge.

Selbstähnlichkeitsdimension, Beispiel einer ↗fraktalen Dimension selbstähnlicher Mengen (↗Selbstähnlichkeit).

Es sei X ein ↗Banachraum und $F \subset X$ eine nichtleere kompakte (streng) selbstähnliche Menge bzgl. einer geeigneten Auswahl kontrahierender Ähnlichkeitsabbildungen $S_1, \ldots, S_k$. Wenn eine nichtleere beschränkte offene Menge V existiert mit

$$V \;\supset\; \bigcup_{i=1}^{k} S_i(V)\,,$$

wobei die $S_i(V)$ paarweise disjunkt sind, dann heißt $s \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^{k} c_i^s = 1$ Ähnlichkeitsdimension von F. Es gilt:

Mit den Voraussetzungen von oben und der Ähnlichkeitsdimension s von F gilt

$$\dim_H F = \dim_{Kap} F = s$$

(↗Hausdorff-Dimension, ↗Kapazitätsdimension). Außerdem gilt für diesen Wert von s und das ↗Hausdorff-Maß μ_s^H:

$$0 \;<\; \mu_s^H(F) \;<\; \infty\,.$$

[1] Falconer, K.J.: Fraktale Geometrie: Mathematische Grundlagen und Anwendungen. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, 1993.

selbstanordnende Liste, verkettete Liste, die sich nach jedem Zugriff selbst neu organisiert.

Beim Zugriff auf verkettete Listen kann es je nach Anwendung vorkommen, daß ein einmal gefundener Schlüssel im Lauf der nächsten Zeit noch mehrfach benötigt wird, und man deshalb die Liste noch häufiger nach ihm durchsuchen wird. Es ist daher sinnvoll, das im letzten Zugriff gefundene Element an den Kopf der Liste zu stellen und somit die Liste bei jedem Zugriff umzustellen, um beim nächsten Zugriff auf diesen Schlüssel die Zugriffszeiten zu reduzieren. Das Durchsuchen einer Liste nach diesem Verfahren heißt Durchsuchen einer selbstorganisierenden Liste oder auch Durchsuchen einer selbstanordnenden Liste.

Ein typisches Beispiel für eine selbstanordnende Liste ist die Tabelle der Symbole in Compilern für Programmiersprachen.

Selbstanwendbarkeitsproblem, ↗Halteproblem.

Selbstbehalt, *Franchise*, Größe aus der Versicherungsmathematik, über die der Grad einer ↗ Risikoteilung parametrisiert wird.

Der Selbstbehalt spielt sowohl im Verhältnis zwischen Versicherungsnehmer und Versicherer als auch in der ↗ Rückversicherung eine Rolle. Durch einen Selbstbehalt lassen sich die Versicherungsprämien respektive das versicherungstechnische Risiko beim Erstversicherer reduzieren.

Grundidee der nichtproportionalen Risikoteilung ist es, den Schadenprozeß, charakterisiert durch eine Zufallsgröße S, in zwei Risikoprozesse S_E und S_R aufzuteilen. Dabei trägt der eine Vertragspartner (der Versicherungsnehmer bzw. der Erstversicherer) das Risiko unterhalb des Selbstbehalts a, d. h. $S_E = \min(S, a)$. Das verbleibende Risiko $S_R = S - S_E$ liegt beim Versicherungsunternehmen respektive dem Rückversicherer. Eine Berechnung des Erwartungswerts $E(S_E)$ sowie der höheren Momente der Verteilung des Risikos S_E unter Berücksichtigung des Selbstbehalts ist auf der Grundlage der Verteilung des ungeteilten Risikos S möglich. Daraus läßt sich die Prämie für einen Tarif mit Selbstbehalt respektive die Rückversicherungsprämie ableiten.

Selbstbeschränkung, ↗Selbstkonkordanz.

Selbstenergie, aus der Selbstwechselwirkung eines Teilchens stammende Energie E_0.

Beispiel: Wenn das Elektron als homogene kugelförmige elektrische Ladungsverteilung mit Radius r_0 angesehen wird, dann ist die durch die Wechselwirkung der Ladung mit dem von dieser Ladung erzeugten elektrischen Feld bestimmte Energie E_0 gegeben durch

$$E_0 = 3e^2/20\pi\varepsilon_0 r_0 \ .$$

Dabei ist e die elektrische Elementarladung und ε_0 die Dielektrizitätskonstante. Im Grenzwert $r_0 \to 0$ gilt $E_0 \to \infty$; diese unendlich große Selbstenergie eines Punktteilchens kann durch Renormierung beseitigt werden.

selbstkomplementärer Graph, *selbstkomplementierter Graph*, ein endlicher einfacher Graph G, falls $G \cong G^c$, wobei G^c der komplementäre Graph von G ist.

Siehe hierzu auch ↗ Graphenhomomorphismus.

selbstkomplementierter Graph, ↗selbstkomplementärer Graph.

selbstkonjugierte Partition, eine Partition α, die gleich ihrer konjugierten Partition α^+ ist.

Selbstkonkordanz, zusammen mit der Selbstbeschränkung eine zentrale Eigenschaft von ↗Barrierefunktionen, die ihre Verwendbarkeit bei ↗Innere-Punkte Methoden sicherstellt.

Im wesentlichen geht es dabei um die Frage, inwieweit sich diese Verfahren auf allgemeinere konvexe Optimierungsprobleme als die lineare Programmierung ausdehnen lassen.

Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$c^T \cdot x \ \to \ \min$$

auf einer Menge $x \in S \subset \mathbb{R}^n$, die kompakt und konvex sei. Zudem nehmen wir an, daß das Innere S^0 von S nicht leer sei. Man beachte, daß sich auf diese Art auch nichtlineare konvexe Zielfunktionen $f(x) \to \min$ behandeln lassen: Zunächst führe man eine zusätzliche Variable x_{n+1} ein; fügt man jetzt die Nebenbedingung $f(x) \leq x_{n+1}$ hinzu, und tauscht die Zielfunktion f gegen die neue lineare Zielfunktion x_{n+1} aus, so hat das Problem $x_{n+1} \to \min$ unter $x \in S$, $f(x) \leq x_{n+1}$ die gewünschte Form, und seine Lösungen sind genau diejenigen des Ausgangsproblems.

Der Spezialfall

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i^T \cdot x - b_i \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

liefert die lineare Programmierung. Hier spielt die logarithmische Barrierefunktion

$$\Phi(x) := -\sum_{i=1}^{m} \ln(b_i - a_i^T \cdot x)$$

eine fundamentale Rolle bei der Anwendung Innerer-Punkte Methoden. Es stellt sich dabei heraus, daß lediglich drei Eigenschaften von Φ für das Gelingen eines derartigen Verfahrens notwendig sind:

i) die Eigenschaft, eine Barrierefunktion zu sein;

ii) die sogenannte Selbstkonkordanz: Φ ist eine konvexe C^3-Funktion auf S^0 und erfüllt dort die Differentialgleichung

$$|D^3\Phi(x)(h,h,h)| \leq 2 \cdot \left(D^2\Phi(x)(h,h)\right)^{\frac{3}{2}}$$

für alle $h \in \mathbb{R}^n$;

iii) die sogenannte Selbstbeschränkung: Φ ist Lipschitz-stetig bezüglich der lokalen Metrik, die von seiner zweiten Ableitung erzeugt wird, d. h., $\forall x \in S^0, h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|D\Phi(x)h| \leq \sqrt{\vartheta} \cdot \left(D^2\Phi(x)(h,h)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hierbei ist $\vartheta \geq 1$ eine von Φ abhängige Konstante (der Parameter der Barrierefunktion).

Selbstkonkordanz garantiert im wesentlichen schnelle lokale Konvergenz des ↗Newtonverfahrens für die Nullstellensuche von $D\Phi$: Das geforderte Verhältnis von $D^3\Phi$ zu $D^2\Phi$ drückt aus, daß die bei einer Linearisierung durchgeführte Approximation von $D^2\Phi(x)$ durch $D^2\Phi(x^k)$ (x^k ein Iterationspunkt) relativ gut ist. Man beachte, daß der geforderte Faktor 2 beliebig ist und durch jedes $\alpha > 0$ ersetzt werden kann. Man betrachtet häufig $\alpha = 2$, da sich diese Wahl für die Barrierefunktion $-\ln(t)$ ergibt.

Die Selbstbeschränkung bewirkt, daß die obige lokale Konvergenz in einem genügend großen Einzugsbereich vorliegt. Zusammenfassend gilt dann:

Sei Φ eine selbstkonkordante und selbstbeschränkte Barrierefunktion auf S, und sei $x_0 \in S^0$ ein Startpunkt.

Dann läßt sich ausgehend von x_0 eine Innere-Punkte Methode ausführen, die zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ in Polynomzeit (Turingmodell) einen Punkt x_ε erzeugt, der

$$c^T \cdot x_\varepsilon - \min_{x \in S} c^T \cdot x \leq \varepsilon$$

erfüllt.

[1] Nemirovskiĭ, A.S.; Nesterov, Y.: Interior-point polynomial algorithms in convex programming. SIAM Publications, Philadelphia, 1994.

selbstorganisierende Karte, *SOM*, (engl. self-organizing map), *Kohonen-Abbildung*, bezeichnet eine spezielle Abbildung, die in Zusammenhang mit der ↗Kohonen-Lernregel auftritt, bzw. im engeren Sinne die topologische Visualisierung dieser Abbildung.

Im folgenden wird das Prinzip einer selbstorganisierenden Karte an einem einfachen Beispiel (diskrete Variante) erläutert: Aus einer abgeschlossenen konvexen nichtleeren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ werden gemäß einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung zufällig Vektoren $x \in A$ ausgewählt, die in insgesamt j Cluster eingeordnet werden sollen. Dazu werden zunächst ebenfalls zufällig sogenannte Klassifikationsvektoren $w^{(i)} \in A$, $1 \leq i \leq j$, generiert, die die einzelnen Cluster repräsentieren sollen und aus diesem Grunde auch kurz als Cluster-Vektoren bezeichnet werden. Die Justierung der Cluster-Vektoren in Abhängigkeit von den zu klassifizierenden Vektoren geschieht nun im einfachsten Fall wie folgt, wobei $\lambda \in (0,1)$ ein noch frei zu wählender Lernparameter ist: Im s-ten Schritt zur Klassifikation des s-ten zufällig gewählten Vektors $x \in A$ berechne jeweils ein Maß für die Entfernung von x zu allen Cluster-Vektoren $w^{(i)}$, $1 \leq i \leq j$ (z. B. über den Winkel, den euklidischen Abstand, o.ä.). Schlage x demjenigen Cluster zu, dessen Cluster-Vektor die geringste Entfernung von x hat. Falls mehrere Cluster-Vektoren diese Eigenschaft besitzen, nehme das Cluster mit dem kleinsten Index. Falls der so fixierte Cluster-Vektor den Index i hat, ersetze ihn durch $w^{(i)} + \lambda(x - w^{(i)})$, d. h. durch eine Konvexkombination des alten Cluster-Vektors mit dem neu klassifizierten Vektor; alle übrigen Cluster-Vektoren bleiben unverändert.

Iteriere dieses Vorgehen mehrmals, erniedrige λ Schritt für Schritt und breche den Algorithmus ab, wenn z. B. eine gewisse Anzahl von Iterationsschritten durchlaufen worden sind. Die Abbildung $K : A \to A$, die nun nach Beendigung des Klassifizierungsprozesses jedem Vektor $x \in A$ seinen im obigen Sinne eindeutig bestimmten Cluster-Vektor $w^{(i)}$, $i \in \{1, \ldots j\}$, zuordnet (gemäß kleinste Entfernung und ggfs. zusätzlich kleinster Index), wird Kohonen-Abbildung (oder auch (Kohonen-)Karte) genannt. Ferner wird der Prozeß ihrer Entstehung im Sinne des oben beschriebenen algorithmischen Vorgehens häufig als selbstorganisierende Karte bezeichnet, wobei allerdings in der einschlägigen Literatur die Übergänge zwischen den Begriffen Kohonen-Lernregel, (selbstorganisierende) (Kohonen-)Karte und Kohonen-Abbildung vielfach fließend sind.

