

Studien zur theoretischen und empirischen
Forschung in der Mathematikdidaktik

RESEARCH

Janina Krawitz

Vorwissen als nötige Voraussetzung und potentieller Störfaktor beim mathematischen Modellieren



Springer Spektrum

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gilbert Greefrath, Münster, Deutschland

Stanislaw Schukajlow, Münster, Deutschland

Hans-Stefan Siller, Würzburg, Deutschland

In der Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik – von der vorschulischen Bildung bis zur Hochschule – publiziert. Dabei kann eine Vernetzung innerhalb der Mathematikdidaktik sowie mit den Bezugsdisziplinen einschließlich der Bildungsforschung durch eine integrative Forschungsmethodik zum Ausdruck gebracht werden. Die Reihe leistet so einen Beitrag zur theoretischen, strukturellen und empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik im Zusammenhang mit der Qualifizierung von wissenschaftlichem Nachwuchs.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/15969>

Janina Krawitz

Vorwissen als nötige Voraussetzung und potentieller Störfaktor beim mathematischen Modellieren

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow

 Springer Spektrum

Janina Krawitz
Institut für Didaktik der
Mathematik und Informatik
Universität Münster
Münster, Deutschland

Dissertation Universität Münster, 2019

Erstgutachter: Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow
Zweitgutachter: Prof. Dr. Werner Blum
Tag der Disputation: 13.11.2019

D6

ISSN 2523-8604 ISSN 2523-8612 (electronic)
Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-29714-5 ISBN 978-3-658-29715-2 (eBook)
<http://doi.org/10.1007/978-3-658-29715-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

„Ich hoffe, das ist nichts mit π oder so. Das haben wir noch gar nicht gehabt. Also muss ich gleich noch mal gucken.“, denkt laut eine Schülerin über die Lösung, die sie bei der Aufgabe „Riesenrad“ entwickeln möchte. Dieses Zitat aus der Untersuchung von Frau Krawitz verdeutlicht, welche wichtige Rolle das Vorwissen bei der Bearbeitung von Aufgaben spielt. Das Vorwissen bestimmt häufig die Lösungswege, die wir beim Bearbeiten von Aufgaben einschlagen. Vom Vorwissen hängt der Bearbeitungserfolg maßgeblich ab. Daher verwundert es nicht, dass die Vermittlung und der Aufbau von Wissen schon immer eine zentrale Aufgabe der Schule und speziell des Mathematikunterrichts gewesen sind.

Aus den Alltagserfahrungen würde man intuitiv denken, dass der Zusammenhang zwischen Vorwissen und Leistungen nach dem Prinzip „Je mehr desto besser“ funktioniert. Allerdings ist es nicht geklärt, welches Wissen beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben notwendig ist und im Bearbeitungsprozess aktiviert werden kann. Gibt es Vorwissensarten, die unbedingt notwendig sind, um Modellierungsaufgaben zu lösen? Kann das Vorwissen unter Umständen sogar hinderlich sein, Schülerinnen und Schüler auf falsche Fahrten locken und in einer Sackgasse stehen lassen? Diese und andere Forschungsfragen hat Janina Krawitz in ihrer Arbeit *„Vorwissen als nötige Voraussetzung und potentieller Störfaktor beim Lösen mathematischer Modellierungsaufgaben“* bearbeitet.

Die Arbeit von Frau Krawitz beginnt mit einer Einleitung, in der sie auf die hohen Anforderungen an Schülerinnen und Schüler beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben eingeht, die Bedeutung des Vorwissens beim Modellieren herausstellt und auf ein diesbezügliches Forschungsdefizit verweist: *„Modellieren ist nicht zuletzt deshalb anspruchsvoll, da Vorwissen aus unterschiedlichen Bereichen miteinander verknüpft werden muss und demnach als Paradebeispiel für Wissensintegration gesehen werden kann. Bislang wurde diese besondere Herausforderung allerdings nicht systematisch untersucht.“*

Im theoretischen Teil der Arbeit verknüpft Frau Krawitz theoretische Konzeptionen und empirische Befunde aus unterschiedlichen Forschungsfeldern und Forschungstraditionen. Bei ihren Ausführungen greift sie zunächst auf kognitionspsychologische Konzeptionen wie die dual-process-Theorie, auf allgemein psychologische Befunde zu Priming und Inhibition sowie auf psychologische Studien zu S- und P-Problemen zurück. Die auf diese Weise gewonnenen theoretischen Erkenntnisse bezieht sie auf fachdidaktische Konzeptionen und auf Ergebnisse empirischer Untersuchungen aus dem Bereich Modellieren.

