Jörg Kwapis Wolfram Meyerhöfer Olaf Steffen Dagmar Grütte

MANUAL

zum Jenaer Rechentest für die Klassen 1 bis 4

JRT
1-4

WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster

Jörg Kwapis Wolfram Meyerhöfer Olaf Steffen Dagmar Grütte

MANUAL

zum Jenaer Rechentest für die Klassen 1 bis 4

JRT 1 – 4

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

■ Der Jenaer Rechentest ist kostenlos im Internet verfügbar:
www.jenaer-rechentest.de

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
<http://www.edition-winterwork.de>

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster; 2018
ISBN 978-3-95987-074-0 E-Book

Inhalt

1 Qualitative lösungsprozessanalytische Diagnostik – 5

- 1.1 Testmethodik – 5
- 1.2 Kritik an bestehenden Testverfahren – 7
- 1.3 Anwendungsbereiche und Aussagen des JRT – 8

2 Logik des Rechnens und des Rechnenlernens – 11

- 2.1 Von der Zahl zum Rechnen – 11
- 2.2 Schritte beim Erlernen des Rechnens – 12
 - 2.2.1 Kardinale Zahlidentität – 12
 - 2.2.2 Kardinale Zahlbeziehungen – 13
 - 2.2.3 Kardinale Zahldifferenz – 14
 - 2.2.4 Rechnen als Anwendung kardinalen Zahlwissens – 16
- 2.3 Logik der Grundrechenarten – 16
- 2.4 Aufbau des dekadisch strukturierten Stellenwertsystems – 19
- 2.5 Gleichheitszeichen und Gleichung – 19

3 Testaufbau, Testdurchführung und Testauswertung – 21

- 3.1 Testaufbau – 21
- 3.2 Testdurchführung – 22
 - 3.2.1 Mengen – 23
 - 3.2.2 Zahlen – 24
 - 3.2.3 Zahlordnungen – 25
 - 3.2.4 Arithmetik – 28
 - 3.2.5 Sachaufgaben – 38
- 3.3 Testauswertung – 39

4 Empirische Erfahrungen – 41

Literatur – 45

Daten – 47

Abbildungen

Abbildung 1: Zuordnung: Zahlname, Zahlsymbol, Anzahl – 12

Abbildung 2: Anzahl und Abstraktion – 13

Abbildung 3: Reihenfolge der natürlichen Zahlen: Seriation um eins – 13

Abbildung 4: Logische Konsequenzen der Seriation um eins – 14

Abbildung 5: Logische Konsequenz: Zahlzerlegungen der 3 (drei) – 14

Abbildung 6: Anzahlvergleich vier und sechs – 15

1 Qualitative Lösungsprozessanalytische Diagnostik

Der Jenaer Rechentest (JRT) ist ein Einzeltestverfahren in vier Stufen – inhaltlich orientiert an den Klassenstufen 1 bis 4. Sein Untersuchungsgegenstand ist das basale Rechnen einschließlich seiner Voraussetzungen in der Zahlbegriffsentwicklung. Die Untersuchung erfolgt als **Analyse des subjektiven Verständnisses** für das Basisrechnen und dessen Grundlagen. Im Ergebnis entstehen einerseits detaillierte Aussagen zu den beim Probanden vorliegenden zahlenmathematischen Kompetenzen als Einsichten in die kardinale Logik von Zahlen und von Rechenoperationen sowie zu den rechenpraktischen Fertigkeiten des Probanden. Andererseits erfolgt eine genaue Profilierung von ggf. fehlenden, ungenügenden oder falschen Einsichten des Probanden sowie von vorliegenden Missverständnissen zu Zahlen und zum Rechnen mit ihnen.

1.1 Testmethodik

Der JRT ist ein lösungsprozessanalytisches Verfahren. Im Fokus stehen dabei die subjektiven Lösungsprozesse des Probanden, d.h. seine Überlegungen und Vorgehensweisen sowie seine Gedanken zu zahlenmathematischen Fragestellungen und beim Lösen von Rechenaufgaben. Seine Lösungsstrategien und Lösungsbegründungen werden erfasst und anschließend hinsichtlich des darin erkennbaren Wissens zu Zahlen und Rechenoperationen analysiert.