Siehe auch ↗Clusteranalyse und ↗Kohonen-Lernregel.

Selektion, nach Darwin einer der Mechanismen der Evolution (s.a. ↗Drift).

Entsprechend wichtig sind Selektionsmodelle in der Populationsgenetik. Schon die einfachsten Fälle zeigen, daß nicht Typen optimal sind, sondern Verteilungen von Typen. In der Ökologie unterscheidet man r-Selektion (hohe Nachkommenzahlen) von K-Selektion (geringe Mortalität).

Selektion der Variablen, ↗Wahl wesentlicher Einflußgrößen.

Selmanow, Efim, ↗Zelmanow, Efim.

seltsamer Attraktor (engl. strange attractor), ein ↗Attraktor eines ↗dynamischen Systems, der eine „seltsame“, komplizierte Struktur zeigt.

Es gibt keine scharf umrissene eigentliche Definiton eines seltsamen Attraktors. Die Bezeichnung geht auf den ↗Lorentz-Attraktor zurück, bei dem erstmal ein derartiger Effekt untersucht wurde.

Siehe auch ↗Hénon-Abbildung und ↗Rössler-Attraktor.

semantisch widerspruchsfreies logisches System, System Σ von ↗logischen Axiomen, aus dem sich mit Hilfe der Folgerungsrelation $\models$ (↗semantische

Folgerung) kein Widerspruch erzeugen läßt, d. h., es gibt keinen Ausdruck φ so, daß $\varphi \wedge \neg\varphi$ aus Σ folgt.

semantische Folgerung, eine ↗Aussage, die aus einer Menge von gegebenen Aussagen (Voraussetzungen) inhaltlich folgt.

Ist z. B. L eine elementare Sprache, T eine Menge von Aussagen aus L (T wird auch elementare Theorie genannt und dient als Menge von Voraussetzungen), und ist φ eine in L formulierte Aussage, dann *folgt* φ aus der Theorie T (symbolisch: $T \models \varphi$), wenn jedes ↗Modell von T auch ein Modell von φ ist.

semialgebraische Menge, endliche Vereinigung von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ von der Form

$$\begin{aligned} &S\left(f_1,\ldots,f_p;\ g_1,\ldots,g_q\right)\\ &\quad=\{x\in\mathbb{R}^n \mid f_1(x)=\cdots=f_p(x)=0,\\ &\qquad g_1(x)<0,\ldots,g_q(x)<0\} \end{aligned}$$

mit Polynomen $f_1,\ldots,f_q$ und $g_1,\ldots,g_q$ aus $\mathbb{R}\left[X_1,\ldots,X_n\right]$.

Semibilinearform, ↗Sesquilinearform.

semidefinit, ↗positiv definite Matrix.

semidefinite Optimierung, spezielle Klasse von Optimierungsproblemen.

Für $m,n\in\mathbb{N}$ seien $B,A_1,\ldots,A_n$ symmetrische (m,m)-Matrizen. Die Menge

$$S:=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot A_i - B \text{ ist negativ semidefinit}\right\}$$

wird ein Spektahedron genannt. Das Problem der semidefiniten Optimierung (*SDP*) besteht in der Minimierung eines linearen Funktionals über S, also, mit $c\in\mathbb{R}^n$:

$$(SDP):\ \text{minimiere } c^T\cdot x\ ,\ x\in S\ .$$

Viele interessante Optimierungsprobleme, z. B. multi-quadratische Optimierungsprobleme und Eigenwertaufgaben, können in ein (*SDP*) umformuliert werden.

[1] Boyd, S.; Vandenberghe, L.: Semidefinite programming. SIAM Review 38, 1996.

semi-entscheidbar, Eigenschaft von Mengen.

Eine Menge A ist semi-entscheidbar, wenn sie Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion ist. Das bedeutet, daß es einen Algorithmus gibt, der genau auf den Eingaben aus A stoppt. Es gilt der folgende Satz:

Eine Menge ist genau dann semi-entscheidbar, wenn sie ↗rekursiv aufzählbar ist.

semi-infinite Optimierung, beschäftigt sich mit Optimierungsproblemen, in denen unendlich viele Ungleichungsrestriktionen auftreten.

Ein typisches Beispiel ist das folgende Problem (*SIP*), definiert durch stetige Funktionen:

(*SIP*) minimiere $f(x), x\in M$, wobei $M:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid G(x,y)\geq 0, y\in Y\}$. Die Menge Y ist dabei eine nicht-leere kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und wird folgendermaßen definiert:

$$Y:=\{y\in\mathbb{R}^m \mid g_j(y)\geq 0, j\in J\}\ ,\ |J|<\infty\ .$$

Aufgaben beispielsweise vom Typ einer Tschebyschew-Approximation lassen sich in ein semiinfinites Optimierungsproblem umformulieren und gehören somit zu den Standardbeispielen dieser Klasse von Optimierungsproblemen.

Grundlegend ist der sogenannte Reduktionsansatz, mit dem man (*SIP*) lokal in ein Optimierungsproblem mit nur endlich vielen Ungleichungsrestriktionen überführen kann. Der Reduktionsansatz kann bei numerischen Verfahren (vom Newton-Typ) erfolgreich eingesetzt werden und beruht auf der folgenden einfachen Beobachtung:

Für $\bar{x}\in M$ ist jedes $\bar{y}\in Y_0(\bar{x})$ eine globale Minimalstelle für die Funktion $G(\bar{x},\bullet)|_Y$, wobei

$$Y_0(\bar{x}) \ = \ \{y\in Y \mid G(\bar{x},y)\} \ = \ 0$$

die aktive Indexmenge bezeichnet. Die definierenden Funktionen seien aus der Klasse C^2. Falls alle Punkte aus $Y_0(\bar{x})$ nicht-entartete Minimalstellen von $G(\bar{x},\bullet)|_Y$ sind, so ist $Y_0(\bar{x})$ eine endliche Menge, etwa $Y_0(\bar{x})=\{\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_r\}$.

Vermöge des Satzes über impliziten Funktionen gibt es dann lokal (implizite) C^1-Funktionen $y_1(x),\ldots,y_r(x)$, wobei jedes $y_i(x)$ eine lokale Minimalstelle von $G(x,\bullet)|_Y$ ist. Somit wird die zulässige Menge M in einer Umgebung von $\bar{x}$ durch die endlich vielen C^2-Ungleichungsrestriktionen $G(x,y_i(x))\geq 0, i=1,2,\ldots,r$ beschrieben (lokale Reduktion).

Semiinvariante, ↗Kumulante.

semiklassischer Limes, Näherungsverfahren für die Lösung insbesondere von Gleichungen der Quantenmechanik in Form von Potenzreihen im ↗Planckschen Wirkungsquantum h oder einer asymptotischen Lösung für $h\to 0$ derart, daß der führende Term durch die klassische Mechanik bestimmt wird (↗Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys-Methode).

semikubische Parabel, ↗Neilsche Parabel.

semilineare Abbildung, Abbildung $\varphi: V\to W$ zwischen zwei ↗Vektorräumen V und W über $\mathbb{C}$ für die für alle $v_1,v_2,v\in V$ und alle $\alpha\in\mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(v_1+v_2) &= \varphi(v_1)+\varphi(v_2);\\ \varphi(\alpha v) &= \overline{\alpha}\varphi(v). \end{aligned}$$

($\overline{\alpha}$ bezeichnet die konjugiert komplexe Zahl zu α.) Statt semilinear sagt man auch antilinear.

Allgemeiner spricht man von einer (λ)-semilinearen Abbildung $\varphi: V\to W$ zwischen zwei Vek-

torräumen V und W über $\mathbb{K}$, falls auf $\mathbb{K}$ ein Körper-Automorphismus $\lambda : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ gegeben ist, so daß für alle $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v} \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) &= \varphi(\mathfrak{v}_1) + \varphi(\mathfrak{v}_2); \\ \varphi(\alpha\mathfrak{v}) &= \lambda(\alpha)\varphi(\mathfrak{v}). \end{aligned}$$

semilineare Differentialgleichung, ↗gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung für die Funktion y, die in allen Ableitungen $y, y', \ldots, y^{(n)}$ linear ist, deren rechte Seite (die Funktion b) aber zusätzlich zur freien Variablen x auch von allen Ableitungen von y bis zur $(n-1)$-ten Ordnung abhängen kann. Eine semilineare Differentialgleichung ist also von der Form

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = b(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

semilokaler Ring, Ring mit endlich vielen Maximalidealen.

↗Lokale Ringe sind insbesondere semilokal. Die direkte Summe von endlich vielen lokalen Ringen ist ein semilokaler Ring.

Semimartingal, auch Halbmartingal genannt, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierter und der Filtration $(\mathfrak{A}_t)_{t\geq 0}$ in $\mathfrak{A}$ adaptierter stetiger stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t\geq 0}$, welcher eine Zerlegung $X = M + V$, d. h. $X_t = M_t + V_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$, in ein stetiges lokales Martingal $M = (M_t)_{t\geq 0}$ und einen stetigen Prozeß $(V_t)_{t\geq 0}$ mit lokal beschränkter Variation besitzt.

Dabei wird vorausgesetzt, daß $(\mathfrak{A}_t)_{t\geq 0}$ die üblichen Voraussetzungen erfüllt. Die Forderung an V, von lokal beschränkter Variation zu sein, bedeutet, daß jeder Pfad $t \to V_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, auf jedem Intervall $[0, T]$ mit $T \in \mathbb{R}_0^+$ von beschränkter Variation ist, d. h. es gilt

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{k_n} |V_{t_i}(\omega) - V_{t_{i-1}}(\omega)|\right\} < \infty,$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen der Form $\{t_0, \ldots, t_{k_n}\}$ mit $0 = t_0 < \cdots < t_{k_n} = T$ und $n \in \mathbb{N}$ von $[0, T]$ gebildet wird.

Die Darstellung $X = M + V$ ist eindeutig, wenn man zusätzlich verlangt, daß P-fast sicher $V_0 = 0$ gilt.

semimodularer Verband, ↗halbmodularer Verband.

Semimorphismus, eine Abbildung $\bigcirc$ einer algebraischen Struktur $(M, \times)$ auf eine Teilstruktur $(N, \otimes)$, die ein ↗symmetrisches Raster $N \subseteq M$ bildet, mit folgenden Eigenschaften:

$$a \leq b \Rightarrow \begin{aligned} \bigcirc(a) &= a && \forall a \in N, \\ \bigcirc(a) &\leq \bigcirc(b) && \forall a, b \in M, \\ \bigcirc(-a) &= -\bigcirc(a) && \forall a \in M, \\ a \otimes b &= \bigcirc(a \times b) && \forall a, b \in N. \end{aligned}$$

Semimorphismen werden u. a. verwendet, um ↗Maschinenarithmetik zu definieren. Sie erhalten die Kommutativität, aber nicht die Assoziativität der Verknüpfungen.

semi-Thue-Operation, ↗semi-Thue-System.

semi-Thue-System, endliche nicht-leere Menge von semi-Thue-Operationen; dies wiederum sind geordnete Paare von Wörtern (x, y) über einem gegebenen Alphabet.

Diese Operationen können, ausgehend von einem gegebenen Startwort (dem Axiom), in beliebiger Reihenfolge angewandt werden, dadurch daß ein Vorkommen des Teilworts x durch y ersetzt wird. semi-Thue-Systeme sind also nichts anderes als ↗allgemeine Grammatiken, wobei keine Unterscheidung zwischen Variablen- und Terminalsymbolen getroffen wird.