Die in der Einleitung dargelegte Relevanz des Themas wird durch diese Verknüpfung konkretisiert und die konstatierte Forschungslücke wird sehr überzeugend begründet. Neben den etablierten Taxonomien zu Wissensarten, wie z.B. konzeptuelles versus prozedurales Wissen, referiert Frau Krawitz auch neuere theoretische Ansätze etwa zur prozeduralen Flexibilität, die wichtige Impulse für die Entwicklung der Theorien des Lehrens und Lernens gegeben haben. Besonders interessant ist der Abschnitt über den hinderlichen Einfluss von Vorwissen auf Leistungen. Dieser zunächst scheinbar kontra-intuitive Befund wird sehr gut aufgearbeitet und bietet den Lesern eine hervorragende Möglichkeit, eigenes Wissen zu erweitern.

Für die Untersuchung ihrer Forschungsfragen hat Frau Krawitz die Methode der Inhaltsanalyse ausgewählt. Die Wahl dieser qualitativen Methode ist mit dem Anspruch begründet, bei der Analyse von Lösungsprozessen in die Tiefe zu gehen. Die aufwändige Datenerhebung und eine hochinferente Kodierung der Äußerungen von Schülerinnen und Schüler erlauben wichtige Beobachtungen und Schlussfolgerungen.

Ein zentrales Ergebnis der Arbeit ist, dass das situationsbezogene Wissen beim eigenen Vorstellen der Realsituation und beim Konstruieren eines Realmodells von besonders großer Bedeutung ist. Lücken im situationsbezogenen Wissen erschweren die Aufgabebearbeitung und behindern sie in einzelnen Fällen sogar. Ein weiterer wichtiger und neuer Befund ist das Aufzeigen von Stellen, an welchen das mathematische Vorwissen hinderlich ist. Solange Lernende eine Routine-Aufgabe bearbeiten, die mit ihren Erwartungen an das mathematische Wissen kongruent ist, haben sie kaum Schwierigkeiten. Eine zum vorhandenen und zuletzt erworbenen Wissen nicht kongruente Fragestellung kann aber große Probleme verursachen. Weiter zeigte sich in den Untersuchungen von Frau Krawitz, dass metakognitives Wissen von Schülerinnen und Schülern vergleichsweise selten aktiviert wurde. Auch hier spielt die Komplexität der Aufgabe und ihre Originalität eine große Rolle, denn das Monitoring wird vor allem in Situationen gebraucht, in denen das Ergebnis oder der Lösungsweg fraglich erscheinen.

Am Ende der Arbeit leitet Frau Krawitz aus ihren Ergebnissen vielfältige theoretische und praktische Implikationen ab. Eine dieser Implikationen ist, dass Modellierungsaufgaben unbedingt auch „*losgelöst vom aktuellen Unterrichtsthema*“ bearbeiten werden sollten. Insgesamt ist diese Arbeit sowohl für die Mathematikdidaktik als auch für die Praxis des Mathematikunterrichts bedeutsam und hilfreich.

Danksagung

Ich danke meinem Doktorvater Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow, der in zahlreichen Gesprächen die richtigen Fragen zu stellen wusste, mir bei Selbstzweifeln beiseite stand und diese Arbeit überhaupt erst ermöglicht hat.

Außerdem danke ich Prof. Dr. Werner Blum, der mich in die Welt der Mathematikdidaktik geführt hat. Sein kritischer Blick hat entscheidend zu der vorliegenden Arbeit beigetragen.

Ebenfalls danken möchte ich meinen Kollegen und Weggefährten, die mich durch die Zeit der Promotion begleitet und unterstützt haben.