Dabei wird das subjektive Verständnis der Zahlenmathematik mit der arithmetischen Sachlogik auf den verschiedenen Ebenen des zahlenmathematischen Abstraktionsprozesses als objektivem Beurteilungskriterium verglichen. Die Fragen, ob jemand kompetent mit Zahlen umgeht und mit diesen kompetent rechnet, lassen sich mit Hilfe der Analyse seiner subjektiven Auffassungen zu Zahlen und zum Rechnen sowie der Analyse seiner darauf basierenden Vorgehensweisen beim Lösen von Aufgabenstellungen beurteilen. Diese können als mehr oder weniger stimmig bzw. unstimmig bezogen auf die Inhalte des logischen Systems der natürlichen Zahlen bewertet werden.

Aus dem subjektiven Verständnis der Zahlenmathematik folgen jeweils individuelle Vorgehensweisen und Lösungsprozesse für arithmetische Aufgabenstellungen. Liegen Einsichten in die begründende kardinale Zahlenlogik, in die sich daraus ableitenden abstrakt-quantitativen Beziehungen und in die Strukturen der dekadischen Zahlenordnung vor, werden diese beim Lösen von Rechenaufgaben auch genutzt. Die kardinale Zahlenlogik und alle sich daraus ableitenden Strukturen eröffnen dem Wissenden Vorteile beim Lösen von Rechenaufgaben – seien es kardinallogische Zahlbeziehungen bei Aufgaben wie $13 - 12$, bei deren Einsicht sich jeder gedankliche und rechnerische Aufwand verbietet; seien es die Strukturen des dekadischen Stellenwertsystems, die dem Einsichtigen vorteilhafte Zerlegungen beim Addieren und Subtrahieren mit Stellenwertübergang oder stellenwertbezogene Transfers bei Aufgaben wie $7 + 8 = 15$ und danach $17 + 8$ ermöglichen. Werden diese das Rechnen erleichternden Zusammenhänge nicht genutzt, so ist davon auszugehen, dass sie nicht erkannt wurden, also nicht bekannt sind. Das Vorgehen beim Lösen von Rechenaufgaben legt offen, welche Zusammenhänge und Strukturen dem Probanden bewusst und welche ihm nicht bewusst sind. So wie sich am Nutzen von kardinallogischen Zusammenhängen das Vorliegen der Einsicht in die begründende Logik nachweisen lässt, so verweisen die an Stelle von Wissen und Logik eingesetzten Ersatzstrategien beim Lösen nicht nur auf die zahlenmathematischen Wissensdefizite, sondern ebenso auf die subjektiv vorherrschende Auffassung zu Zahlen. Können z.B. Aufgaben nur zählend gelöst werden, weist dies zum einen auf das fehlende Verständnis von Zahlen als Zusammenfassung anderer Zahlen (bzw. abstrakter Einheiten) sowie auf die fehlende Schlussfolgerung hinsichtlich der Zerlegbarkeit dieser Zahlen in andere Zahlen hin. Damit sind Zahleigenschaften unverstanden, die aber für das Rechnen unerlässlich sind. Ist z.B. die Zahl 9 nicht als Zusammenfassung von 4 und 5 verstanden, können Fragen wie $4 + 5$ oder $9 - 4$ nicht logisch schließend beantwortet werden. Zum anderen verweist das Zählen auf ein Verständnis von Zahlen, welches diese nur als Teil der Zahlenreihe

denkt, die es beim Lösen von Rechenaufgaben vorwärts oder rückwärts abzuschreiten gilt. Wenn Aufgaben nur mit Hilfe schriftlicher Algorithmen gelöst werden – auch Aufgaben wie $21 - 19$, bei denen sich dies bei Einsicht in den kardinallogischen Zusammenhang der Zahlen verbietet –, dann verweist dies auf ein Verständnis von Zahlen als Ziffernfolgen, die es nach mechanisch eingeübten Regeln zu verarbeiten gilt. In beiden Fällen – beim Zählen und beim begriffslos mechanischen Abarbeiten von Algorithmen – liegt ein bloß nominelles Zahlverständnis zu Grunde. Zahlen werden dabei nicht hinsichtlich ihrer Werte und Wertbeziehungen gedacht, sondern als inhaltsleere Zeichen begriffen.

