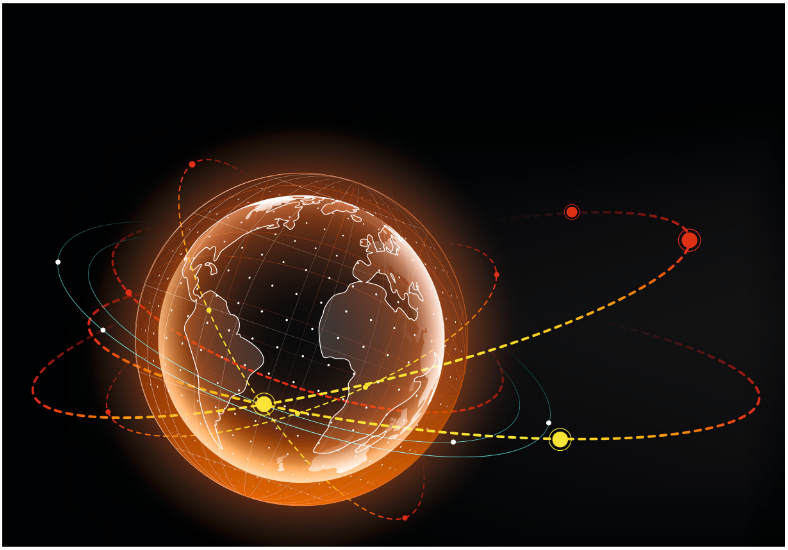
Volker Maiwald
Dominik Quantius
Benny Rievers

PLUS.HANSER-FACHBUCH.DE

Grundlagen der Orbitmechanik



2., aktualisierte Auflage

HANSER

Maiwald / Quantius / Rievers

Grundlagen der Orbitmechanik

Volker Maiwald
Dominik Quantius
Benny Rievers

Grundlagen der Orbitmechanik

2., aktualisierte Auflage

HANSER

Autoren:
Dr.-Ing. Volker Maiwald
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Bremen
Dipl.-Ing. Dominik Quantius
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Bremen
Dr.-Ing. Benny Rievers
Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation (ZARM), Universität Bremen

FSC
www.fsc.org
MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelbild: © shutterstock.com/Yuri Hoyda
Satz: Volker Maiwald
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47027-9
E-Book-ISBN 978-3-446-47052-1

Inhaltsverzeichnis

Videoverzeichnis

1 Einführung

Der 4. Oktober 1957 markiert den Beginn der Raumfahrt. An diesem Tag erreichte zum ersten Mal ein künstliches Objekt, der sowjetische Satellit *Sputnik*, eine Umlaufbahn um die Erde. Die Jahrzehnte davor waren von Versuchen geprägt, dieses Ziel zu erreichen und von der technischen und wissenschaftlichen Vorbereitung eines solchen Unterfangens.

Heute sind Satelliten aus dem All(tag) nicht mehr wegzudenken. Sie sind fester Bestandteil unserer Gesellschaft, verbinden uns mit anderen Kontinenten, versorgen uns mit Wetterdaten und ermöglichen uns die Erforschung anderer Planeten, Sonnensysteme und des Kosmos im Ganzen.

Die Durchführung von Raumfahrtmissionen ist ohne ausgeklügelte Bahnberechnungen allerdings undenkbar. Die Orbitmechanik ermöglicht z.B. die Berechnung von Manövern, die notwendig sind, um ein gewünschtes Ziel, wie z.B. den Planeten Jupiter, zu erreichen. Durch Orbitmechanik können Kontaktzeiten mit Bodenstationen im Vorfeld berechnet, Antennen entsprechend ausgerichtet und Antriebssysteme von Satelliten im Voraus korrekt ausgelegt werden. Gleiches gilt für Sichtbarkeiten z.B. von Orten auf einer Planetenoberfläche oder für die Bestimmung von Schattenzeiten in denen ein Satellit nicht durch Solarzellen mit Energie versorgt werden kann.

Die Orbitmechanik hat aber Ihre Ursprünge nicht in der Raumfahrt selbst, sondern ist bereits viel länger Bestandteil der Wissenschaft. Schon lange vor Sputnik und seinen Nachfahren hat sie wichtige Beiträge zur Erforschung des Kosmos geliefert und tut dies noch heute. Mit Hilfe der Orbitmechanik wurden die Bewegungen der Planeten beschrieben und sie ist z.B. eine der Grundlagen für die Erforschung der Dunklen Materie.

Dieses Buch befasst sich mit der Orbitmechanik in ihrer Anwendung im Bereich der Raumfahrt und soll die grundlegenden Werkzeuge zur Verfügung stellen, die notwendig sind, um Missionen auszulegen und Machbarkeitsanalysen durchzuführen. Da es nur wenige analytisch lösbare Fälle gibt, die die Orbitmechanik beschreibt, und diese immer eine Vereinfachung der tatsächlichen Gegebenheiten darstellen, können reale Missionen nicht ohne numerische Verfahren gelöst werden. Die Grundlagen, die zum Verständnis dieser komplexen Berechnungen nötig sind, können aber analytisch erfasst werden. Zu Beginn sind diese Grundlagen einfache Himmelsmechanik, die ebenso auf natürliche Körper im All angewendet werden können.

Die Entwicklung der Himmelsmechanik hat bereits viele Jahrhunderte in Anspruch genommen und ist sicherlich noch nicht abgeschlossen. Nach wie vor haben wir bei weitem den Kosmos nicht vollständig verstanden, auch nicht die Grundlage für die Orbitmechanik: Die Gravitation selbst. Zwar ist die Wirkung durch die Relativitätstheorie und das Modell der Raumzeit verstanden, die Ursache der Gravitation bleibt jedoch unklar.

Der Kosmos ist für die meisten Menschen sehr leicht erfahrbar: Ein Blick in den nächtlichen Himmel offenbart ihn uns in seiner gesamten Pracht, wenn diese nicht durch moderne Beleuchtung versteckt wird. Dieses Problem bestand in der Antike nicht und so stammen die ersten dokumentierten Gedanken mit Bezug zur Himmelsmechanik auch aus dieser Epoche.

Die Auseinandersetzung mit astronomischen Erscheinungen lässt sich aber auch schon für frühere Kulturen, auch außerhalb Europas, belegen. Dies ergeben Funde aus der Archäoastronomie: z.B. Tiermalereien in der Höhle von Lascaux (umstrittene Theorie von Sternbildern, 36.000-15.000 v. Chr.), die Kreisgrabenanlage von Goseck (Anlage zur Messung der Sonnenwende, ca. 4.800 v. Chr.), die Himmelsscheibe von Nebra (Darstellung von Mond und den Sternen der Plejaden, 2.100-1.700 v. Chr.) sowie Hinterlassenschaften z.B. der Maya, Ägypter, Mesopotamier, Aborigines oder astronomische Text aus Indien (Vedāṅga Jyotiṣa, die hinduistische Astrologie).