Zusammenfassung

Beim mathematischen Modellieren treffen Mathematik und Realität in besonderer Weise aufeinander. Um erfolgreich modellieren zu können, muss mathematisches Wissen mit Wissen über Sachverhalte des realen Lebens verknüpft und sinnbringend zum Lösen eines Problems eingesetzt werden. An dieser Herausforderung des Modellierens scheitern viele Lernende, da sie entweder ihr mathematisches oder aber ihr Alltagswissen zur Lösung heranziehen und den jeweils anderen Bereich ausblenden. Vorangegangene Studien belegen diese Probleme. Zum einen neigen Lernende dazu, Alltagswissen bei der Bearbeitung realitätsbezogener Mathematikaufgaben zu ignorieren, was unrealistische Antworten nach sich zieht. Zum anderen zeigten Studien, dass Schülerinnen und Schüler von ihrem Alltagswissen zu einem übermäßigen Gebrauch von realitätsbezogenen Argumentationen verleitet werden können. Die Lernenden greifen dann beispielsweise auf Erfahrungswerte zurück, anstelle mathematische Überlegungen zu tätigen. Die Gründe für die unangemessene Nutzung des Vorwissens beim Modellieren sind jedoch bislang nicht hinreichend erforscht. An diesem Desiderat setzt die vorliegende Arbeit an. Im Untersuchungsfokus steht die Frage, welche Rolle unterschiedliche Arten von Vorwissen beim Modellieren spielen. Die Hauptziele der Arbeit sind, für das Modellieren bedeutende Wissensarten zu charakterisieren und herauszufinden, wie sich die Aktivierung verschiedenen Vorwissens auf den Bearbeitungserfolg auswirkt. Dafür wurden im Rahmen einer Laborstudie die Lösungsprozesse von 18 Lernenden der achten bis zehnten Jahrgangsstufe mit inhaltsanalytischen Methoden untersucht. Die Ergebnisse zeigen, dass die Lernenden ihr mathematisches Wissen häufig auf Grundlage der Oberflächenstruktur der Aufgabe aktivierten, wodurch falsche Lösungswege in Gang gesetzt und realitätsbezogene Überlegungen behindert wurden. Wissen über den realen Kontext der Aufgabe wurde von den Lernenden häufig auch dann nicht genutzt, wenn sie an sich über ausreichendes Vorwissen verfügten. Metakognitive Aktivitäten stellten sich als bedeutend heraus, um falsche Lösungswege zu erkennen, wurden allerdings nur sehr selten verwendet. Die Ergebnisse liefern Hinweise darauf, dass Aufgabenmerkmale wie im Text enthaltene Signalwörter, der Unterrichtskontext wie das zuletzt behandelte mathematische Thema, und fehlende Vorerfahrungen mit Modellierungsaufgaben, einen negativen Einfluss auf die Aktivierung adäquaten Vorwissens haben können. Zukünftige Studien sollten diese Faktoren systematisch untersuchen. Für die Unterrichtspraxis kann geschlussfolgert werden, dass die Aktivierung adäquaten mathematischen Wissens und die Verwendung metakognitiver Aktivitäten im Mathematikunterricht durch den Einsatz entsprechender Aufgaben gefördert werden sollte. Auch sollten Lernende stärker dazu angehalten werden, realitätsbezogenes Vorwissen zum Lösen von Mathematikaufgaben heranzuziehen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.....	1
I Theoretischer Teil	5
1 Vorwissen.....	5
1.1 Bedeutung des Vorwissens	5
1.2 Zum Begriff des Vorwissens.....	6
1.3 Klassifizierung von Wissen in verschiedene Wissensarten.....	7
1.3.1 Einteilung in deklaratives und prozedurales Wissen.....	8
1.3.2 Erweiterungen und Alternativen zu der Unterteilung in deklaratives und prozedurales Wissen.....	10
1.3.3 Klassifikation von Wissen als Analyseinstrument für die empirische Untersuchung	14
1.4 Klassifizierung von Wissen in verschiedene Wissensqualitäten.....	15
1.5 Repräsentation von Wissen	17
1.6 Hinderlicher Einfluss von Vorwissen	19
1.6.1 Einstellungseffekte	20
1.6.2 Fehlvorstellungen.....	23
1.7 Vorwissen und kognitive Flexibilität	26
1.7.1 Schlüsselmechanismen der Flexibilität - Erkenntnisse aus der kognitiven Psychologie	27
1.7.2 Kognitive Flexibilität in der Mathematik.....	32
1.7.3 Flexibilität und multiple Lösungen	34
1.7.4 Fehlende Flexibilität durch träges Wissen	36
2 Mathematisches Modellieren	38
2.1 Bedeutung des Modellierens.....	38
2.2 Der Modellierungsprozess	39
2.2.1 Modellierungsaktivitäten.....	40
2.2.2 Modellierungsaktivitäten bei der Aufgabe Riesenrad	42
2.2.3 Vor- und Nachteile des Modellcharakters des mathematischen Modellierens.....	44
3 Vorwissen und mathematisches Modellieren.....	46
3.1 Die Rolle der Wissensarten beim Modellieren.....	46