Das ↗Wortproblem für semi-Thue-Systeme, also die Frage, ob das Axiom überführbar ist in ein gegebenes Wort w, ist unentscheidbar (↗Entscheidbarkeit).

Sender, ↗Informationstheorie.

Senke, Fixpunkt $x_0 \in W$ eines auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ definierten C^1–Vektorfeldes $f : W \to \mathbb{R}^n$, für den alle Eigenwerte der Linearisierung (↗Linearisierung eines Vektorfeldes) $Df(x_0)$ negative Realteile haben.

Eine Senke verhält sich lokal wie der Fixpunkt 0 eines linearen Vektorfeldes f, dessen Eigenwerte alle negative Realteile haben, insbesondere ist er asymptotisch stabil (↗Ljapunow-Stabilität):

Sei auf einer offenen Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld gegeben. Falls für einen Fixpunkt $x_0 \in W$ alle Eigenwerte der Linearisierung $Df(x_0)$ Realteil $< \varepsilon$ mit geeignetem $\varepsilon > 0$ haben, so gibt es eine Umgebung $U \subset W$ von x_0 und eine Konstante $C > 0$ so, daß gilt: Für alle $x \in U$ und alle $t > 0$ existiert der zu f gehörige Fluß $\Phi_t(x)$ durch x in W, und es gilt

$$\|\Phi_t(x) - x_0\| \leq C e^{-\varepsilon t} \|x - x_0\|.$$

Insbesondere ist x_0 asymptotisch stabil.

Stabile ↗Knotenpunkte und stabile ↗Wirbelpunkte sind Beispiele für Senken.

senkrecht, Bezeichnung für zwei Geraden, die sich im ↗rechten Winkel schneiden. Man sagt dann, die beiden Geraden stehen senkrecht aufeinander.

Der Begriff „senkrecht“ existiert in teilweise starker Abstraktion in vielen Gebieten der Mathematik, wird jedoch außer im hier vorliegenden elementargeometrischen Fall heutzutage meist mit dem Synonym „orthogonal“ bezeichnet. Man vergleiche dort für weitere Information.

senkrechte Tangente, ↗uneigentliche Differenzierbarkeit.

separable Erweiterung, eine algebraische ↗Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, bei der alle Elemente aus $\mathbb{L}$ separabel über $\mathbb{K}$ sind. Über einem Körper der Charakteristik Null sind alle Körpererweiterungen separabel.

separable Hülle, Begriff aus der Algebra.

Die separable Hülle eines Körpers $\mathbb{K}$ in einem Erweiterungskörper $\mathbb{L}$ ist der Unterkörper, gegeben durch die über $\mathbb{K}$ separablen Elemente von $\mathbb{L}$.

separable Skalierungsfunktion, zweidimensionale Skalierungsfunktion $\phi(x,y)$, die sich als Tensorprodukt $\phi(x)\phi(y)$ schreiben läßt.

Vorteilhaft ist die einfache Berechenbarkeit aus der eindimensionalen Skalierungsfunktion ϕ. Für manche Anwendungen ist die Anisotropie, d. h. hier die Richtungsselektivität, der entsprechenden Wavelets ein Nachteil, es werden die x- und y-Richtung sowie die Diagonale ausgezeichnet.

separabler Raum, topologischer Raum, der eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

Beispielsweise ist der Raum $\mathbb{R}^n$ separabel in der natürlichen Topologie, da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar und dicht in $\mathbb{R}^n$ ist.

separabler stochastischer Prozeß, auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierter stochastischer Prozeß $(X_t)_{t\in T}$, $T \subseteq \mathbb{R}$, mit einem topologischen Zustandsraum $(E, \mathfrak{B}(E))$, für den eine abzählbare Menge $T_0 \subseteq T$ und ein Ereignis $A_0 \in \mathfrak{A}$ mit $P(A_0) = 0$ existieren, so daß

$$\bigcap_{t\in I\cap T_0} \{X_t \in F\} \setminus \bigcap_{t\in I\cap T} \{X_t \in F\} \subseteq A_0$$

für jede abgeschlossene Menge $F \subseteq E$ und jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gilt. Dabei bezeichnet $\mathfrak{B}(E)$ die σ-Algebra der Borelschen Mengen von E.

separables Element, Nullstelle eines ↗separablen Polynoms mit Koeffizienten aus einem Körper $\mathbb{K}$.

Über einem Körper der Charakteristik Null sind alle Elemente separabel.

separables Polynom, über einem Körper $\mathbb{K}$ irreduzibles Polynom, das nur einfache Nullstellen im algebraischen Abschluß von $\mathbb{K}$ hat.

Diese Nullstellen sind die ↗separablen Elemente. Ist ein Polynom nicht separabel, so nennt man es auch inseparabel. Dementsprechend heißen seine Nullstellen inseparable Elemente. Über einem Körper der Charakteristik Null sind alle Polynome separabel.

Separation der Variablen, andere Bezeichnung für Trennung der Variablen, vgl. ↗Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Separatrix, Begriff zur Untersuchung des qualitativen Verhaltens ↗dynamischer Systeme.

Für ein dynamisches System (M, G, Φ) heißt der Orbit durch einen Punkt $p \in M$ Separatrix, falls jede Umgebung von p einen Punkt $q \in M$ enthält so, daß ihre α- bzw. ω-Limesmengen nicht übereinstimmen:

$$\alpha(p) \neq \alpha(q) \quad \text{bzw.} \quad \omega(p) \neq \omega(q)\,.$$

Der Name „Separatrix“ rührt daher, daß (im Falle zweidimensionaler Systeme) Separatrizen und geschlossene Orbits den Phasenraum in Gebiete teilen, in denen die Trajektorien ähnliches Verhalten zeigen.

Etwas salopp kann man sagen, eine Separatrix sei eine Hyperfläche, die zwei offene Bereiche voneinander abtrennt, auf denen das dynamische System in der Regel unterschiedliche Stabilitätseigenschaften hat.

Falls das dynamische System ein zweites komplizierteres System approximiert, so kann es beim zweiten System zu einer Aufspaltung von Separatrizen des ersten Systems kommen. Siehe auch ↗Resonanz dritter Ordnung.

separierte Grammatik, ↗ Grammatik.

sequential unconstraint minimization technique, Optimierungstechnik, die unter Verwendung eines Strafterms (Penalty-Funktion) arbeitet.

Dabei wird eine zu minimierende Zielfunktion $f(x)$ mit einem zusätzlichen Term $\mu \cdot P(x)$ versehen. Hierbei ist $\mu > 0$ ein Parameter und $P(x)$ die Straffunktion. Gelöst werden nun Probleme aus der einparametrigen Familie

$$\min\{f(x) + \mu \cdot P(x), x \in M\}\,.$$

Dabei sei $P(x)$ für nicht zulässige Punkte $x \notin M$ positiv, und für zulässige Punkte identisch 0. Die Menge M hängt i. allg. von der speziellen Wahl von P ab. Zwei wichtige Beispiele sind innere und äußere Straffunktionen. Verallgemeinerte Straffunktionen können auch weitere Parameter enthalten.

Sequentialanalyse, ein von A. Wald 1947 begründetes Teilgebiet der mathematischen Statistik, welches zum Ziel hat, den Aufwand (Versuchsumfang) bei einer statistischen Entscheidungsfindung zu minimieren.

Die Sequentialanalyse (SA) spielt eine große Rolle in der ↗statistischen Qualitätskontrolle, wird aber auch beispielsweise in der Biometrie zum Vergleich von Medikamenten angewendet.

Die Sequentialanalyse faßt alle statistischen Verfahren (Test- und Schätzverfahren) zusammen, bei denen in jedem Zeitpunkt aufgrund vorliegender Versuchsergebnisse entschieden wird, ob die Versuchsserie abgebrochen werden kann oder fortzusetzen ist. Sequentielle Verfahren sind damit durch einen zufälligen Stichprobenumfang gekennzeichnet.

Das bekannteste sequentielle Testverfahren ist der Waldsche Sequentialtest (WST) zum Prüfen einer Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$. Im Gegensatz

zum ↗Signifikanztest geht man hier davon aus, daß eine genaue Kenntnis über die Alternativhypothese vorliegt, d. h., man prüft

$$H_0 : p = p_0 \text{ gegen } H_1 : p = p_1,$$

wobei p_0 und $p_1 \in [0, 1]$ bekannte Werte sind.

Es seien $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine konkrete und $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ die zugehörige mathematische ↗Stichprobe, und $P(\vec{X} = \vec{x}|p_i)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Stichprobenvektors unter der Annahme der Gültigkeit der Hypothese $H_i, i = 0, 1$. Die Teststatistik des Sequentialtests ist der sogenannte Likelihoodquotient, d. h., der Quotient der zu den Hypothesen gehörenden Likelihood-Funktionen

$$LQ := LQ(x_1, \ldots, x_n) = \frac{P(\vec{X} = \vec{x}|p_1)}{P(\vec{X} = \vec{x}|p_0)} .$$

Offensichtlich spricht ein hoher Wert von LQ für die Gültigkeit der Hypothese H_1 und ein kleiner Wert von LQ für die Hypothese H_0. Sind L_o und L_u zwei vorgegebene Grenzen (Schwellwerte), so lautet die Entscheidungsregel des Tests:

a) Ist $LQ \geq L_o$, so wird H_1 angenommen.
b) Ist $LQ \leq L_u$, so wird H_0 angenommen.
c) Ist $L_u < LQ < L_o$, so kann keine Entscheidung getroffen werden, und es wird zur Stichprobe $\vec{x}$ ein weiteres Stichprobenelement x_{n+1} hinzugenommen.

Die wichtigste Aufgabe der statistischen SA besteht nun in der Wahl der Grenzen L_u und L_o so, daß die zugehörigen Fehler 1. und 2. Art des Tests (↗Testtheorie) möglichst klein sind.

Im allgemeinen lassen sich Fehler 1. und 2. Art eines sequentiellen Tests nur sehr schwer bestimmen. Seien α und β die Fehler 1. und 2. Art zu diesem Testverfahren. Es läßt sich zeigen, daß dieses Testverfahren dasjenige ist, welches unter allen anderen Testverfahren, deren Fehler 1. und 2. Art α bzw. β nicht überschreiten, den kleinsten erwarteten Stichprobenumfang besitzt.

Darüber hinaus bestehen zwischen den beiden Fehlerwahrscheinlichkeiten und den Grenzen L_u und L_o folgende Ungleichungen:

$$L_u \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \text{ und } L_o \geq \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Um einen WST zu erhalten, der wenigstens näherungsweise vorgegebene Fehlerwahrscheinlichkeiten α und β einhält, wurden von A.Wald die Näherungen

$$L_u \approx \frac{\beta}{1-\alpha} \text{ und } L_o \approx \frac{1-\beta}{\alpha}$$

vorgeschlagen. Es läßt sich zeigen, daß dann zumindest die Summe $\alpha^* + \beta^*$ der tatsächlichen Irrtumswahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art des Tests nach oben beschränkt sind, es gilt: $\alpha^* + \beta^* \leq \alpha + \beta$.

sequentieller Schaltkreis, ↗logischer Schaltkreis.

Serenus, Mathematiker und Kommentator, geb. um 300 Antinoupolis (Ägypten), gest. um 360 .

Über das Leben des Serenus ist wenig bekannt. Er war ein eifriger Kommentator der Texte anderer Wissenschaftler, besaß aber auch, im Gegensatz zu vielen anderen Kommentatoren seiner Zeit, tiefgehende Kenntnisse der Mathematik.