1.1 Entwicklung der Orbitmechanik und Kosmologie

In unserem Kulturkreis kennen wir wissenschaftliche Zeugnisse bzgl. der Anfänge der Sternenkunde bereits aus der Antike. Mit der Beobachtung von Gestirnen beschäftigte sich unter anderem Oinopides im 5. Jahrhundert vor Christus und bestimmte so das Sonnenjahr bis auf einige Zehnerstellen genau und die mittlere synodische Mondperiode mit einer Abweichung erst bei der vierten Nachkommastelle zu rund 29,53 Tagen. Außerdem vermaß er die Schiefe der Ekliptik, also der Neigung des Erdäquators gegenüber der Umlaufbahn der Erde (oder aus damaliger Sicht der Sonne) zu 24°, was sehr dicht am heute üblicherweise verwendeten Wert von 23,44° lag.

Einer der ersten, die für die Kosmologie gestritten haben, war im 3. Jahrhundert vor Christus der griechische Philosoph Stratos von Lampsakos. Als Physiker beschäftige er sich unter anderem mit Bewegung – so schlussfolgerte er erstmalig, dass ein fallendes Objekt beschleunigt wird und sich nicht etwa gleichförmig bewegt. Daneben verstand er den Kosmos als eine Maschine, die nicht durch etwaige willkürliche Akte von Göttern beeinflusst wurde.

Einer seiner Schüler war Aristarchos von Samos. Dieser ist vor allem durch sein Werk *Über die Größen und Abstände von Sonne und Mond* bekannt, in dem er ein geozentrisches Weltbild vertrat. Leider ist kein weiteres Werk von ihm erhalten. Allerdings gibt es Zitierungen seiner Werke durch andere Wissenschaftler. So wissen wir, dass er später selbst ein heliozentrisches Weltbild vertrat und annahm, dass der Abstand der Sterne, die er als auf einer Sphäre befindlich begriff, größer sein musste als der Abstand zwischen Erde und Sonne. Er machte deutlich, dass die fehlende sichtbare Parallaxe, also die Verschiebung der Richtung zum Stern durch die Bewegung der Erde um die Sonne (durch Veränderung des Blickwinkels) nur durch eine sehr große Entfernung erklärt werden kann. Sein heliozentrisches Weltbild war sehr umstritten und lediglich Seleukos von Seleukia arbeitete damit weiter. Er brachte erstmals die Bewegung von Sonne und Mond mit den Gezeiten in Verbindung.

Aristarchos befasste sich aber vor allem auch mit der Berechnung der Größen von Sonne, Mond und Erde (s. Bild 1-1). Zwar wichen die Ergebnisse seiner Berechnungen durch die Ungenauigkeit seiner Beobachtungen sehr stark von den tatsächlichen Gegebenheiten ab, allerdings etablierte er, dass die Sonne sehr viel weiter von Mond und Erde entfernt ist, als es das Schalenmodell seiner Kollegen erlaubte. Seine Überlegungen basierten auf der Beobachtung, dass die Mondphasen von der Beleuchtung der Sonne herrührten.

Einige Jahrzehnte später befasste sich Erathosthenes von Kyrene unter anderem mit Astronomie und Kalenderzyklen – die wiederum auf der Bewegung von Sonne und Mond beruhten. Er verbesserte die Kenntnis des Werts der Schiefe der Ekliptik zu ca. 23,77° und bestimmte außerdem den Erdumfang zum ca. 50-fachen der Entfernung zwischen dem antiken Alexandria und Assuan. Damit erzielte er eine realistische Schätzung von den tatsächlichen Größen der Himmelskörper. Seine Schätzung wich um nur gut 4% vom wirklichen Erdumfang ab.

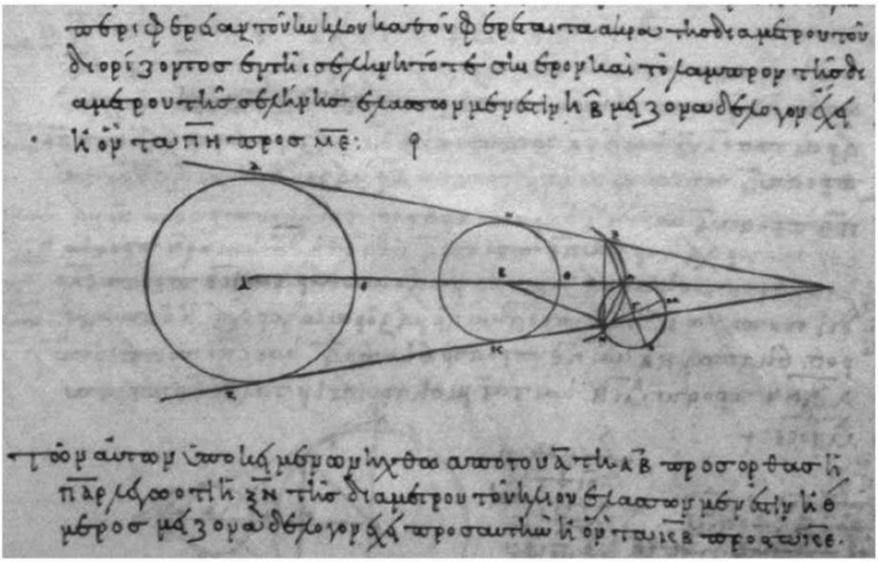


Bild 1-1

Abschrift aus dem 10. Jh. n. Chr. von Aristarchos' Bestimmung der relativen Größen von Sonne, Mond und Erde.

[Quelle: gemeinfrei]

Mitte des 2. Jahrhunderts vor Christus entdeckte Hipparchos von Nicäa anhand eines Vergleichs von älteren Aufzeichnungen von Sternenpositionen mit seinen eigenen Beobachtungen, eine Verschiebung der Tag- und Nachtgleiche. Er folgerte daraus eine Verdrehung des Sternenhimmels, entdeckte aber in Wirklichkeit so die Präzession der Erdachse, was erst Kopernikus gut 1.500 Jahre später in ganzer Konsequenz folgerte. Die Genauigkeit der Kenntnis der Präzession wurde im 13. Jahrhundert nach Christus von Nasi Ad-din at-Tusi deutlich verbessert.

Ebenso berechnete Hipparch den Abstand zwischen Mond und Erde als das dreißigfache des Erddurchmessers, womit er nur ungefähr 1500 Kilometer von der mittleren Entfernung zwischen Mond und Erde abwich.

Rund drei Jahrhunderte später entwickelte Claudius Ptolomäus ein komplexes Modell des Sonnensystems, das im Einklang mit Beobachtungen stand. Es war geozentrisch, allerdings war die Bewegung der Planeten eine Überlagerung von mehreren Kreisen. Es blieb für die nächsten Jahrhunderte die Standardreferenz in Europa.

In Indien befasste sich im 6. Jahrhundert nach Christus der Astronom und Mathematiker Aryabhata ebenfalls mit der Orbitmechanik. Er machte genaue Angaben zum Erdumfang und dem Abstand zwischen Erde und Mond. Er verfasste Ephemeriden, d.h. Positionskataloge, der Planeten. Zwar vertrat er ein geozentrisches Weltbild, allerdings hat er wohl zumindest geahnt, dass ein heliozentrisches passender wäre und es gibt Hinweise darauf, dass ihm klar war, dass die Planetenbahnen Ellipsen sind.

Im 14. Jahrhundert hat Ibn asch Schatir das ptolomäische System modifiziert, wodurch es genauer wurde. Außerdem entdeckte er die Apsidenwanderung, d.h. die Drehung der gesamten Erdbahn um die Sonne.