3.1.1	Situationsbezogenes Wissen.....	47
3.1.2	Konzeptuelles und prozedurales Wissen	52
3.1.3	Metakognitives Wissen	55
3.1.4	Zusammenspiel der verschiedenen Wissensarten beim Modellieren	61
3.2	Kognitive Flexibilität und mathematisches Modellieren	61
3.2.1	Ebene der Passung.....	62
3.2.2	Ebene der multiplen Lösungen.....	64
3.3	Theoretische Analyse der in der Untersuchung eingesetzten Modellierungsaufgaben.....	68
3.3.1	Aufgabe Windrad	69
3.3.2	Aufgabe Riesenrad	74
3.3.4	Zusammenfassung des Aufgabenvergleichs.....	76
4	Herleitung der Forschungsfragen und Ziele der Untersuchung	79
II	Methoden	83
5	Verortung der Untersuchung.....	83
6	Erhebungsmethode.....	85
6.1	Stichprobensampling	85
6.2	Beschreibung der Stichprobe	89
6.3	Konzeption der Untersuchungsaufgaben	90
6.3.1	Pilotierung der Vorversion der Aufgaben	91
6.4	Untersuchungsdesign	92
6.4.1	Ablauf der Untersuchung	92
6.4.2	Wiederholung der Kreisberechnung.....	94
6.4.3	Methode des Lauten Denkens	95
6.4.4	Durchführung von Interviews	99
7	Auswertungsmethode.....	100
7.1	Aufbereitung des Materials	100
7.2	Qualitative Inhaltsanalyse	102
7.2.1	Initiierende Textarbeit	104
7.2.2	Kategorienbildung.....	104
7.2.3	Kodierung.....	107
7.2.4	Analyse und Ergebnisdarstellung.....	109
8	Qualitätsüberprüfung.....	110
8.1	Auf die Reliabilität bezogene Gütekriterien.....	111

8.1.1	Intersubjektivität.....	112
8.1.2	Stabilität	114
8.2	Auf die Validität bezogene Gütekriterien	115
8.2.1	Augenscheinvalidität.....	116
8.2.2	Inhaltsvalidität.....	118
8.3	Weitere Gütekriterien.....	119
III	Darstellung der Ergebnisse	121
9	Aktivierung verschiedenen Vorwissens im Modellierungsprozess	121
9.1	Übersicht über das aktivierte Vorwissen.....	122
9.2	Situationsbezogenes Wissen	129
9.2.1	Aufgabe Windrad	129
9.2.2	Aufgabe Riesenrad	132
9.2.3	Vergleich zwischen den Aufgaben.....	137
9.3	Mathematisches Wissen	137
9.3.1	Aufgabe Windrad	138
9.3.2	Aufgabe Riesenrad	145
9.3.3	Vergleich zwischen den Aufgaben.....	154
9.4	Metakognitives Wissen	155
9.4.1	Aufgabe Windrad	156
9.4.2	Aufgabe Riesenrad	158
9.4.3	Vergleich zwischen den Aufgaben.....	161
9.4.4	Wissen über Modellierungsaufgaben	162
10	Flexibilität der Vorwissensaktivierung	164
10.1	Aufgabe Windrad.....	165
10.1.1	Analyse der Bearbeitungsmuster.....	165
10.1.2	Zusammenhang zwischen den Bearbeitungsmustern und den Hintergrundvariablen der Untersuchung	167
10.1.3	Erkennen verschiedener Lösungen.....	168
10.2	Aufgabe Riesenrad	168
10.2.1	Analyse der Bearbeitungsmuster.....	168
10.2.2	Zusammenhang zwischen den Bearbeitungsmustern und den Hintergrundvariablen der Untersuchung	170
10.2.3	Erkennen richtiger Lösungen	171
10.3	Vergleich zwischen den Aufgaben.....	172