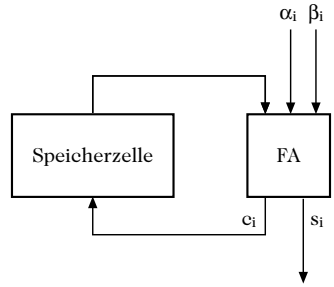
Serenus verfaßte zwei mathematische Abhandlungen, „Über Zylinderschnitte“ und „Über Kegelschnitte“, die beide erhalten sind.

serieller Addierer, sequentieller ↗logischer Schaltkreis zur Durchführung der Addition $s = (s_{n-1}, \ldots, s_0)$ von zwei n-stelligen binären Zahlen $\alpha = (\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0)$ und $\beta = (\beta_{n-1}, \ldots, \beta_0)$, der n Schritte benötigt, um das Ergebnis bereitzustellen.

Im ersten Schritt wird das nullte Summenbit $s_0 = \alpha_0 \oplus \beta_0$ und der an dieser Stelle auftretende Übertrag $c_0 = \alpha_0 \wedge \beta_0$ berechnet. Im $(i+1)$-ten Schritt $(1 \leq i \leq n-1)$ wird das i-te Summenbit $s_i = \alpha_i \oplus \beta_i \oplus c_{i-1}$ und der an der i-ten Stelle auftretende Übertrag

$$c_i = (\alpha_i \wedge \beta_i) \vee ((\alpha_i \oplus \beta_i) \wedge c_{i-1})$$

berechnet.



Serieller Addierer

serieller Multiplizierer, sequentieller ↗logischer Schaltkreis zur Durchführung der Multiplikation von zwei n-stelligen binären Zahlen $\alpha = (\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0)$ und $\beta = (\beta_{n-1}, \ldots, \beta_0)$, der n Schritte benötigt, um das Ergebnis bereitzustellen.

Der Schaltkreis enthält in der Regel drei Register, davon zwei n-Bit Register zum Abspeichern der Operanden α und β, und ein $2n$-Bit Register zum Abspeichern der Zwischenergebnisse bzw. des Ergebnisses. Das Zwischenergebnis wird mit dem Wert 0 initialisiert. Im i-ten Schritt, $i = 0, \ldots, n-1$, wird

$$(\alpha_{n-1} \wedge \beta_i, \ldots, \alpha_0 \wedge \beta_i)$$

um i Stellen nach links auf das Zwischenergebnis geshiftet, mit Hilfe einer seriellen Addition oder eines ↗Carry-Ripple Addierers aufaddiert.

Serien-Parallel-Struktur, Struktur von Systemen, die in der Zuverlässigkeitstheorie betrachtet werden, siehe ↗Zuverlässigkeitsschaltbilder.

Serienstruktur, Struktur von Systemen, die in der Zuverlässigkeitstheorie betrachtet werden, siehe ↗Zuverlässigkeitsschaltbilder.

Serre, Dualitätssatz von, in impliziter Form einer der klassischen Sätze der Theorie der algebraischen Kurven.

In expliziter allgemeiner Form (für nicht notwendig kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension) wurde der Satz 1954 von J.-P. Serre formuliert und bewiesen.

Sei X eine zusammenhängende kompakte Riemannsche Fläche mit Strukturgarbe $\mathcal{O}$. $\Omega = \Omega^1$ bezeichne die Garbe der Keime der holomorphen 1-Formen auf X und $\mathcal{M}$ die Garbe der Keime der meromorphen Funktionen auf X. $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ sei die Garbe der Keime der Divisoren. Die Divisorengruppe $DivX := \mathcal{D}(X)$ ist kanonisch isomorph zu der von den Punkten $x \in X$ erzeugten freien abelschen Gruppe, jeder Divisor D ist also von der Form

$$D = \sum_{x \in X} n_x x, \quad n_x \in \mathbb{Z}, \ n_x = 0 \text{ für fast alle } x.$$

Der Dualitätssatz lautet dann:

Für jeden Divisor $D \in DivX$ gibt es eine natürliche $\mathbb{C}$-Isomorphie

$$H^0(X, \Omega(D)) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}(-D))^* .$$

Serre, GAGA-Sätze von, Ergebnisse zum Vergleich zwischen projektiven Schemata von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ und ihren assoziierten komplex analytischen Räumen.

Ist X ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, dann ist der assoziierte komplex analytische Raum X_h folgendermaßen definiert: Man überdeckt X mit offenen affinen Teilmengen $Y_i = Spec A_i$, wobei jedes A_i eine Algebra von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ ist, also geschrieben werden kann als

$$A_i \cong \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] / (f_1, ..., f_q) .$$

Dabei seien $f_1, ..., f_q$ Polynome in $x_1, ..., x_n$. Wir können sie als holomorphe Funktionen auf dem $\mathbb{C}^n$ betrachten, so daß ihre gemeinsame Nullstellenmenge ein komplex analytischer Unterraum $(Y_i)_h \subset \mathbb{C}^n$ ist. Das Schema X erhält man, indem man die offenen Mengen Y_i verklebt, man kann daher die gleichen Verklebungs-Daten verwenden, um die analytischen Räume $(Y_i)_h$ zu einem analytischen Raum X_h zu verkleben. Diesen nennt man den assoziierten komplex analytischen Raum von X.

Da die Konstruktion funktoriell ist, erhält man einen Funktor h von der Kategorie der Schemata von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ in die Kategorie der komplex analytischen Räume. Bei der Betrachtung dieses Funktors ergeben sich auf natürliche Weise folgende Fragen:

1. Sei ein komplex analytischer Raum $\mathfrak{X}$ gegeben, existiert dann ein Schema X so, daß $X_h \cong \mathfrak{X}$?
2. Wenn X und X' zwei Schemata mit $X_h = X'_h$ sind, ist dann $X \cong X'$?
3. Sind ein Schema X und eine kohärente analytische Garbe $\mathfrak{F}$ über X_h gegeben, existiert dann eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ über X, so daß $\mathcal{F}_h \cong \mathfrak{F}$?
4. Seien ein Schema X und zwei kohärente Garben $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ über X gegeben, so daß $\mathcal{E}_h \cong \mathcal{F}_h$ über X_h, gilt dann $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$?
5. Seien ein Schema X und eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ gegeben, sind dann die Abbildungen

$$\alpha_i : H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X_h, \mathcal{F}_h)$$

Isomorphismen?

In dieser Allgemeinheit ist die Antwort auf alle Fragen „nein“. Betrachtet man aber projektive Schemata, dann ist die Antwort auf alle Fragen „ja“. Diese Ergebnisse hat Serre in seinem paper GAGA bewiesen. Der bedeutendste Satz ist der folgende:

Sei X ein projektives Schema über $\mathbb{C}$. Dann induziert der Funktor h eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Kategorie der kohärenten Garben über X und der Kategorie der kohärenten analytischen Garben über X_h. Außerdem sind für jede kohärente Garbe $\mathcal{F}$ über X die natürlichen Abbildungen

$$\alpha_i : H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X_h, \mathcal{F}_h)$$

für alle i Isomorphismen.

[1] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. Springer-Verlag New York, 1977.

Serre, Jean-Pierre, französischer Mathematiker, geb. 15.9.1926 Bages (Frankreich).

Bereits als Schüler des Lyceums in Nimes beschäftigte sich Serre mit der Analysis und begann 1945 ein Studium an der Ecole Normale Superieur in Paris. Von 1948 bis 1954 arbeitete er in verschiedenen Anstellungsverhältnissen am Centre National de le Recherche Scientifique in Paris. 1951 promovierte er an der Pariser Sorbonne mit einer Arbeit über Homotopiegruppen. Nach zweijähriger Tätigkeit an der Universität Nancy lehrte er ab 1956 bis zu seiner Emeritierung 1994 am College de France in Paris als Professor für Algebra und Geometrie und leitete die entsprechende Abteilung. Danach wirkte er als Honorarprofessor. Neben seinem Wirken am College de France nahm er mehrere Gastaufenthalte an anderen Forschungsstätten war, insbesondere am Institute for Advanced Study in Princeton.

Serres Forschungen sind durch ein breite Themenspektrum gekennzeichnet, die sich nicht immer einem einzelnen mathematischen Teilgebiet zuordnen lassen. Er liefert grundlegende Beiträge zur Algebra, zur algebraischen Topologie und Geometrie, zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher sowie zur Zahlentheorie. Seine ersten Arbeiten waren dem Studium der Homotopiegruppen von Sphären gewidmet. Er verallgemeinerte den Begriff des Faserraumes und übertrug zahlreiche wichtige Sätze der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher auf die Garbentheorie. Als sehr wirkungsvolles Werkzeug für seine Untersuchungen erwies sich für Serre die Anwendung der Spektralfolgen, mit deren Hilfe er wichtige Beziehungen zwischen den Homologie- und den Homotopiegruppen eines Raumes aufdeckte. Basierend auf dem 1951 von Stein eingeführten Begriff der Mannigfaltigkeiten leitete Serre zusammen mit Cartan Aussagen zur Lösbarkeit der Cousinschen Problems in der Sprache der Kohomologietheorie ab. Beide waren dann Mitte der 50er Jahre neben Grothendieck, Remmert und anderen maßgeblich an der Herausarbeitung des Begriffs des analytischen Raumes beteiligt.

Serre hat mit zahlreichen Monographien für die Verbreitung und Zusammenfassung der Resultate aus seinen Forschungsgebieten gewirkt und damit deren Entwicklung weiter spürbar gefördert. Seine Leistungen wurden wiederholt von der Gemeinschaft der Mathematiker mit Auszeichnungen anerkannt, u. a. 1954 mit der Verleihung der ↗Fields-Medaille.

Serre, Theorem A von, *Cartan-Serre, Theorem A von*, eines der Haupttheoreme der Theorie der kohärenten analytischen Garben, das zusammen mit Theorem B neben den Cousin-Problemen und dem Poincarè-Problem Anwendung in der Theorie der Steinschen Algebren findet.

Für kompakte Quader lautet das Theorem A folgendermaßen:

Zu jeder kohärenten $\mathcal{O}$-Garbe $\mathcal{S}$ über einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{C}^m$ gibt es eine natürliche Zahl p und eine exakte $\mathcal{O}$-Sequenz

$$\mathcal{O}^p \mid Q \to S \to 0\,.$$

Eine andere Formulierung ist:

Es gibt p Schnitte im Schnittmodul $\mathcal{S}(Q)$, deren Keime in jedem Punkt $z \in Q$ den Halm $\mathcal{S}_z$ über $\mathcal{O}_z$ erzeugen.

Für diesen Fall impliziert Theorem A das *Theorem B* (↗Serre, Theorem B von).

Ein komplexer Raum ist Steinsch, wenn er eine Ausschöpfung durch Steinsche Kompakta besitzt. Spezielle Steinsche Ausschöpfungen sind die Quaderausschöpfungen; komplexe Räume, die Quaderausschöpfungen gestatten, nennt man holomorphvollständig. Beispielsweise besitzt jeder schwachholomorph-konvexe Raum, in dem alle kompakten analytischen Mengen endlich sind, Quaderausschöpfungen und ist somit Steinsch. Eine abgeschlossene Teilmenge P eines komplexen Raumes X heißt Steinsch (in X), wenn für P die Aussage von Theorem B richtig ist, z. B. sind kompakte Quader im $\mathbb{C}^m$ Steinsche Mengen. Für Steinsche Mengen lautet das Theorem A folgendermaßen:

Es sei P eine Steinsche Menge in X und $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe über P. Dann erzeugt der Schnittmodul $\mathcal{S}(P)$ jeden Halm $\mathcal{S}_x$, $x \in P$, d. h. das Bild von $\mathcal{S}(P)$ in $\mathcal{S}_x$ bzgl. der Einschränkung $\mathcal{S}(P) \to \mathcal{S}_x$, $s \mapsto s_x$, erzeugt den $\mathcal{O}_x$-Modul $\mathcal{S}_x$.