Der nächste große Schritt jedoch war der von Nikolaus Kopernikus, welcher ein heliozentrisches Model ersann, auch vor dem Hintergrund der Präzession des Frühlingspunktes. Seine Arbeit war jedoch noch dadurch geprägt, dass er auf einer Vollkommenheit der Kreisbewegung bestand und diese als Bahnform annahm. Diese Annahme brachte nur eine schlechte Übereinstimmung mit den tatsächlichen Planetenpositionen und ermöglichte somit keine präzisen Vorhersagen über zukünftige Positionen am Nachthimmel. Beeinflusst wurde seine Arbeit von Nikolaus von Kues und Regiomontanus. Erst kurz vor seinem Tod im Jahre 1543 veröffentlichte Kopernikus sein Hauptwerk *De revolutionibus orbium coelestium* (s. Bild 1-2).

Der schnellere Fortschritt der Wissenschaft, u.a. bedingt durch den Buchdruck, machte auch vor der Astronomie nicht Halt. Tycho Brahe war im 16. Jahrhundert Astronom in Dänemark und erstellte vor allem eine umfangreiche Sammlung von Beobachtungsdaten und war ein Förderer von Johannes Kepler. Er lehnte das heliozentrische Weltbild von Kopernikus ab, erstellte eine eigene Vorstellung der Welt, die geozentrisch war, allerdings nur bezüglich der Sonne, die nach seiner Vorstellung um die Erde kreiste. Alle anderen Planeten wiederum umkreisten in seinem Modell die Sonne.

Nach seinem Tod im Jahre 1601 ermöglichten es seine Beobachtungsdaten Johannes Kepler schließlich seine weitreichenden Erkenntnisse zu machen, welche in den berühmten Keplerschen Gesetzen mündeten (s. Kapitel 6). Erstmals war klar, dass die Planetenbahnen Ellipsen waren. Kepler war so auch in der Lage, die Geschwindigkeit des Planeten Mars zu bestimmen und leitete eine Berechnung ab, die es erlaubte die Entfernung eines Planeten von der Sonne mit seiner Umlaufperiode in Zusammenhang zu bringen, welches er 1619 in seinem Werk *Harmonice mundi* veröffentlichte. Seine Arbeit ermöglichte es ihm – auch wenn er dieses Ereignis selbst nicht mehr erleben sollte – einen Venustransit für das Jahr 1631 vorherzusagen – d.h. einer Wanderung der Venus über die Sonnenscheibe aus Sicht eines Beobachters.

Im gleichen Zeitraum ermöglichte die Entwicklung des Fernrohrs Galileo Galilei die Entdeckung der vier größten Jupitermonde, die man noch heute die galileischen Monde nennt. Er konnte beobachten, dass diese Jupiter umkreisen. Ebenso konnte er die Phasen der Venus erkennen, woraus er eine Veränderung der relativen Position unseres Nachbarplaneten zur Erde und zur Sonne herleitete. Seine Beobachtungen brachten das heliozentrische Weltbild ins Wanken.

Bereits zu dieser Zeit gab es auch Ideen, z.B. geäußert von dem Mönch Giordano Bruno, dass die Sonne nicht nur im Mittelpunkt unseres Sonnensystems stehe, sondern sogar nur eine von vielen Sonnen im All war. Er ging von einem unendlichen Weltall aus, welches er philosophisch begründete. Auch Galilei vertrat solche Ansichten bezüglich der Sonne.

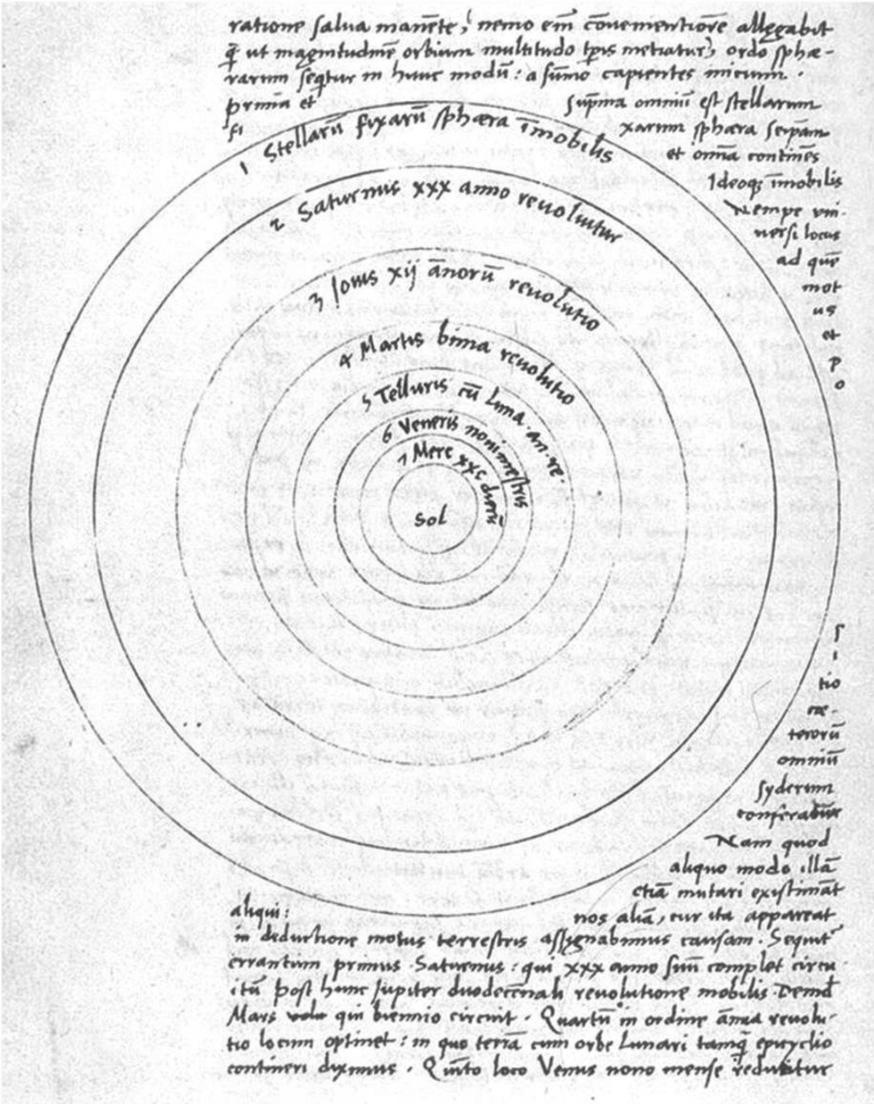


Bild 1-2

Seite aus dem Manuskript *De revolutionibus orbium coelestium* von Nikolaus Kopernikus.

[Quelle: gemeinfrei]

Im Jahre 1687 erschien schließlich Isaac Newtons *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (s. Bild 1-3), in der dieser das Gravitationsgesetz herleitete und damit die von Kepler beobachteten Bahnen mathematisch erklären konnte. Newton war der Begründer der modernen Mechanik und hat für die

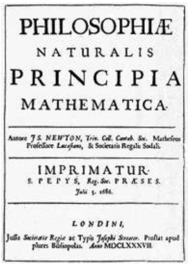
Herleitung des Gravitationsgesetzes auch an der Entwicklung der Differentialmathematik gearbeitet. Er postulierte außerdem, dass auch Kometen auf elliptischen Bahnen die Sonne umrundeten.