11	Fallanalysen ausgewählter Fälle	173
11.1	Auswahl der Fälle	173
11.1.1	Aufgabe Windrad	173
11.1.2	Aufgabe Riesenrad	175
11.1.3	Zusammenlegung der Fallauswahl für beide Untersuchungs- aufgaben	176
11.2	Fallbeschreibungen und -analysen für die Aufgabe Windrad	176
11.2.1	Ben	176
11.2.2	Dennis	179
11.2.3	Hannes	181
11.2.4	Steffen	183
11.2.5	Tabea	185
11.3	Fallbeschreibungen und -analysen für die Aufgabe Riesenrad	187
11.3.1	Ben	187
11.3.2	Dennis	191
11.3.3	Hannes	195
11.3.4	Steffen	198
11.3.5	Tabea	200
11.4	Zusammenfassung der Analysen in Bezug auf die Forschungsfragen	203
11.4.1	Situationsbezogenes Wissen	203
11.4.2	Mathematisches Wissen	205
11.4.3	Metakognitives Wissen	207
11.4.4	Flexibilität der Vorwissensaktivierung (Forschungsfrage 4)	209
IV	Diskussion	211
12	Aktivierung verschiedenen Vorwissens im Modellierungsprozess	211
12.1	Aktivierung situationsbezogenen Wissens	211
12.1.1	Aktivierung des situationsbezogenen Wissens (→ Forschungsfrage 1)	212
12.1.2	Zusammenspiel zwischen situationsbezogenem Wissen und Modellierungsaktivitäten (→ Forschungsfrage 2)	214
12.1.3	Zusammenhang zwischen situationsbezogenem Wissen und Bearbeitungserfolg (→ Forschungsfrage 3)	214
12.2	Aktivierung mathematischen Wissens	215
12.2.1	Aktivierung des mathematischen Wissens (→ Forschungsfrage 1)	216

12.2.2	Zusammenspiel von mathematischem Wissen und Modellierungsaktivitäten (→ Forschungsfrage 2).....	219
12.2.3	Zusammenhang zwischen mathematischem Wissen und Bearbeitungserfolg (→ Forschungsfrage 3).....	220
12.3	Aktivierung metakognitiven Wissens	222
12.3.1	Aktivierung des metakognitiven Wissens (→ Forschungsfrage 1).....	222
12.3.2	Zusammenspiel zwischen metakognitivem Wissen und Modellierungsaktivitäten (→ Forschungsfrage 2).....	224
12.3.3	Zusammenhang zwischen metakognitivem Wissen und Bearbeitungserfolg (→ Forschungsfrage 3).....	225
13	Flexibilität der Vorwissensaktivierung	226
13.1	Analyse verschiedener Bearbeitungsmuster.....	227
13.2	Zusammenhang zwischen der Flexibilität und den Hintergrundvariablen.....	229
13.3	Erstellen eines zweiten Lösungswegs und Erkennen richtiger Lösungswege..	230
14	Stärken und Grenzen der Untersuchung	231
15	Fazit der Arbeit und Implikationen für Forschung und Praxis	233
	Literaturverzeichnis	239
	Anhang	257
A	Manual und Interviewleitfaden	257
B	Transkriptionssystem	262
C	Wiederholung der Kreisberechnung	263
D	Kategoriensystem.....	265
E	Kodiertes Beispiel-Transkript	270