Schließlich erhält man das Fundamentaltheorem der Steintheorie:

Jeder holomorph-vollständige Raum $(X,\mathcal{O})$ ist Steinsch; für jede kohärente analytische Garbe $\mathcal{S}$ über X gilt also:

i) Der Schnittmodul $\mathcal{S}(X)$ erzeugt jeden Halm $\mathcal{S}_x$, $x \in X$, als $\mathcal{O}_x$-Modul.

ii) Für alle $q \geq 1$ gilt: $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$.

Serre, Theorem B von, *Cartan-Serre, Theorem B von*, eines der Haupttheoreme der Theorie der kohärenten analytischen Garben, das für holomorph-vollständige Räume insbesondere Theorem A (↗Serre, Theorem A von) impliziert. Für kompakte Quader lautet das Theorem B folgendermaßen:

Für jede kohärente $\mathcal{O}$-Garbe $\mathcal{S}$ über einem kompakten Quader $Q \subset \mathbb{C}^m$ gilt $H^q(Q, \mathcal{S}) = 0$ für alle $q \geq 1$.

Komplexe Räume X, für die alle Kohomologiegruppen $H^q(X, \mathcal{S})$, $q \geq 2$, mit Koeffizienten in kohärenten analytischen Garben $\mathcal{S}$ verschwinden, werden vermöge eines einfachen Ausschöpfungsprozesses von X durch Steinsche Kompakta gewonnen. Man kann zeigen, daß bei Existenz Steinscher Ausschöpfungen auch noch die Gruppen $H^1(X, \mathcal{S})$ verschwinden. Für solche Räume gilt automatisch auch Theorem A.

Ist P eine abgeschlossene Teilmenge eines komplexen Raumes X, dann nennt man P Steinsch (in X), wenn für P die Aussage von Theorem B richtig ist, wenn also für jede über P kohärente analytische Garbe $\mathcal{S}$ gilt: $H^q(P, \mathcal{S}) = 0$ für alle $q \geq 1$. Also sind z. B. kompakte Quader im $\mathbb{C}^m$ Steinsche Mengen.

Serre-Dualität, ↗Serre, Dualitätssatz von.

Serre-Konstruktion, algebraischer Begriff.

Ein abgeschlossenes Unterschema Z (resp. ein komplexer Unterraum) eines glatten ↗algebraischen k-Schemas X (resp. komplexen Mannigfaltigkeit X) heißt subkanonisch, wenn die Einbettung regulär ist (↗Schnitt-Theorie), d. h., ein lokal vollständiger Durchschnitt, und die dualisierende Garbe ω_Z aus dem Bild der Einschränkungsabbildung $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Z)$.

Ist beispielsweise s ein regulärer Schnitt (↗reguläre Folge) eines Vektorbündels $\mathcal{E}$ vom Rang r und $Z = Z(s)$ Nullstellenschema von s, so ist Z subkanonisch, das Normalenbündel ist $\mathcal{N}_{Z|X} \simeq \mathcal{E} \mid Z$, also ist

$$\omega_Z = \left(\omega_X \otimes \wedge^r \mathcal{E}\right) \mid Z\,.$$

Die Serre-Konstruktion gibt Bedingungen für ein Tripel $(Z, \mathcal{L}, \sigma)$, Z subkanonisch von der Kodimension 2, $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X, und $\sigma : \omega_X \otimes \mathcal{L} \mid Z \simeq \omega_Z$ ein Isomorphismus, dafür an, daß ein Vektorbündel $\mathcal{E}$ mit einem regulären Schnitt s existiert mit $Z(s) = Z$ und $\wedge^2\mathcal{E} \simeq \mathcal{L}$. Wenn ein solches Bündel existiert, erhält man eine exakte Folge

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{E} \xrightarrow{s\wedge} I_Z \otimes \mathcal{L} \to 0$$

mit $s\wedge : v \mapsto s \wedge v$, da $\wedge^2\mathcal{E} \simeq \mathcal{L}$, ($I_Z$ bezeichnet die Idealgarbe von Z), was einem Element

$$e \in \mathrm{Ext}^1(I_Z \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$$

entspricht.

Umgekehrt entspricht jedes e einer solchen exakten Folge, allerdings im allgemeinen mit einer kohärenten Garbe $\mathcal{E}$, und es sind Bedingungen an e zu richten, um ein Vektorbündel $\mathcal{E}$ zu erhalten. Dies ist eine lokale Frage, die also die kanonische Lokalisierungsabbildung

$$\mathrm{Ext}^1(I_Z \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\ell} H^0(X, \mathcal{E}xt^1(I_Z \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X))$$

betrifft.

Nun ist nach der allgemeinen Theorie für dualisierende Garben

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt^1(I_Z \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) &= \mathcal{H}om(\mathcal{L} \otimes \omega_X, \mathcal{E}xt^1(I_Z, \omega_X)) \\ \mathcal{E}xt^1(I_Z, \omega_X) &\simeq \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Z, \omega_X) \simeq \omega_Z\,. \end{aligned}$$

Daher ist ℓ eine Abbildung

$$\mathrm{Ext}^1(I_Z \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\ell} \mathrm{Hom}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X \mid Z, \omega_Z)\,,$$

und die Bedingung lautet: $\ell(e)$ ist ein Isomorphismus.

Es gibt eine kanonische Abbildung

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{E}xt^1(I_Z \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X)) & \simeq & \mathrm{Hom}(\omega_X \otimes \mathcal{L} \mid Z, \omega_Z), \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ H^2(X, \mathcal{H}om(I_Z \otimes \mathcal{L}, \mathcal{O}_X) & \simeq & H^2(X, \mathcal{L}^{-1}) \end{array}$$

(die sich entweder durch elementare Rechnung kozyklenweise beschreiben läß t, oder sich aus einer Spektralfolge ergibt) mit $\mathrm{Ker}(\delta) = Im(\ell)$. Die Bedingung für die Existenz von $(\mathcal{E}, s)$ ist also $\delta(\sigma) = 0$.

Für $\dim X = 2$ ergibt sich (durch Anwendung von Serre-Dualität) daraus die *Cayley-Bacharach-Bedingung* für $(Z, \mathcal{L})$ als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $(\mathcal{E}, s)$: Jeder Schnitt von $H^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X)$, der auf einem Unterschema $Z' \subset Z$ mit $\ell(Z') = \ell(Z) - 1$ verschwindet, verschwindet auch auf Z. Hierbei ist

$$\ell(Z) \;=\; h^0(\mathcal{O}_Z) \;=\; \sum_{x \in Z} \dim_k(\mathcal{O}_{Z,x})\,.$$

Serre-Kriterium für Normalität, charakterisiert Noethersche ↗normale Ringe durch die folgenden Eigenschaften:

- Die Lokalisierung nach jedem ↗Primideal der Höhe 1 ist ein ↗regulärer lokaler Ring.
- Jedes durch einen Nichtnullteiler erzeugte ↗Hauptideal hat keine eingebetteten Primideale, d. h., wenn $Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ eine irredundante Primärzerlegung des Hauptideales ist, dann sind für $i \neq j$ die Radikale der Q_i (die assoziierten Primideale) nicht ineinander enthalten.

Serresche Vermutung, lautet:

Jeder endlich erzeugte ↗projektive Modul über dem Polynomring in n Veränderlichen über einem Körper oder Hauptidealring ist ein ↗freier Modul.

Diese Vermutung wurde 1976 unabhängig von Quillen und Suslin gelöst. T.Y. Lam berichtet in [1] über die zwanzigjährige Geschichte dieser Vermutung. Die Arbeiten zur Serreschen Vermutung haben sehr zur Entwicklung der K-Theorie beigetragen.

[1] Lam, T.Y.: Serre's Conjecture. Springer Lect. Notes in Math. 635, Springer-Verlag Heidelberg/Berlin.

Serrescher Dualitätssatz, ↗Serre, Dualitätssatz von.

Serret, Joseph Alfred, französischer Mathematiker, geb. 30.8.1819 Paris, gest. 2..3.1885 Versailles.

Serret beendete das Studium an der Ecole Polytechnique in Paris 1840. Er arbeitete danach dort als Aufnahmeprüfer und wurde 1861 Professor für Himmelsmechanik am Collège de France. Zwei Jahre später wechselt er als Professor für Differential- und Integralrechnung an die Sorbonne. 1873 wurde er Mitglied das Büros für Längenkreise.

Serret leistete wichtige Arbeiten auf dem Gebiet der Differentialgeometrie. Zusammen mit Bonnet und Bertrand entwickelte er Formeln zur Beschreibung von Raumkurven. Er las in der Sorbonne über ↗Galois-Theorie und förderte so die Entwicklung der Gruppentheorie. Neben diesen mathematischen Arbeiten gab er die gesammelten Werke von ↗Lagrange und ↗Monge heraus.

Sesquilinearform, *Semibilinearform*, Abbildung $\varphi : V \times W \to \mathbb{C}$ (V, W ↗Vektorräume über $\mathbb{C}$), die linear in der ersten Komponente und ↗semilinear in der zweiten Komponente ist (d. h. die partiellen Abbildungen $\mathfrak{v} \mapsto \varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ sind für alle $\mathfrak{w} \in W$ linear, und die partiellen Abbildungen $\mathfrak{w} \mapsto \varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ sind für alle $\mathfrak{v} \in V$ semilinear).

Ist $B_1 = (\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ eine ↗Basis von V und $B_2 = (\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_m)$ eine Basis von W, so heißt die $(n \times m)$-Matrix

$$A := (\varphi(\mathfrak{v}_i, \mathfrak{w}_j))$$

Matrixdarstellung von φ bzgl. B_1 und B_2. Sind a bzw. b die Koordinatenvektoren eines Vektors $\mathfrak{v} \in V$ bzgl. B_1 bzw. eines Vektors $\mathfrak{w} \in W$ bzgl. B_2, so ist das Bild $\varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ gegeben durch

$$a^t A \overline{b}.$$

Eine Sesquilinearform $\varphi : V \times W \to \mathbb{C}$ heißt nicht ausgeartet, falls gilt:

$$\text{aus } \varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{v} \in V \text{ folgt } \mathfrak{w} = 0;$$
$$\text{aus } \varphi(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{w} \in W \text{ folgt } \mathfrak{v} = 0.$$

Sind V und W beide n-dimensional, so ist die Sesquilinearform $\varphi : V \times W \to \mathbb{C}$ genau dann nicht ausgeartet, falls sie bzgl. beliebiger Basen in V und W durch eine ↗reguläre Matrix dargestellt wird.

Allgemeiner spricht man von einer λ-Sesquilinearform $\varphi : V \times W \to \mathbb{K}$, wenn auf $\mathbb{K}$ ein Körper-Automorphismus λ gegeben ist und falls φ linear in der ersten Komponente und λ-semilinear in der zweiten Komponente ist.

Severi, Francesco, italienischer Mathematiker, geb. 13.4.1879 Arezzo, gest. 8.12.1961 Rom.

Nach dem Studium in Turin und der Promotion bei Segre wurde Severi 1900 Assistent, zunächst in Turin, dann in Bologna und in Pisa. 1904 bekam er eine Professur für projektive und darstellende Geometrie in Padua, daneben wirkte er als Direktor der Ingenieurschule in Padua. 1922 wurde er auf den Lehrstuhl für algebraische Analysis, später umbenannt in Lehrstuhl für höhere Geometrie, berufen. 1939 gründete er das Instituto di Alta Matematica.

Severis Hauptinteresse galt der algebraischen Geometrie. Angeregt durch Arbeiten von Segre wandte er sich der Untersuchung der Invarianz von Flächen unter birationalen Transformationen zu. Bei seinen Forschungen kam es ihm besonders auf die Strenge und Klarheit der Beweisführung an. Er führte in die algebraische Geometrie viele neue Begriffe ein, wie z. B. den der algebraischen Äquivalenz von Kurven.