Das Gravitationsgesetz und seine Folgen ermöglichten erstmals Berechnungen von beliebigen Bahnen und die Auswirkung der Gravitation von Planeten auf Bahnen von Himmelskörpern. Edmond Halley, entdeckte auf Basis von Newtons Erkenntnissen, dass Kometen die Wiederkehr der gleichen Körper darstellten und sagte die Wiederkehr des nach ihm benannten Kometen für das Jahr 1758 voraus. Der Franzose Alexis-Claude Clairut z.B. berechnete eine Rückkehr des Halleyschen Kometen für das Jahr 1759. Seine Vorhersage war ungenau und die Abweichung führte er auf das Vorhandensein eines Planeten hinter Saturn zurück – gut zwanzig Jahre später wurde Uranus von Wilhelm Herschel entdeckt. Ebenso erkannte Halley durch Vergleich von Beobachtungsdaten, dass sich selbst die Sterne bewegten. Man erkannte auch eine Schwankung der Sternenposition im Laufe eines Jahres, was letztlich eine genauere Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ermöglichte, dere Wert noch 50 Jahre zuvor als gut 200.000 km/s berechnet worden war.

Bild 1-3

Deckblatt von Newtons *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* aus dem Jahre 1687.

[Quelle: gemeinfrei]



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

Mitte des 18. Jahrhundert verfasste Immanuel Kant zum ersten Mal eine Theorie zur Entstehung und Entwicklung des Sonnensystems aus einem Urnebel. 1761 wurde mit Hilfe eines weiteren Venustransits ihre Atmosphäre erkannt; 8 Jahre später ermöglichte ein weiterer Transit eine genaue Bestimmung des Erdabstands von der Sonne. In den 80ern des 18. Jahrhunderts veröffentlichte Joseph-Louis Lagrange seine Arbeiten zum Dreikörperproblem (s. Kapitel 9).

Ende des 18. und zu Beginn des 19. Jahrhunderts setzte eine regelrechte Beobachtungswelle ein, die darin mündete, dass man viele Kleinkörper dort entdeckte, wo man zwischen Mars und Jupiter einen weiteren Planeten vermutete. Den Anfang machte der Zwergplanet Ceres im Jahre 1801. Da er schließlich auf seiner Bahn um die Sonne hinter dieser verschwand und nicht wieder auffindbar war, leitete Carl Friedrich Gauß die heute vielfach eingesetzte Methode der kleinsten Quadrate ab und bestimmte so Ceres‘ Bahn, was es ermöglichte ihn wiederzufinden.

Der Bremer Arzt und Astronom Heinrich Wilhelm Olbers beschäftigte sich in seiner Arbeit ebenfalls mit Kleinkörpern. Im Jahr 1797 veröffentlichte er ein Werk zur Bahnberechnung von Kometen. Auch er beteiligte sich an der Suche nach einem möglichen Nachbarn von Mars und Jupiter und entdeckte 1802 den Kleinkörper Pallas, während er eigentlich Ceres auffinden wollte. Da der „Planet“ zwischen Mars und Jupiter als entdeckt galt, man aber nun einen weiteren Körper ausgemacht hatte, entwickelte Olbers die These, dass es sich um Bruchstücke eines Himmelskörpers handelte. Einen weiteren Kleinkörper entdeckte er in der Nachbarschaft von Mars im Jahre 1807: Vesta. Dieser wurde 2011 von der Sonde *Dawn* besucht.

Die Bahn des 1781 entdeckten Uranus unterlag ihrerseits wiederum Störungen, welche im 19. Jahrhundert in der Annahme der Anwesenheit eines weiteren Planeten gipfelten. Urbaun Le Verrier und John Couch Adams kamen unabhängig voneinander zu gleichen Ergebnissen und Johann Gottfried Galle konnte unter Anleitung von Le Verrier schließlich im Jahre 1846 Neptun an der berechneten Position entdecken.

Eine weitere Bahnabweichung, die man zuerst einem Planeten zuschrieb, war die Perihelwanderung (Drehung des sonnennächsten Punktes) des Merkur. Die Suche nach einem anderen Planeten, genannt Vulkan, blieb erfolglos. Albert Einstein konnte schließlich mit seiner allgemeinen Relativitätstheorie, veröffentlicht im Jahre 1915, eine Erklärung für die Bewegung liefern und erweiterte somit unser Verständnis von Gravitation und damit auch der Orbitmechanik und natürlich der Kosmologie.

Die Anfänge der Raketentechnik liegen im mittelalterlichen China, wo schon im 13. Jahrhundert Feststoffraketen im Kampf eingesetzt wurden. Im 16. Jahrhundert haben Conrad Haas Johannes Schmidlap ebenfalls mit militärischer Anwendung an Raketen gearbeitet wurden – an Erforschung des Weltraums wurde damals leider nicht gedacht – und sogar Entwürfe mit mehreren Stufen erarbeitet und Starttests durchgeführt. Sogar von der Möglichkeit Menschen damit in den Himmel zu transportieren, hat Haas geschrieben. Auch von Casimir Simiennowicz, einem Artillerie-Experten, der einhundert Jahre später lebte, sind Aufzeichnungen erhalten, die Mehrstufenraketen beschreiben.

Mit einer theoretischen Grundlage konnte man damals noch nicht aufwarten. Bis diese erarbeitet wurde, dauerte es noch. Im Jahre 1903 wurde von Konstantin Eduardowitsch Ziolkowski die Raketengrundgleichung veröffentlicht (s. Kapitel 7), die mathematische Grundlage für die Stufung von Raketen. Herrmann Oberth veröffentlichte im Jahre 1923 sein Werk *Die Rakete zu den Planetenräumen* in dem er seine Erkenntnisse zum Bau von Raketen zusammenfasste. Es enthielt auch schon Ideen zu einem elektrischen Triebwerk mit niedrigem Schub, einem Ionentriebwerk. Ebenfalls zu Beginn des 20. Jahrhunderts befasste sich Robert Goddard mit Flügen zum Mond und dem Bau und Test von Raketen.

Wernher von Braun arbeitete im zweiten Weltkrieg an der V2 und brachte diese Rakete zur Serienreife. Zu diesem Zeitpunkt war die Rakete leider als Waffe entwickelt worden und stellt damit wohl das dunkelste Kapitel der Raumfahrt dar. Nicht nur war die V2 durch Abschuss auf Städte für viele Todesopfer verantwortlich, sondern bei ihrer Herstellung kamen auch Zwangs-arbeiter zum Einsatz unter entsprechend unmenschlichen Bedingungen. Insge-samt starben durch die Rakete ungefähr 30.000 Menschen. Nach dem Krieg ging von Braun in die USA und setzte dort seine Arbeit im zivilen Raumfahrt-programm fort. Der Raketenkonstrukteur Sergei Koroljow arbeitete auf sowjietischer Seite mit einstigen Mitarbeitern von Brauns am sowjietischen Raketenprogramm, was 1957 schließlich im Start von Sputnik gipfelte und das Weltraumrennen zwischen den USA und der Sowjetunion einleitete. Die Orbitmechanik mit Bezug zur Raumfahrt wandelte sich damit endgültig von bloßer Theorie zu Praxis.