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1.	Vergleichende Zusammenstellung der Klassifizierungen von Wissen in unterschiedliche Wissensarten.....	13
Tabelle 2.	Wasserumschütttaufgabe aus der Studie von Luchins (1942).....	21
Tabelle 3.	Anforderungen an das Vorwissen bei der Aufgabe Windrad.....	78
Tabelle 4.	Anforderungen an das Vorwissen bei der Aufgabe Riesenrad.....	78
Tabelle 5.	Einordnung der Ergebnisse des LGVT nach Schneider et al. (2007, S. 20).....	88
Tabelle 6.	Einordnung der Probanden in den Stichprobenplan.....	89
Tabelle 7.	Übersicht über die ausgewählten Teilnehmerinnen und Teilnehmer.....	90
Tabelle 8.	Dauer der Phasen der Laborsitzungen.....	94
Tabelle 9.	Kurzfassung des Kategoriensystems.....	106
Tabelle 10.	Übereinstimmung zwischen den Kodiererinnen und Kodierern.....	114
Tabelle 11.	Übereinstimmung zwischen den zwei Kodierzeitpunkten einer Kodiererin.....	115
Tabelle 12.	Verteilung der Sequenzen auf die Kategorien der Dimension ‚Modellierungsaktivitäten‘.....	116
Tabelle 13.	Verteilung der Sequenzen auf die Kategorien der Dimension ‚Vorwissen‘.....	117
Tabelle 14.	Verteilung der Sequenzen auf die Kategorien der Dimension ‚Bearbeitungserfolg‘.....	118
Tabelle 15.	Häufigkeitsverteilung der Sequenzen mit situationsbezogenem, mathematischem oder metakognitivem Wissen.....	122
Tabelle 16.	Fallübersicht zu den Lösungsprozessen der Aufgabe Windrad.....	125
Tabelle 17.	Fallübersicht zu den Lösungsprozessen der Aufgabe Riesenrad.....	127
Tabelle 18.	Zusammenhang zwischen der Aktivierung situationsbezogenen Wissens und dem Erstellen eines korrekten Realmodells bzw. der Richtigkeit der Lösung bei der Aufgabe Windrad.....	131
Tabelle 19.	Zusammenhang zwischen der Aktivierung situationsbezogenen Wissens und dem Erstellen eines korrekten Realmodells und der Richtigkeit der Lösung bei der Aufgabe Riesenrad.....	135
Tabelle 20.	Verteilung der Unterkategorien mathematischen Wissens bei der Aufgabe Windrad.....	138

Tabelle 21.	Aktivierung mathematischen Wissens vor dem ersten <i>Mathematisieren</i> oder <i>mathematischen Arbeiten</i>	141
Tabelle 22.	Zusammenhang zwischen dem vorwiegend aktivierten mathematischen Wissen und dem Bearbeitungserfolg bei der Aufgabe Windrad.....	142
Tabelle 23.	Verteilung der Unterkategorien mathematischen Wissens bei der Aufgabe Riesenrad	146
Tabelle 24.	Aktivierung mathematischen Wissens vor dem ersten <i>Mathematisieren</i> oder <i>Mathematisch Arbeiten</i>	148
Tabelle 25.	Zusammenhang zwischen dem vorwiegend aktivierten mathematischen Wissen und dem Bearbeitungserfolg bei der Aufgabe Riesenrad.....	152
Tabelle 26.	Zusammenhang zwischen metakognitivem Wissen und dem Erstellen eines korrekten Realmodells bzw. der Richtigkeit der Lösung bei der Aufgabe Windrad	157
Tabelle 27.	Zusammenhang zwischen Monitoringaktivitäten und dem Erstellen eines korrekten Realmodells bzw. der Richtigkeit der Lösung bei der Aufgabe Riesenrad	160
Tabelle 28.	Zusammenfassung der Selbstberichte der Lernenden zum Vorwissen über Aufgaben mit zusätzlichen Informationen.....	163
Tabelle 29.	Bearbeitungsmuster, die aus den verschiedenen Abfolgen mathematischen Wissens gebildet wurden	165
Tabelle 30.	Bearbeitungsmuster zur Aktivierung mathematischen Wissens bei der Aufgabe Windrad.....	166
Tabelle 31.	Zusammenhang zwischen den Bearbeitungsmustern und dem Bearbeitungserfolg bei der Aufgabe Windrad	167
Tabelle 32.	Zusammenhang zwischen den Bearbeitungsmustern bei der Aufgabe Windrad und den Hintergrundvariablen ‚Mathematische Fähigkeiten‘ und ‚Leseverständnis‘	167
Tabelle 33.	Bearbeitungsmuster zum mathematischen Wissen bei der Aufgabe Riesenrad	169
Tabelle 34.	Zusammenhang zwischen dem Bearbeitungsmuster und dem Bearbeitungserfolg bei der Aufgabe Riesenrad	170
Tabelle 35.	Zusammenhang zwischen den Bearbeitungsmustern bei der Aufgabe Riesenrad und den Hintergrundvariablen ‚Mathematische Fähigkeiten‘ und ‚Leseverständnis‘	170
Tabelle 36.	Gruppen (Aktiviertes Wissen x Bearbeitungserfolg) bei der Aufgabe Windrad	174