Neben diesen mathematische Arbeiten befaßte sich Severi auch sehr intensiv mit anderen Dingen. So war er Präsident der Arezzo-Bank, leitete die Ingenieurschule von Padua und betrieb Landwirtschaft.

Sexagesimalsystem, das Sechzigersystem.

Ein Zahlensystem, das im Gegensatz zum Dezimalsystem nicht mit zehn, sondern mit sechzig Ziffern rechnet, heißt ein Sexagesimalsystem.

In der babylonischen Mathematik wurde etwa 3000 vor Christus mit einem Sexagesimalsystem gerechnet. Reste davon findet man noch heute in der Zeitmessung und in der Winkelmessung.

'sGravesande, Willem Jacob, eigentlich *Storm van Gravesande*, niederländischer Jurist und Mathematiker, geb. 27.9.1688 's-Hertogenbosch, gest. 28.2.1742 Leiden.

'sGravesande studierte Jura in Leiden und war zunächst Anwalt in Den Haag, später Sekretär an der Holländischen Botschaft. 1715 wurde er Mitglied der Royal Society in London und lernte Newton, Desaguliers und Keill kennen. 1717 wurde er Professor für Mathematik und Astronomie an der Universität Leiden, später auch Professor für Philosophie.

'sGravesande war ein einflußreicher Verfechter der Newtonschen Theorie in Europa. Er schrieb gute Lehrbücher zur Mathematik und Physik und war auch bei der Herausgabe von Büchern anderer Autoren, wie z. B. Huygens oder Newton, beteiligt.

Er entwickelte eine systematische Theorie der Perspektive.

SH, ↗ Souslinsche Hypothese.

Shanks, William, britischer Lehrer und Mathematiker, geb. 25.1.1812 Corsenside (Northumberland, England), gest. 1882 bei Durham (England).

Shanks studierte in Edinburgh und war danach während seines ganzen Berufslebens (1838 bis 1874) als Lehrer tätig.

Sein mathematisches Hauptinteresse galt der numerischen Berechnung von π. Nachdem sich die u. a. von Leibniz und Gregory benutzten Arcustangens-Reihen als recht langsam konvergent erwiesen hatten, wählte Shanks einen neuen Ansatz unter Verwendung des Additionstheorems des Arcustangens. Hiermit konnte er, gemeinsam mit seinem Erzieher William Rutherford, nach und nach mehr als 700 Dezimalstellen von π berechnen.

Shannon, Claude Elwood, amerikanischer Ingeneur und Mathematiker, geb. 30.4.1916 Gaylord (Michigan).

Shannon studierte in Michigan und ging 1936 an das MIT. 1941 wechselte er als Elektroingenieur zu den Bell Laboratories, 1956 kehrte er als Professor an das MIT zurück.

Shannon begründete 1948/49 mit dem Artikel „A Mathematical Theory of Communication“ die moderne Informationstheorie, die sich mit einer quantitativen Beschreibung des Begriffs der Information befaßt. Er führte die Maßeinheit „Bit“ und den Entropiebegriff ein. Er entwickelte Modelle zur Bescheibung von Kommunikationssystemen und fand Methoden zur Analyse von Fehlern in einem Signal. Seine Arbeiten stellten die Grundlage für die heutige Rechnerarchitektur und Schaltkreisentwicklung dar.

Shannon, Entwicklungssatz von, lautet:

Es sei $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *eine ↗Boolesche Funktion. Dann gilt für alle* $1 \leq i \leq n$ *und* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$

$$f(\alpha) = (\overline{\alpha_i} \wedge f_{\overline{x_i}}(\alpha)) \vee (\alpha_i \wedge f_{x_i}(\alpha))$$

bzw.

$$f(\alpha) = (\alpha_i \vee f_{\overline{x_i}}(\alpha)) \wedge (\overline{\alpha_i} \vee f_{x_i}(\alpha)).$$

Hierbei bezeichnet $f_{\overline{x_i}}$ *den negativen ↗Kofaktor von* f *nach* x_i*, und* f_{x_i} *den positiven Kofaktor von* f *nach* x_i.

Shannon-Effekt, Eigenschaft, die eine Menge $\mathfrak{M}_n$ von ↗Booleschen Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ bzgl. eines auf den Booleschen Funktionen definierten Komplexitätsmäßes C (↗Boolesche Funktionen) haben kann.

Die Eigenschaft liegt vor, wenn fast alle Booleschen Funktionen $f \in \mathfrak{M}_n$ eine Komplexität $C(f)$ haben, die größer gleich

$$C(\mathfrak{M}_n) - o\,(C(\mathfrak{M}_n))$$

ist. Hierbei ist $C(\mathfrak{M}_n) = \max\{C(f) \mid f \in \mathfrak{M}_n\}$, gibt also die Komplexität der härtesten Booleschen Funktion aus $\mathfrak{M}_n$ an. Formal gilt der Shannon-Effekt genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|\,\{f \in \mathfrak{M}_n \mid\ C(f) \geq C(\mathfrak{M}_n) - o(C(\mathfrak{M}_n))\}\,|}{|\,\mathfrak{M}_n\,|}$$

gleich 1 ist.

Shannonsches Abtasttheorem, *Sampling-Theorem*, gibt Auskunft darüber, unter welcher Bedingung eine Funktion f vollständig aus einer Anzahl diskreter Werte, den sogenannten Abtastwerten, rekonstruiert werden kann, und wie diese Rekonstruktion zu berechnen ist.

Ist f bandbeschränkt, d. h., verschwindet die Fouriertransformierte $\hat{f}$ von f außerhalb eines beschränkten Intervalls, so läßt sich f vollständig rekonstruieren. Genauer besagt das Theorem von Shannon:

Für Funktionen f *mit* $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$ *gilt*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T} - k\pi\right).$$

Die Funktion wird also durch die Abtastwerte $f(kT)$ bestimmt. Man nennt $\frac{\pi}{T}$ die Nyquist-Frequenz zum Abtastintervall T. Der Wert

$$\frac{1}{T} = \frac{\operatorname{supp}\hat{f}}{2\pi}$$

ist die Anzahl der Abfragen pro Zeiteinheit und wird als Abtastrate bzw. Nyquist-Rate bezeichnet.

Obige Reihenentwicklung für f war in der Fourieranalysis schon vor Shannon unter dem Namen *cardinal series* bekannt. Das Sampling-Theorem wurde in den 30er Jahren bereits von Whittaker bewiesen und später (1949) von Shannon für Anwendungen in der Nachrichtentechnik wiederentdeckt.

[1] Shannon, C.E.: Communications in the presence of noise. Proc. of the IRE 37, 1949.

[2] Whittaker, J.: Interpolatory function theory. Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, 1935.

Shannon-Zerlegung, Zerlegung einer ↗Booleschen Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ gemäß dem Entwicklungssatz von Shannon (↗Shannon, Entwicklungssatz von).

Shapley-Vektor, eine Funktion Φ, die durch ein Axiomensystem zur Definition der erwarteten Auszahlung in einem kooperativen Spiel festgelegt ist.

Genauer ist der Shapley-Vektor oder auch Shapley-Wert eine Vektorfunktion

$$\Phi(v) = (\Phi_1(v), \ldots, \Phi_n(v)),$$

die auf der Menge der charakteristischen Funktionen von n-Personen-Spielen definiert ist. Dabei muß Φ drei Axiome erfüllen:

1) Ist K eine Koalition derart, daß $v(S) = v(S \cap K)$ für jede andere Koalition S zutrifft, so ist $\sum_{i \in K} \Phi(v) = v(K)$.
2) Ist π ein Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ so, daß $v(\pi S) = v(S)$ für jede Koalition S gilt, dann ist $\Phi_{\pi i}(v) = \Phi_i(v)$.
3) Alle Komponenten Φ_i von Φ sind additiv linear.

Es kann dann gezeigt werden, daß es nur eine Vektorfunktion Φ gibt, die alle obigen Axiome erfüllt, nämlich dasjenige Φ, dessen Komponenten

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S} \frac{(|S|-1)! \cdot (n-|S|)!}{n!} \cdot (v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

sind.

Sharp-Reihe für π, die Darstellung

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^n \sqrt{3}},$$

die aus $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und der Reihenentwicklung der Arcustangensfunktion folgt. Damit haben 1699 Abraham Sharp 72 und 1719 Thomas Fantet de Lagny 127 Dezimalstellen von π berechnet (letzteres mit einem Fehler in der 113. Stelle).

Shepard-Funktion, löst das Problem der ↗scattered data-Interpolation für stetige reelle Funktionen im $\mathbb{R}^n$.

Seien N verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ und N Werte $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Shepard-Funktion f ist definiert durch

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} y_i \omega_i(x), \ \omega_i(x) = \sigma_i(x) \Big/ \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(x),$$
$$\sigma_i(x) = \|x - x_j\|^{\mu_i}, \ \mu_i < 0.$$

Offenbar ist $f(x_i) = y_i$. Die Methode ist in den Anwendungen weit verbreitet. Ihre Schwächen können durch Verfeinerungen und Modifikationen der hier gezeigten einfachsten Form zum Teil ausgeglichen werden.

shift-invariant, ↗translationsinvariant.

Shiftoperator, *Verschiebungsoperator*, ein Operator der Form

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (0, a_1, a_2, \ldots)$$

(Rechts-Shift) bzw.

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

(Links-Shift) auf diversen Folgenräumen, z. B. ℓ^p. Auf $\ell^p(\mathbb{Z})$ betrachtet man auch die sog. zweiseitigen Shifts

$$(a_n)_n \mapsto (a_{n-1})_n \quad \text{bzw.} \quad (a_n)_n \mapsto (a_{n+1})_n.$$

Gewichtete Shift-Operatoren haben die Form

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (0, \beta_1 a_1, \beta_2 a_2, \ldots),$$

andere Begriffsbildungen in diesem Kontext sind selbsterklärend.

Shift-Schritt, elementarer Arbeitsschritt bei der ↗Bottom-Up-Analyse, bei dem ein Zeichen aus dem Eingabetext in den Analysekeller übernommen wird, um dort die rechte Seite einer Grammatikregel aufzubauen.

Die Möglichkeit der Anwendung eines Shift-Schrittes wird durch den aktuellen Analsyezustand (ein ↗Item bezüglich LR(k)) signalisiert. Sind laut Analysezustand mehrere Aktionen anwendbar, fällt die Entscheidung auf Grundlage von Vorausschaumengen (↗LR(k)-Grammatik).

Shimura-Taniyama-Vermutung, lautet:

Jede elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$ ist modular.

Diese Vermutung verbindet die Theorie der elliptischen Kurven mit der Theorie der Modulformen, insbesondere der Spitzenformen vom Gewicht 2. Der Ursprung dieser Vermutung ist wie folgt: Im Jahr 1955 stellte Taniyama auf einer Konferenz über Zahlentheorie in Japan eine Reihe von Problemen vor, von denen zwei die Frage nach der Modularität elliptischer Kurven betrafen. Shimura formulierte eine präzisere Vermutung 1964 bei mehreren Vorträgen. 1967 publizierte Weil eine Arbeit, die einen wichtigen Beitrag zur Untersuchung der Modularität elliptischer Kurven enthält; daher heißt die Vermutung bei manchen Autoren Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung, obwohl sich in Weils Arbeit keine Formulierung dieser Vermutung findet.

Basierend auf Arbeiten von Frey konnte Ribet 1990 zeigen, daß die Shimura-Taniyama-Vermutung die ↗Fermatsche Vermutung impliziert. Wiles bewies 1995 einen Teil der Shimura-Taniyama-Vermutung, nämlich daß jede semistabile elliptische Kurve modular ist – und hatte damit bereits einen Beweis der Fermatschen Vermutung. 1999 kündigten Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond und Richard Taylor einen Beweis der vollen Shimura-Taniyama-Vermutung an.

Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung, ↗Shimura-Taniyama-Vermutung.

Shimura-Varietäten, algebraische Varietäten, die über gewissen algebraischen Zahlkörpern definiert sind und vom analytischen Gesichtspunkt aus Komponenten der Form $X^{an} = \Gamma \setminus D$ bestehen.

Hierbei ist D ein beschränktes symmetrisches Gebiet in $\mathbb{C}^n$ (d. h., zu jedem $p \in D$ gibt es eine holomorphe Involution $s : D \to D$ mit p als isoliertem Fixpunkt. Solche Gebiete sind von der Form $G(\mathbb{R})^0/K_\infty$, wobei G eine reduktive algebraische Gruppe, definiert über $\mathbb{Q}$, ist, $G(\mathbb{R})^0$ die Zusammenhangskomponente der 1 und K_∞ eine

maximale kompakte Untergruppe bezeichnet, und $G(\mathbb{R})^0$ durch holomorphe Diffeomorphismen auf D wirkt). Γ ist eine arithmetische Untergruppe von $G(\mathbb{Q})$. Nach Baily und Borel hat $\Gamma\backslash D$ eine natürliche Struktur als quasiprojektive algebraische Varietät.

Eine Shimura-Varietät ist durch folgende Daten gegeben:

1. Eine reduktive zusammenhängende algebraische Gruppe G, die über $\mathbb{Q}$ definiert ist.
2. Einen über $\mathbb{R}$ definierten Homomorphismus algebraischer Gruppen $h : S \to G_{\mathbb{R}}$, wobei S die Gruppe aller $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in GL_2$ ist.
3. Eine kompakte offene Untergruppe $K \subset G(\mathbb{A}_f)$.

Hierbei ist $\mathbb{A}_f$ die (lokal kompakte) $\mathbb{Q}$-Algebra der endlichen Adélé von $\mathbb{Q}$, d. h.,

$$\mathbb{A}_f = \left(\prod_{p \text{ Primzahl}} \mathbb{Z}_p \right) \otimes \mathbb{Q} .$$

($\mathbb{Z}_p$ die ganzen p-adischen Zahlen).

Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(i) Die Einschränkung von h auf $\mathbb{G}_m \subset S$ (die Diagonalmatrizen) ist zentral in $G_{\mathbb{R}}$.

(ii) Die auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ von $G_{\mathbb{R}}$ induzierte ↗Hodge-Struktur (durch $Ad \circ h$, $Ad : G_{\mathbb{R}} \to Gl(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ die adjungierte Darstellung) ist vom Typ $(-1, 1),\ (0, 0)\ (1, -1)$.

(iii) Die Konjugation mit $h(i)$ induziert eine Cartan-Involution auf der adjungierten Gruppe $(G/C)_{\mathbb{R}}$ (C = Zentrum von G).

(Eine Cartan-Involution einer über $\mathbb{R}$ definierten linearen algebraischen Gruppe ist ein Automorphismus $\sigma : G \to G$, definiert über $\mathbb{R}$, mit $\sigma^2 = id$, so daß die Gruppe der Fixpunkte von $g \in G(\mathbb{C}) \mapsto \sigma(\overline{g}) \in G(\mathbb{C})$ kompakt ist.)

$G(\mathbb{R})$ wirkt durch Konjugation auf h, und ist K_∞ die Isotropiegruppe von h, so ist die Konjugationsklasse X von h der homogene Raum $G(\mathbb{R})/K_\infty$. Die Bedingung (i) zieht nach sich, daß X eine natürliche komplexe Struktur besitzt. (Durch die Hodge-Filtration, die durch die Konjugierten von h auf einer treuen rationalen Darstellung V von G über $\mathbb{R}$ induziert wird, erhält man eine Einbettung von X in eine Fahnenmannigfaltigkeit $\mathbb{F}(V \otimes \mathbb{C})$, siehe ↗Hodge-Struktur).

Bedingung (ii) hängt mit Varietäten von Hodge-Strukturen zusammen und garantiert, daß für jede rationale Darstellung V die induzierten Hodge-Strukturen eine Variation von Hodge-Strukturen bilden.

Bedingung (iii) zieht nach sich, daß die Komponenten von X symmetrische Räume von nichtkompaktem Typ sind, also nach deren Klassifikation beschränkte symmetrische Gebiete in $\mathbb{C}^n$.

Die zugehörige Shimura-Varietät ist $S_K(G, h)$ mit

$$S_K(G, h)^{an} = G(\mathbb{Q}) \setminus (X \times G(\mathbb{A}_f)/K) ,$$

sie besteht aus endlich vielen Komponenten der Form $\Gamma \setminus D$ ($\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ Untergruppe).

Ein Beispiel: Es sei $G = GL(2)$ und h die Einbettung $K = GL(2)(\hat{\mathbb{Z}}) \subset GL(2)(\mathbb{A}_f)$ mit

$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{p \text{ Primzahl}} \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{A}_f .$$

Dann ist $X = \mathfrak{H} \amalg \mathfrak{H}^-$ (die obere und untere Halbebene in $\mathbb{C}$) und

$$\begin{aligned} S_k(G, h) &\cong Sl_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathfrak{H} \amalg Sl_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathfrak{H}^- \\ &= \mathbb{A}^1 \amalg \mathbb{A}^1 . \end{aligned}$$

Wie in diesem Beispiel gibt es in vielen Fällen einen Zusammenhang mit ↗Modulproblemen, sodaß die Varietäten als Modulräume auftreten; in diesen Fällen ist die Frage nach dem Definitionskörper geklärt. Im allgemeinen wird vermutet, daß ein Modell von $S_K(G, h)$ über einem bestimmten algebraischen Zahlkörper $E = E(G, h)$ existiert (d. h., daß $S_K(G, h)$ durch ein Schema über diesen Körper definiert ist). Hierbei ist $E(G, h)$ der Definitionskörper für die Konjugationsklasse der einparametrigen Untergruppe $\lambda_h : \mathbb{G}_{m_{\mathbb{C}}} \to G_{\mathbb{C}}$, die durch h und die Einbettung $\mathbb{G}_{m_{\mathbb{C}}} \to G_{\mathbb{C}}$,

$$z \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + z & -(i - iz) \\ i - iz & 1 + z \end{pmatrix} ,$$

gegeben ist. In einer abgeschwächten Form gilt dies (Deligne), und das Schema besitzt „viele“ spezielle Punkte über E.

Weiterhin gibt es allgemeine Vermutungen über die Zetafunktion dieser Varietäten und ihren Zusammenhang mit L-Funktionen von automorphen Formen auf G, die in Fällen, wo sich Shimura-Varietäten als Modulräume interpretieren lassen, bekannt sind.

shock capturing, Approximation unstetiger Lösungen bei hyperbolischen ↗partiellen Differentialgleichungen.

Im nichtlinearen Fall können unstetige Lösungen (sogenannte Schocks) selbst bei stetigen Anfangswerten auftreten. Diskretisierungsverfahren für solche Gleichungen müssen daher in der Lage sein, auch unstetige Lösungen möglichst gut zu approximieren.

Shor, Peter, amerikanischer Mathematiker, geb. 14.8.1959 .

Nach dem Studium am California Institute of Technology promovierte Shore 1985 am MIT. Danach ging er für ein Jahr an das Mathematical Sciences Research Center in Berkeley. Seit 1986 arbeitet er in den AT&T Laboratories in Florham Park (New Jersey).

Shors Forschungsinteressen umfassen Quantencomputing, algorithmische Geometrie und Kombinatorik. 1998 erhielt er den ↗Nevanlinna-Preis auf

dem Gebiet der Kombinatorik und des Quantencomputing. 1994 entwickelte er ein auf sogenannten „Quantencomputern“ arbeitendes Verfahren zur Faktorisierung großer Zahlen, das bisher verwendete Verschlüsselungen knacken konnte. Bei den Quantencomputern handelt es sich um Computer, die die Quantenzustände von Elementarteilchen ausnutzen. Derartige Computer gibt es bisher nur im Labor. Neben dem Verfahren zum Entschlüsseln gab er aber auch eine neue sichere, die Quantenzustände ausnutzende Verschlüsselungsmethode an.

shortest-path-Problem, ↗ kürzeste-Wege-Problem.

Shuffle-Operator, eine ↗Sprachoperation, die das Durchmischen der Wörter zweier ↗Sprachen $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ und $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ modelliert.

Für zwei Wörter $w_1 \in L_1$ und $w_2 \in L_2$ ist der Shuffle $w_1 \parallel w_2$ als

$$w_1 \parallel w_2 = \{u_1v_1u_2v_2\dots u_nv_n \mid u_i \in X^*,\ v_i \in Y^*,\ 1 \le i \le n,\ u_1u_2\dots u_n = w_1,\ v_1v_2\dots v_n = w_2\}$$

definiert. Beispielsweise ist

$$ab \parallel cd = \{abcd, acbd, acdb, cabd, cadb, cdab\}.$$

Für Sprachen gilt dann

$$L_1 \parallel L_2 = \bigcup_{w_1 \in L_1, w_2 \in L_2} w_1 \parallel w_2.$$

Der Shuffle zweier Sprachen entsteht als Menge der möglichen Ereignisfolgen eines Systems, wenn die beiden Argumentsprachen die möglichen Ereignisfolgen zweier unabhängig voneinander arbeitender Teilsysteme beschreiben.

Shukowski, Nikolai Jegorowitsch, ↗Joukowski, Nikolai Jegorowitsch.

sicheres Ereignis, ↗ Ereignis.

sichtbar, ein durch den menschlichen Sehvorgang motivierter Begriff bei ↗Parallel- und ↗Zentralprojektion.

Wird eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ einer solchen Abbildung – festgelegt durch eine Projektionsrichtung $\vec{v}$ oder ein Projektionszentrum Z – unterworfen, so ist ein Punkt X sichtbar, wenn der Strahl $X - \lambda\,\vec{v}$ ($\lambda > 0$) oder die Strecke $\overline{XZ}$ keinen Punkt außer X mit M gemeinsam hat.

Sieb des Eratosthenes, ↗Eratosthenes, Sieb des.

Siebformel, Formel (1) im folgenden Satz:

Sei S eine endliche Menge, $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq S$, und m_p die Anzahl der Elemente von S, die in genau p der Mengen A_i liegen, $0 \le p \le m$.

Dann gilt (mit $\bigcap_{i\in B} A_i = B$ für $B = \emptyset$)

$$m_p = \sum_{k=p}^{m} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} \sum_{\substack{A\subseteq\mathbb{N}_m \\ |A|=k}} |\bigcap_{i\in A} A_i|. \tag{1}$$

Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, die Mächtigkeit m_p durch beliebige Bewertungen auf der Booleschen Algebra $\mathcal{B}(S)$ von S zu ersetzen. Dies ist tatsächlich der Fall, wie der folgende Satz zeigt. Die in ihm enthaltenen Formeln sind als allgemeine Siebformel bekannt:

Sei S eine endliche Menge, $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq S$, und w eine Bewertung auf $\mathcal{B}(S)$ mit $w(\emptyset) = 0$. Wir setzen $M_p := \{b \in S : b$ gehört zu genau p der Mengen $A_i\}$, $m_p := w(M_p)$, $0 \le p \le m$. Dann gilt:

$$a)\ w(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} w(A_i) - \sum_{i<j} w(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^m w(\bigcap_{i=1}^{m} A_i),\ \textit{und}$$

$$b)\ m_p = \sum_{k=p}^{m} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} \sum_{\substack{A\subseteq\mathbb{N}_m \\ |A|=k}} w(\bigcap_{i\in A} A_i).$$

Siebzehneck, reguläres, ist konstruierbar mit Zirkel und Lineal, vgl. ↗Konstruktion des regulären n-Ecks.