1.2 Kapitelübersicht

Dieses Buch zielt darauf ab, die Orbitmechanik leicht verständlich, anschaulich und praxisnah zu vermitteln. Die Inhalte reichen von der einfachen Himmelsmechanik, mit der sich natürliche Bewegungen beschreiben lassen, bis hin zur Beschreibung von Bahnen unter künstlichem Schub.

Zu Beginn werden die grundlegenden mathematischen und physikalischen Inhalte eingeführt, denn ohne Vektorrechnung und Differerentialmathematik lässt sich Orbitmechanik nicht vermitteln. Anschließend wird in Kapitel 3 auf Koordinatensysteme eingegangen. Um Bewegungen zu beschreiben, muss man sich auf Systematiken zur Beschreibung von Position und Richtung einigen. Dort werfen wir auch einen Blick auf das Sonnensystem als solches und wie die Bewegungen der Planeten aussehen.

Kapitel 4 beschäftigt sich analog zur räumlichen Referenz mit Zeitsystemen. Da die Situation im Sonnensystem zeitlich stark veränderlich ist, ist es notwendig Zeitsysteme zu definieren. Mit diesen kann man angeben, zu welchem Zeitpunkt eine Angabe, z.B. bzgl. einer Position, Gültigkeit hat.

In Kapitel 5 wird es dann ernst. Hier wird die Physik auf Spuren von Newton vertieft, die Gravitationskraft beschrieben und als Ursache natürlicher Bahnen von Himmelskörpern betrachtet. Außerdem werden die Grenzen von Idealannahmen aufgezeigt, z.B. durch Abweichung der Erde von einer perfekten Kugelform.

Kapitel 6 leitet schließlich die Bewegungsgleichungen des Zweikörperproblems her, einem einfachen Modell von zwei Körpern, die sich aufgrund von Gravitation umeinander bewegen. Schließlich wird es damit möglich, Vorhersagen über Position und Bahn eines Himmelskörpers zu treffen.

Kapitel 7 widmet sich der Anwendung dieser Gleichungen und zeigt vereinfachte aber dafür leicht verständliche Methoden auf, um Flugbahnen zu berechnen und auch Missionen zu planen, d.h. Manöver zu definieren, die notwendig sind, um Bahnen zielorientiert zu ändern.

Kapitel 8 stellt typische Bahnen vor, die heute häufig für Satelliten angewendet werden, z.B. der geosynchrone Orbit. Kapitel 9 erweitert den Werkzeugkasten der Orbitmechanik auf das Mehrkörperproblem und liefert ähnliche Betrachtungen wie zuvor für das Zweikörperproblem bzgl. Energie und Impuls.

Kapitel 10 zeigt auf, wie Bahnen und Missionen im Dreikörperproblem berechnet werden können und stellt den Idealbetrachtungen der vorangegangenen Kapitel die realistische und präzise Anwendung gegenüber.

Kapitel 11 einen Spezialfall der Orbitmechanik: Niedrigschubbahnen. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie ständigen, schwachen Änderungen unterliegen und z.B. für Oberths Ionenantrieb angewendet werden. Es werden die relevanten Informationen vermittelt, um Unterschiede zu den bisher behandelten Bahnen zu verstehen und auch die Stichworte geliefert, um selbstständig weiter zu recherchieren.

Den Abschluss macht Kapitel 12 mit einem Überblick über die Ausrichtung von Satelliten und wie diese beeinflusst wird durch Störmomente. Am Ende finden sich Beispielaufgaben, die durch Anwednung das Verständnis des Stoffs verbessern.

Dieses Buch basiert auf der Vorlesungsreihe „Raumflugmechanik“ an der Universität Bremen, geht aber an vielen Stellen über diese hinaus. Wenn die Inhalte verinnerlicht sind, kann der Leser Machbarkeiten von Missionskonzepten aus Sicht der Orbitmechanik überprüfen und erste Abschätzungen für die Auslegung eines Raumfahrzeugs bzgl. der Bahn treffen, z.B. über Treibstoffmassenbedarfe oder auch hinsichtlich Anforderungen, die sich aus dem zeitlichen Ablauf der geplanten Manöver ergeben.

2 Mathematische und physikalische Grundlagen

Die schlechte Nachricht vorweg: Ohne höhere Mathematik kommt man in der Orbitmechanik nicht sehr weit. Die gute Nachricht ist andererseits, dass die angewendeten Prinzipien allesamt sehr anschaulich sind, da sie ausschließlich dreidimensional eingesetzt werden. Die Positionsangabe eines Satelliten erfolgt i.d.R. dreidimensional, ebenso ihre zeitlichen Ableitungen, d.h. Geschwindigkeit und Beschleunigung. Der dreidimensionale Raum ist uns durch das ständige Erfahren sehr vertraut und selbst im Alltag begegnen wir häufig Vorgängen, die mit Orbitmechanik verwandt sind, nämlich immer dann, wenn wir es mit Effekten aufgrund der Erdanziehungskraft zu tun haben.

Für die Orbitmechanik kommt man nicht an der Vektorrechnung vorbei. Diese Art der mathematischen Formulierung ist intuitiv geradezu zwangsläufig mit einer Beschreibung von Bahnen in einem Raum, in diesem Fall im Weltraum, verbunden.

Die Transformation von einem Koordinatensystem ins andere macht den Einsatz von Transformationsmatrizen notwendig und für die Herleitung der Zusammenhänge zwischen Energie, Impuls und z.B. Geschwindigkeit kommt man nicht ohne Differential- und Integralrechnung aus.

Wie schon in Abschnitt 1.1 ersichtlich, ist eine maßgebliche Grundlage auch die Newtonsche Mechanik, inklusive ihrer Begriffe wie Impuls und Kraft.

Die nächsten Abschnitte sind Zusammenfassungen der wichtigsten Inhalte der jeweiligen Grundlagen. Sie ersetzen keine ausführliche Auseinandersetzung mit dem Stoff, sondern dienen eher als Erinnerungshilfe. Wer beim Lesen feststellt, dass es da doch größere Lücken gibt, dem sei die gezielte Lektüre von mathematischen Fachbüchern empfohlen. Beispiele für geeignete, weiterführende Literatur gibt es am Kapitelende.

2.1 Vektorrechnung

Die Vektorrechnung ist zunächst ein Werkzeug zur Angabe eines Zustands eines Objekts innerhalb eines gewählten Koordinatensystems, eine Vorschrift bzgl. Notierung aus der dann auch bestimmte Rechenregeln folgen. Zwar kann Vektorrechnung für n-dimensionale Räume sehr schnell schwer vorstellbar werden, allerdings – zumindest bisher – reicht es für die Orbitmechanik dreidimensional zu rechnen. Für sehr präzise Berechnungen müssten auch relativistische Effekte berücksichtigt werden. Für die meisten Anwendungsfälle, insbesondere den grundlegenden Betrachtungen in diesem Buch, sind die Unterschiede zur rein newtonschen Betrachtung jedoch im Sinne der Beschreibung der Bewegung so klein, dass sie vernachlässigt werden können. Wir werden uns auf den dreidimensionalen Fall beschränken.