Die Analyse der Lösungsprozesse ist die methodische Grundlage des JRT – und sein Alleinstellungsmerkmal in der Rechentest-„Landschaft“. Seine Anwendung setzt auf Seiten des Testers zwei grundlegende Kenntnisbereiche voraus:

1. Der Tester muss selbst über **detaillierte zahlenmathematische Kenntnisse** sowie über grundlegende Kenntnisse zum Erlernen des Rechnens – hier **insbesondere über die hierarchisch aufeinander aufbauenden Lerninhalte** – verfügen. Nur auf dieser inhaltlichen Grundlage kann der Tester beurteilen, ob die Vorgehensweisen beim Lösen von Rechenaufgaben und die darin erkennbaren subjektiven Auffassungen des Probanden zu Zahlen und zum Rechnen mit den inhaltlichen Grundlagen und logischen Ableitungen der Zahlenmathematik übereinstimmen. (vgl. Kap. 2)
2. Der Tester muss zudem über **Kenntnisse zu möglichen Missverständnissen und Fehlauffassungen zu Zahlen und Rechenoperationen** sowie zu kompensatorischen Vorgehensweisen verfügen. **Rechenkompensationsmethoden** sind resultatsorientierte, auf schulischen Druck hin entstandene Strategien, die auf fehlerhaften Auffassungen vom Rechnen basieren. Mangelndes Zahlenwissen und Operationsverständnis bei einstelligen Zahlen lässt sich nur durch Auswendiglernen und Zählen kompensieren. Abhängig von der Aufgabenstellung bzw. dem mathematischen Lerninhalt besteht hier eine spezifische Begrenzung der kompensatorischen Verfahrenstechnik. Bei Einführung des dekadischen Systems und beim Rechnen mit zweistelligen Zahlen wird die Strategie des begriffs-

losen Auswendiglernens oder Zählens immer erfolgloser und muss durch die Anwendung begriffslos antrainierter algorithmischer zunächst Kopf-, dann schriftlicher Rechenverfahren sowie zugehöriger Regeln ersetzt bzw. (häufig widersprüchlich) ergänzt werden. Auch auf dieser erweiterten Stufe existiert eine Begrenzung möglicher kompensatorischer Verfahren. So entsteht im schulischen Anforderungsrahmen nicht nur sukzessive ein falsches mathematisches Bewusstsein, sondern falsche Begriffe führen auch zu typischen Lösungsproblematiken, -umständlichkeiten und -fehlern sowie zu falschen Erklärungen. Insofern das Entstehen der verschiedenen Rechenkompensationsmethoden in ihrem spezifischen und zugleich beschränkenden Zusammenhang bekannt ist, kann ausgehend vom Auftreten spezieller Kompensationsformen und von zugehörigen, aber nicht zwingend auftretenden Fehlern auf das Vorhandensein spezifischer inhaltlicher Verständnisdefizite resp. -fehler geschlossen werden. Wer Aufgaben wie $3 + 6$ oder $9 - 7$ zählt, hat die Wertbeziehungen in und zwischen den Zahlen nicht verstanden – die wesentliche Voraussetzung für das Rechnen; wer $49 + 51$ oder $800 - 798$ nach antrainierten Verfahren und Regeln schriftlich oder im Kopf algorithmisch lösen muss, hat das dekadische System, die Wertbeziehungen zwischen den dezimal strukturierten Zahlen und ggf. auch den operativen Bezug nicht richtig verstanden. Das Verständnis für das Entstehen spezifischer Kompensationsmethoden lässt somit Rückschlüsse auf ebenso spezifische Wissensdefizite bzw. Fehlauffassungen zu. Die Lösungsprozessanalyse nutzt diese Zusammenhänge, um richtiges/falsches mathematisches Bewusstsein zu analysieren (vgl. Kap. 3). Rechenkompensationsmethoden besitzen eine spezifische, beschränkte Symptomatik. Sie sind einerseits Ausdruck fehlenden zahlenmathematischen Wissens und andererseits eine rationale Reaktion auf schulische Anforderungen nach Produktion richtiger Resultate – trotz kumulierenden fehlenden Wissens. Dieses fehlende Wissen ist nicht Resultat irgendwie gearteter biologischer Defizite, sondern hat seinen Ursprung in einem Mathematikunterricht, der nicht den Notwendigkeiten des Rechnenlernens entspricht.