Siegel, Carl Ludwig, deutscher Mathematiker, geb. 31.12.1896 Berlin, gest. 4.4.1981 Göttingen.

Ab 1915 studierte Siegel erst in Berlin, dann in Göttingen. Hier promovierte er 1920 und habilitierte sich ein Jahr später. Ab 1922 war er Professor an der Universität Frankfurt am Main und wechselte 1938 nach Göttingen. Zwischen 1940 und 1951 arbeitete er am Institute for Advanced Study in Princeton und kehrte danach nach Göttingen zurück.

Siegel lieferte wichtige Beiträge auf dem Gebiet der Zahlentheorie, der Funktionentheorie mehrerer komplexer Variabler und der Himmelsmechanik. In der Zahlentheorie befaßte er sich mit

diophantischen Approximationen, d. h. mit Approximationen algebraischer Zahlen durch rationale. Das führte ihn zu Irrationalitätsbeweisen, verschiedenen Maßen für Transzendenz und Irrationalität und zu einem Verfahren zum Beweis der Endlichkeit der Lösungen diophantischer Gleichungen. Er gab 1935 eine Klassenzahlformel für quadratische Zahlkörper an und löste 1944 das Waringsche Problem für algebraische Zahlkörper. Auf dem Gebiet der komplexen Analysis studierte Siegel die Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion und quadratische Formen. Mitte der 1930er Jahre begründete er die analytische Theorie dieser Formen. Er untersuchte Modulfunktionen und automorphe Funktionen mehrerer komplexer Variabler.

Siegel-Scheibe, ein einfach zusammenhängendes periodisches ↗stabiles Gebiet $V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ einer rationalen Funktion f mit der Eigenschaft, daß V durch eine Iterierte f^p von f konform auf sich abgebildet wird. Weiter enthält V einen irrational indifferenten Fixpunkt von f^p.

Für weitere Informationen siehe ↗Iteration rationaler Funktionen.

Siegelsches Lemma, eine Aussage über lineare Gleichungssysteme mit ganzalgebraischen Koeffizienten:

Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad d über $\mathbb{Q}$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ mit folgender Eigenschaft: Sind $M, N \in \mathbb{N}$ mit $N > dM$, A_{mn} aus dem Ganzheitsheitsring von K (für $m = 1, \ldots, M$ und $n = 1, \ldots, N$), und ist A eine obere Schranke für die Absolutbeträge der A_{mn} und deren Konjugierten bzgl. $\mathbb{Q}$, dann gibt es $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$ mit

$$\sum_{n=1}^{N} A_{mn} x_n = 0 \quad \text{für } m = 1, \ldots, M$$

und $|x_n| \leq 1 + (cNA)^{dM/(N-dM)}$ für alle n.

Das Siegelsche Lemma spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der transzendenten Zahlen, z. B. im Beweis des Satzes von Gelfand-Schneider (↗Gelfand-Schneider, Satz von).

Sierpinski, Waclaw Franciszek, polnischer Lehrer und Mathematiker, geb. 14.3.1882 Warschau, gest. 21.10.1969 Warschau.

Sierpinski arbeitete zunächst als Lehrer, wurde jedoch 1905 wegen Beteiligung an einem Streik aus dem Schuldienst entlassen und ging nach Krakau, wo er 1906 promovierte. Danach kehrte er nach Warschau zurück, wo er als Gymnasial-Lehrer arbeitete und gleichzeitig Vorlesungen hielt. Nach der Habilitation 1908 in Lemberg (Lwow) wurde seine wissenschaftliche Laufbahn durch Krieg und Internierung unterbrochen. 1919 wurde er auf eine ordentliche Professur der Universität Warschau berufen und setzte seine wissenschaftliche Arbeit und Lehrtätigkeit fort. Dies tat er dann auch – illegal – während des Zweiten Weltkriegs.

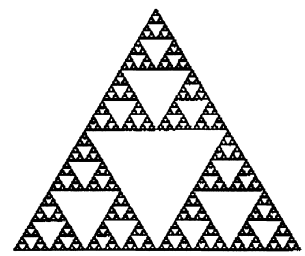
Sierpinskis Hauptinteresse galt zunächst der Mengentheorie, wo er über das Auswahlaxiom und die Kontinuumshypothese arbeitete. Später wandte er sich dann mehr der Theorie der Kardinalzahlen und Ordinalzahlen zu und befaßte sich mit topologischen Fragstellungen.

Sierpinski-Dreieck, klassisches Beispiel eines ↗Fraktals.

Sei E_0 ein ausgefülltes gleichseitiges Dreieck. Für $k \in \mathbb{N}$ sei E_k diejenige Menge, die durch Entfernen des auf den Kopf gestellten (offenen) gleichseitigen Dreiecks mit halber Höhe von allen 3^{k-1} gleichseitigen Dreiecken der Menge E_{k-1} entsteht. Die Schnittmenge $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ heißt Sierpinski-Dreieck.

Das Sierpinski-Dreieck ist eine streng selbstähnliche Menge, deren ↗Hausdorff- und ↗Kapazitätsdimension gleich sind:

$$\dim_H S = \dim_{Kap} S = \frac{\log 3}{\log 2} .$$



Sierpinski-Dreieck

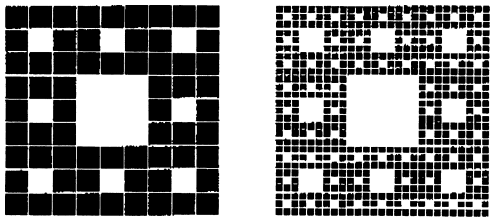
Sierpinski-Teppich, Beispiel eines ↗Fraktals. Sei E_0 ein gefülltes Quadrat. Für $k \in \mathbb{N}$ sei E_k diejenige Menge, die entsteht, wenn man von allen 8^{k-1} Quadraten der Menge E_{k-1}, die in neun gleich große

Quadrate aufgeteilt werden, jeweils das offene mittlere Quadrat entfernt. Die Schnittmenge $\bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ heißt dann Sierpinski-Teppich.

Der Sierpinski-Teppich S ist eine streng selbstähnliche Menge, deren ↗Hausdorff- und ↗Kapazitätsdimension gleich sind:

$$\dim_H S = \dim_{Kap} S = \frac{\log 8}{\log 3} .$$

Durch die analoge Konstruktion im Dreidimensionalen erhält man den ↗Menger-Schwamm.



Zwei Schritte der Konstruktion eines Sierpinski-Teppichs

σ-additive Mengenfunktion, eine spezielle ↗Mengenfunktion.

σ-Additivität, ↗Mengenfunktion.

σ-Algebra, *σ-Mengenalgebra*, Bezeichnung für ein speziell strukturiertes Mengensystem, ein zentraler Begriff in der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Es sei Ω eine Menge, $\mathcal{P}(\Omega)$ die zugehörige Potenzmenge, und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine Menge von Untermengen von Ω. Dann heißt $\mathcal{A}$ σ-Algebra in Ω, falls gilt:
(a) Mit $(A_i | i \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{A}$ ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.
(b) Mit $(A_1, A_2) \subseteq \mathcal{A}$, wobei $A_1 \supseteq A_2$, ist $A_1 \backslash A_2 \in \mathcal{A}$.
(c) $\Omega \in \mathcal{A}$.
Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen die meßbaren Untermengen in Ω und das Tupel $(\Omega, \mathcal{A})$ Meßraum. Eine σ-Algebra ist auch ein σ-Ring, wie auch eine Mengenalgebra. Eine σ-Algebra ist genau die Mengensystemstruktur, auf der ein ↗Maß am besten operiert.

Der Schnitt beliebig vieler σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra. Ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, so ist $\sigma(\mathcal{E})$ der Schnitt aller σ-Algebren auf Ω, die $\mathcal{E}$ enthalten, und somit wieder eine σ-Algebra; genauer ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, die $\mathcal{E}$ enthält.

$\sigma(\mathcal{E})$ wird die von $\mathcal{E}$ auf Ω erzeugte σ-Algebra genannt, und $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\sigma(\mathcal{E})$.

Existiert eine abzählbare Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$, so heißt $\mathcal{A}$ abzählbar erzeugt. Ist Ω eine Menge, $((\Omega_i, \mathcal{A}_i) | i \in I)$ eine Familie von Meßräumen, und $(f_i : \Omega \to \Omega_i | i \in I)$ eine Familie von Abbildungen, dann heißt

$$\mathcal{A} := \sigma\Big(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\Big)$$

die von der Familie $(f_i | i \in I)$ in Ω erzeugte σ-Algebra. $\mathcal{A}$ ist die kleinste σ-Algebra auf Ω, für die alle f_i $(\mathcal{A} - \mathcal{A}_i)$-meßbar sind.

Gilt anstelle von (c) lediglich
(c') Zu paarweise disjunkter Menge $\{A_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq A$,
so wird $\mathcal{A}$ σ-Mengenring oder σ-Ring genannt.

σ-Algebra der terminalen Ereignisse, ↗terminales Ereignis.

σ-Algebra der *T*-Vergangenheit, auch σ-Algebra der Ereignisse bis zum Zeitpunkt T bzw. vor T genannt, für eine Stoppzeit T bezüglich der Filtration $(\mathfrak{A}_t)_{t\in I}$, $I = \mathbb{N}_0$ oder $I = \mathbb{R}_0^+$, in der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ eines meßbaren Raumes $(\Omega, \mathfrak{A})$ die σ-Algebra

$$\mathfrak{A}_T = \bigcap_{t\in I} \{A \in \mathfrak{A}_\infty : A \cap \{T \le t\} \in \mathfrak{A}_t\},$$

wobei $\mathfrak{A}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\in I} \mathfrak{A}_t\right)$ die von $(\mathfrak{A}_t)_{t\in I}$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet. Die Stoppzeit T ist dann $\mathfrak{A}_T$-meßbar.

σ-Algebra, von Zufallsvariablen erzeugte, die kleinste σ-Algebra $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{A}$, bezüglich der alle Elemente aus einer Familie $(X_i)_{i\in I}$ von auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierten Zufallsvariablen $\mathfrak{D}$-meßbar sind.

Die Zufallsvariable X_i kann dabei für jedes $i \in I$ als Wertebereich einen anderen meßbaren Raum $(E_i, \mathfrak{E}_i)$ besitzen. Die von der Familie $(X_i)_{i\in I}$ erzeugte σ-Algebra wird mit $\sigma(X_i; i \in I)$ bezeichnet und ist der Durchschnitt aller σ-Algebren in $\mathfrak{A}$, die das Mengensystem

$$\bigcup_{i\in I} \{X_i^{-1}(B_i) : B_i \in \mathfrak{E}_i\}$$

enthalten. Bei einer Familie $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ von endlich vielen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ definierten Zufallsvariablen schreibt man für die erzeugte σ-Algebra meistens $\sigma(X_1, \dots, X_n)$. Insbesondere ist die von einer einzigen Zufallsvariable X mit Werten in $(E, \mathfrak{E})$ erzeugte σ-Algebra durch

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{E}\}$$

gegeben.

Neben $\sigma(X_i; i \in I)$ bzw. $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ werden häufig auch die Schreibweisen $\mathfrak{A}(X_i; i \in I)$ bzw. $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n)$ für die erzeugte σ-Algebra verwendet.

σ-endliche Mengenfunktion, ↗Mengenfunktion.

σ-endliches Maß, Bezeichnung für ein Maß, das als ↗Mengenfunktion σ-endlich ist.

σ-Halbadditivität, auch σ-Subadditivität oder σ-Superadditivität genannt, siehe ↗Mengenfunktion.

σ-Mengenalgebra, ↗σ-Algebra.