2.1.1 Definition und Eigenschaften eines Vektors

Ein Vektor ist nichts anderes als eine Richtungsangabe (deswegen werden sie auch mit Pfeilen gekennzeichnet) und die dazugehörige Länge. Wenn man mit seinem Arm auf ein beliebiges Objekt zeigt, hat man eine Richtung, wenn man die Entfernung schätzt (wir wollen sie nicht zwingen aufzustehen und nachzumessen) auch diese Angabe. Zusammen ergeben diese Informationen nun einen Vektor.

Formal sagt man über einen Vektor, dass er ein Element eines Vektorraums ist, wie eine Zahl das Element eines Zahlenraums ist. Die Zahl 4 ist beispielsweise ein Element der natürlichen Zahlen, der Vektor $(4 \;\; 2{,}3 \;\; 3)^T$ ist wiederum ein Element des $\mathbb{R}^3$ (des dreidimensionalen Raums der reellen Zahlen). Dabei bedeutet ^{T} dass der Vektor transponiert ist, d.h. eigentlich in Zeilen geschrieben ist (das machen wir gleich unten).

Ein Vektorraum ist dann ein Vektorraum, wenn für ihn bestimmte Rechenregeln gelten. Für die Addition von Vektoren sind das die folgenden:

- Das Assoziativgesetz, d.h. wenn man drei (oder mehr) Vektoren addiert, ist es egal, ob man erst die ersten beiden addiert und dann den dritten oder erst die letzten beiden und dann den ersten:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

- Das neutrale Element existiert, d.h. ein Element, das addiert zu einem Vektor wieder den Vektor ergibt (wie die 0 bei einfachen Zahlen):

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

- Ein inverses Element existiert, d.h. das inverse Element addiert zum Element, ergibt als Summe 0 (wie die -1 zur 1, zusammen ergeben sie 0):

$$\vec{a} + (-\vec{a}\,) = \vec{0}$$

- Das Kommutativgesetz gilt, d.h. bei der Addition darf vertauscht werden, ohne das Ergebnis zu ändern (vergleichbar mit 3+4 = 7 und 4+3 = 7):

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$$

Für die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl, genannt Skalarmultiplikation, müssen die folgenden Regeln gelten:

- Eine Zahl multipliziert mit einer Vektorsumme, ergibt das gleiche wie die Summe der Zahl multipliziert mit jedem der Vektoren (ähnlich wie 3 · (5+4) = 3 · 5+3 · 4 = 27):

$$3 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$$

- Die Summe zweier Zahlen multipliziert mit einem Vektor ergibt das gleiche, wie jede Zahl multipliziert mit dem Vektor und die folgende Addition der Vektoren (im Grunde das gleiche wie oben):

$$\vec{a} \cdot (2 + 5) = 2 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{a}$$

- Eine Zahl multipliziert mit einer Zahl und dann mit einem Vektor, ergibt das gleiche, wie die Multiplikation der zweiten Zahl mit dem Vektor und dann der ersten Zahl (analog zu $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5) = 60$):

$$(3 \cdot 2) \cdot \vec{a} = 3 \cdot (2 \cdot \vec{a})$$

- Ebenso braucht es die 1 als neutrales Element der Multiplikation (analog ist $1 \cdot 3$ immer noch 3):

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

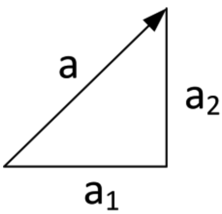
Die exakten mathematischen Formulierungen sind etwas abstrakter (und damit vielseitiger), für unsere anschaulichen Zwecke reichen diese Formulierungen allerdings aus.

Damit liegen die wichtigsten Rechenregeln schon einmal fest. Der Betrag eines Vektors ist seine Länge und kann einfach aus seinen Komponenten bestimmt werden. Die Richtungen der Komponenten stehen für gewöhnlich senkrecht aufeinander (warum wird gleich erklärt) und daraus lässt sich ableiten, dass der Betrag eines Vektors gerade gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate seiner Komponenten ist – ganz so, wie man die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet (Satz des Pythagoras). Konkret heißt das für einen dreidimensionalen Vektor (vgl. Bild 2-1):

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Bild 2-1

Betrag a eines zweidimensionalen Vektors mit den Komponenten a_1 und a_2.



Jeder Vektorraum wird zudem noch durch eine Reihe von Basisvektoren definiert. Diese Vektoren legen im Grunde sein Gerüst fest und haben immer die Länge eins. Sie müssen außerdem linear unabhängig sein (also rechtwinklig zueinander). Das bedeutet einfach, sie dürfen nicht so formuliert sein, dass man den einen aus den übrigen herleiten kann. Kombiniert man aber – mit Hilfe der oben genannten Regeln – diese drei Vektoren oder ihre Vielfachen miteinander, so kann man jeden anderen Vektor des Raums erhalten. Das klingt ebenfalls viel komplizierter als es ist.

Sehen Sie sich um. Sie sind in einem dreidimensionalen Raum. Wenn Sie jetzt aus ihren Armen ein L formen, das parallel zum Boden liegt, also genau 90° zwischen ihren Armen sind, dann haben sie schon eine Definition von zwei Richtungen vorgenommen. Sie könnten die Richtung des einen Arms nicht durch die Richtung des anderen angeben. Diese beiden wären also linear unabhängig.

Führen sie nun ihre Arme näher zueinander, so dass nur noch 45° zwischen ihnen sind, dann könnten sie die Längsrichtung des einen durch den anderen Arm ausdrücken. Sie sind also nicht linear unabhängig. Dasselbe machen wir nun mit drei Vektoren.

Stellen sie sich vor, wir definieren für einen Raum, z.B. das Wohnzimmer oder das Strandcafé in dem Sie dieses Buch lesen, drei verschiedene Richtungen: x, y, z. Und diese schreiben wir in der Reihenfolge von oben nach unten in unseren Vektoren, dann bilden die folgenden drei Vektoren eine mögliche Basis:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sie haben die Länge 1, damit jeder Vektor aus einer Linearkombination von ihnen erstellt werden kann, ohne eine Skalierung, so z.B. der Vektor $(4 \;\; 2{,}3 \;\; 3)^T$ von eben:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}3 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot \vec{e}_x + 2{,}3 \cdot \vec{e}_y + 3 \cdot \vec{e}_z$$

Diese Idee ist wichtig, wenn wir uns später noch mit Koordinatensystem beschäftigen, die nämlich nichts anderes sind, als Vereinbarungen über die entsprechenden Basisvektoren. Aber schauen wir uns die Berechnung noch einmal genauer an.

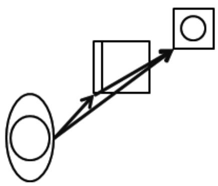
2.1.2 Vektoraddition und -subtraktion

Vektoren zu addieren ist denkbar simpel: Man addiert einfach die Werte der Vektoren zeilenweise. Die Subtraktion geht analog, da sie ja nichts anderes als die Addition einer negativen Zahl ist. Wenn man dabei im Kopf hat, dass ein Vektor nur eine Richtungsangabe ist, dann wird auch sehr schnell klar, warum die Addition so einfach ist.

Stellen sie sich vor, sie sind in einem Raum, in dem ein Stuhl steht und eine Lampe. Um zum Stuhl zu kommen müssen sie einen Schritt nach vorne machen und einen zur linken Seite. Um von dem Stuhl zur Lampe zu kommen, müssen sie zwei Schritte nach vorne machen und einen nach links. Intuitiv werden sie nun sicherlich erschließen können, wie viele Schritte sie brauchen, um direkt zur Lampe zu gehen. Nämlich zwei nach links und drei nach vorne. Dieses Szenario ist in Bild 2-2 dargestellt. Passen sie auf, dass sie nicht über den Stuhl stolpern.

Bild 2-2

Schrittweises Vorgehen bei der Vektoraddition, ergibt das gleiche, wie das sofortige Ausführen der gesamten Positionsänderung.



Um die Vektoren aus diesem Beispiel mathematisch aufzugreifen, können wir schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ihnen ist vielleicht aufgefallen, dass wir hier einfach die erste Komponente als „nach vorne“ definiert haben, die zweite als „nach links“ und die dritte gar nicht verwendet haben. Dies ist vollkommen willkürlich geschehen und hätte auch beliebig anders ausfallen können, allerdings gleich bei allen Vektoren.

2.1.3 Skalarmultiplikation und Skalarprodukt eines Vektors

Genau wie in der Mathematik mit einfachen Zahlen, die man auch als eindimensionale Vektoren auffassen kann, können wir Vektoren skalar (also mit einer Zahl) multiplizieren: es ist ein Vielfaches der Addition mit sich selbst. Also wird die skalare Multiplikation ebenso zeilenweise ausgeführt:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2{,}3 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4{,}6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hier sollte man im Kopf haben, dass das Ergebnis ebenfalls wieder ein Vektor ist. Anders sieht es beim Skalarprodukt aus. Dort kann man sich merken – daher der Name – kommt immer eine Zahl als Ergebnis heraus, wenn man Vektoren miteinander so multipliziert.

Formal lässt sich das Skalarprodukt als das Produkt von den Beträgen beider Vektoren definieren, mal dem Kosinus des Winkels (hier φ genannt), der von ihnen eingeschlossen ist:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$$

Für den Fall von parallelen Vektoren degeneriert das Skalarprodukt zum Produkt der Beträge, da $\varphi = 0$ bedeutet, dass der Kosinus gerade 1 ist. Der andere Extremfall sind zwei senkrecht zueinander stehende Vektoren. Dort wird der Kosinus gerade 0, d.h. auch das Skalarprodukt ist 0. Für kartesische Koordinaten, lässt sich das Skalarprodukt aber auch als zeilenweises Produkt schreiben, so dass man nicht immer den entsprechenden Winkel kennen muss. Dies geschieht dann so:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots$$

Anders herum lässt sich damit natürlich leicht der Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen, da das Skalarprodukt auch ohne ihn errechnet werden kann. Zusammenfassend kann man sagen, dass das Skalarprodukt die Projektion des einen Vektors auf den anderen ist.

2.1.4 Kreuzprodukt oder Vektorprodukt

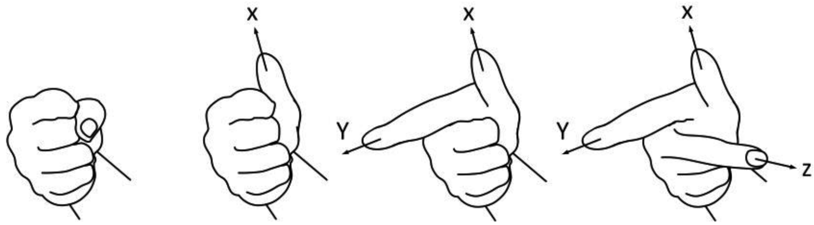
Das Kreuzprodukt, das wegen seines Zeichens × so genannt wird, heißt auch Vektorprodukt. Per Definition steht das Ergebnis eines Vektorprodukts senkrecht auf den beiden beteiligten Vektoren und bildet mit ihnen ein Rechtssystem. Dies wiederum bedeutet, dass das Drehen einer Koordinaten-achse in die Richtung der nachfolgenden Koordinatenachse im mathematischen positiven Sinn, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, erfolgt. Dies kann man einfach mit der Hand ausprobieren.

Halten sie ihre rechte Hand so, dass die Handfläche nach oben zeigt, spreizen sie nun den Daumen ab. Dies ist die x-Achse. Klappen sie nun alle Finger bis auf den ausgestreckten Zeigefinger ein. Dieser ist die y-Achse. Stellen sie nun den Mittelfinger – ohne Gedanken an beleidigende Handgesten – senkrecht dazu auf und erhalten die z-Achse. Dies ist insgesamt ein Rechtssystem (s. Bild 2-3).

Würden sie die x-Achse, also den Daumen – drehen wollen, um in die y-Achsenrichtung zu zeigen, müssten sie den Daumen dazu entgegen des Uhrzeigersinns drehen.

Bild 2-3

Die Rechte-Hand-Regel zur Veranschaulichung eines Rechtssystems von Koordinaten.



Auch das Kreuzprodukt lässt sich wieder mit dem Winkel zwischen den beiden beteiligten Vektoren ausdrücken und dem dazugehörigen Normalenvektor. Letzterer steht immer senkrecht auf einer Ebene – in diesem Fall auf der Ebene der beiden multiplizierten Vektoren (ihr Mittelfinger ist z.B. senkrecht auf der Ebene ihres Daumens und Zeigefingers). Der Betrag des Kreuzprodukts ist nun der Flächeninhalt des Parallelogramms der beiden beteiligten Vektoren, also:

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$$

Es gibt verschiedene Rechenregeln für das Kreuzprodukt, z.B. über Determinanten, oder die Regel des Sarrus. Für unseren dreidimensionalen Fall, lässt sich aber auch folgende Regel benutzen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Diese sieht nun auf den ersten Blick kompliziert aus, ist es aber eigentlich nicht. Zunächst einmal wechseln sich einfach die Komponenten nur ab und außerdem hilft einem das ×. Man merkt sich nur, dass man mit der Berechnung in der goldenen Mitte beginnt, also bei a_2. Dann folgt man der Richtung des ersten Strichs des Kreuzes zu b_3. Jetzt hat man schon den ersten Teil der ersten Komponente. Dann folgt ein Minus und man folgt der Richtung des zweiten Strichs des Kreuzes von a_3 nach b_2. Danach geht man eine Komponente tiefer und startet mit demselben Prozess bei a_3 (wobei der Strich anstatt ihn ins Leere zu laufen zu lassen, wieder oben bei b_1 angesetzt wird) und für die dritte Komponente bei a_1. Fertig ist das Kreuzprodukt, ohne Merken einer komplizierten Formel.

Durch Ausprobieren kann man schnell feststellen, dass die Reihenfolge der beiden Vektoren nicht vertauscht werden kann:

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

Das Kreuzprodukt braucht man im Zusammenhang der Orbitmechanik, z.B. um den Drehimpuls einer Bahn zu definieren.

2.1.5 Spatprodukt

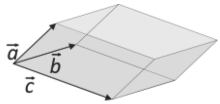
Das Spatprodukt ist eine Kombination des Vektor- und des Skalarprodukts. Ein Spat ist im Grunde eine Art „schiefer Kubus“, d.h. ein geometrischer Körper, der von sechs in parallelen Ebenen liegenden und paarweise deckungsgleichen Parallelogrammen begrenzt ist.

Das Spatprodukt (s. Bild 2-4) beschreibt anschaulich betrachtet das Volumen des Körpers und lässt sich in Vektoren schreiben als:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Bild 2-4

Ein Spat und die Vektoren des Spatprodukts.



Auf diese Weise lassen sich Vektoren mitunter geschickt umordnen. Wir werden dies im Laufe unserer Herleitungen in späteren Kapiteln noch nutzen.

2.2 Transformationsmatrizen

Im Abschnitt 2.1.1 haben wir über Basisvektoren gesprochen und darüber, dass Koordinatensysteme im Grunde nur Vereinbarungen von Basisvektoren darstellen. Nun kann es passieren, dass man Vektoren von einem Basisvektorsystem in ein anderes überführen will. Dies kommt z.B. vor, wenn sie ein Koordinatensystem haben, das fest für einen Satelliten definiert ist, dieser sich allerdings in einem anderen Koordinatensystem bewegt, z.B. eines von der Erde aus betrachtet. Wenn man jetzt einen Vektor vom einen in das andere System übertragen will – z.B. einen Schubvektor – braucht man dafür eine Vorschrift und diese liefern sogenannte Transformationsmatrizen.

Eine Matrix ist im Grunde eine Aneinanderreihung von Vektoren, bzw. ein Vektor ist eine kleine Matrix. Dabei definiert man die Dimensionen einer Matrix immer in Zeilen und Spalten, wobei ein Vektor eben eine Matrix mit einer Spalte ist und in unserem Fall drei Zeilen. Gekennzeichnet werden Matrizen häufig durch fettgedruckte Buchstaben oder durch (doppelt) unterstrichene. Wir wollen hier ersteres verwenden.

Transformationsmatrizen werden immer multipliziert und dies nach einer bestimmten Vorschrift, dabei ist ähnlich wie beim Vektorprodukt die Reihenfolge nicht beliebig. Für unsere Zwecke können wir uns merken, dass wir immer „links“ multiplizieren, d.h. wenn ein Vektor mit einer Matrix multipliziert werden soll, dann schreiben wir:

$$\boldsymbol{A}_{ij} \cdot \vec{r}_j = \vec{r}_i$$

wobei i und j in diesem Fall die verschiedenen Koordinatensysteme kennzeichnen und $\boldsymbol{A}_{ij}$ die Matrix, die von j nach i transformiert. Es handelt sich um die gleiche Position wie zuvor, aber aus einer anderen „Perspektive“ betrachtet. Soll eine weitere Transformation erfolgen, so multiplizieren wir die Matrix wieder links, nicht etwa rechts von der ersten oder dem Vektor.

Wir benutzen für unsere Transformationen nur Drehmatrizen mit bestimmten Eigenschaften, d.h. die Transformation ist eine Rotation des Koordinatensystems.

Für Matrizenmultiplikation gilt das Assoziativgesetz, d.h.:

$$\boldsymbol{A}_{ij} \cdot \left(\boldsymbol{A}_{jk} \cdot \vec{r}_k\right) = \left(\boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{A}_{jk}\right) \cdot \vec{r}_k$$

Das Kommutativgesetz gilt hingegen nicht:

$$\boldsymbol{A}_{ij} \cdot \boldsymbol{A}_{jk} \cdot \vec{r}_k \neq \boldsymbol{A}_{jk} \cdot \boldsymbol{A}_{ij} \cdot \vec{r}_k$$

Wir wollen uns das in einem Beispiel noch einmal genauer ansehen. Stellen sie sich vor, zwei Personen begegnen sich wie in Bild 2-5, während eines Spaziergangs. Da es sonnig ist, tragen die beiden jeweils einen Sombrero – das hat zwar nichts mit der Aufgabe zu tun, lässt sich aber leichter skizzieren. In Bewegungsrichtung ist für beide die Richtung x, bzw. x'. Die anderen Achsen ergeben sich aus der Rechten-Hand-Regel. Beide blicken außerdem zu einem Auto (gestrichelte Linie). Die Richtungen unterscheiden sich, da sich ihre ihre Koordinantensysteme unterscheiden und ihre Positionen.

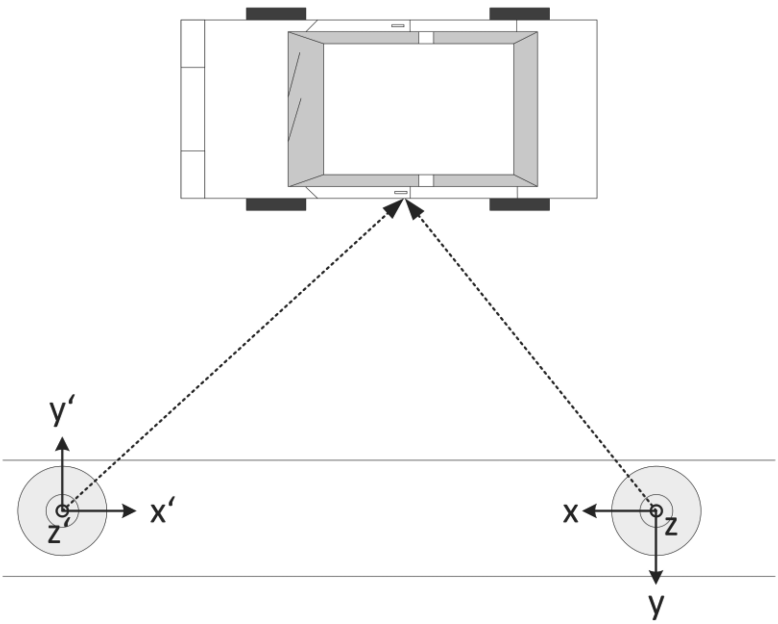


Bild 2-5

Zwei Fußgänger begegnen sich und haben ihrerseits einen Blick auf ein Auto (gestrichelte Richtung), während ihre Bewegungsrichtung jeweils ihre lokale x-Richtung ist, bzw. x'-Richtung.

Würde jetzt die eine Person der anderen beschreiben, wo sie das Auto sieht, dann würde sie im Falle von Person x sagen, dass sie nach rechts vorne blickt. Person x' würde sagen, sie blickt nach links vorne.

Um zu verstehen, was Person x' meint, muss sich Person x in deren Lage versetzen, also ihr eigenes Koordinatensystem in das von x' transformieren und den gleichen Vektor annehmen. Zunächst geht Person x auf x' zu und nimmt (nahezu) die gleiche Position ein (d.h. der Koordinatenursprung ist gleich). Jetzt ist der Vektor der gleiche, aber er wird noch immer unterschiedlich beschrie-ben. Deswegen ist noch eine Drehung um die z-Achse erforderlich, um die Koordinatensysteme gleich auszurichten.