Tabelle 37.	Verteilung der Lernenden auf die Gruppen (Aktiviertes Wissen x Bearbeitungserfolg) bei der Aufgabe Windrad.....	174
Tabelle 38.	Gruppen (Aktiviertes Wissen x Bearbeitungserfolg) bei der Aufgabe Riesenrad	175
Tabelle 39.	Verteilung der Lernenden auf die Gruppen (Aktiviertes Wissen x Bearbeitungserfolg) bei der Aufgabe Riesenrad.....	175

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1.	Eigene Übersetzung der Aufgabe Smalltown aus Hinsley et al.	22
Abbildung 2.	Numerische Stroop-Aufgaben nach Besner und Coltheart (1979).....	30
Abbildung 3.	Abbildung aus Tipper. Beispiele der verwendeten Primes und Probes.....	31
Abbildung 4.	Modellierungskreislauf von Blum und Leiß	39
Abbildung 5.	Aufgabe Riesenrad.....	42
Abbildung 6.	Realmodell zu der Aufgabe Riesenrad.....	43
Abbildung 7.	Mathematisches Modell zu der Aufgabe Riesenrad.....	43
Abbildung 8.	Individuelle Modellierungsprozesse zweier Schüler, die zusammen eine Modellierungsaufgabe gelöst haben aus Borromeo Ferri.....	46
Abbildung 9.	Erweiterung des Modellierungskreislaufs von Borromeo Ferri.....	48
Abbildung 10.	Aufgabe Windrad.....	66
Abbildung 11.	Illustration verschiedener Realmodelle der Aufgabe Windrad.....	68
Abbildung 12.	Aufgabe Windrad.....	69
Abbildung 13.	Abschätzung Kreisumfang durch ein einbeschriebenes und umbeschriebenes Quadrat	72
Abbildung 14.	Aufgabe Riesenrad.....	74
Abbildung 15.	Illustration eines Realmodells der Aufgabe Riesenrad	74
Abbildung 16.	Vorversion der Aufgaben, eingesetzt im Rahmen einer Pilotierung.....	91
Abbildung 17.	Versuchsaufbau einer Laborsitzung.....	93
Abbildung 18.	Ablauf der Untersuchung.....	93
Abbildung 19.	Exemplarische Sequenz für die Zuordnung des stimulated recall zur Aufgabenbearbeitung (Transkriptausschnitt).....	101
Abbildung 20.	Ablaufschema der qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz.....	103
Abbildung 21.	Anzahlen der Sequenzen und Fälle, in denen Vorwissen der drei fokussierten Wissensarten aktiviert wurde.....	124
Abbildung 22.	Verteilung der Sequenzen mit korrektem und lücken- oder fehlerhaftem situationsbezogenem Wissen auf die Modellierungsaktivitäten	133

Abbildung 23.	Vergleich der Aufgaben bezüglich der Anzahl von Sequenzen und Fällen, in denen situationsbezogenes Wissen aktiviert wurde	137
Abbildung 24.	Verteilung des mathematischen Wissens auf die Modellierungsaktivitäten bei der Aufgabe Windrad.....	140
Abbildung 25.	Ausschnitt aus Dennis' Lösung der Aufgabe Windrad.....	143
Abbildung 26.	Ausschnitt aus Ritas Lösung der Aufgabe Windrad	144
Abbildung 27.	Ausschnitt aus Bens Lösung der Aufgabe Windrad.....	144
Abbildung 28.	Ausschnitt aus Carmens Lösung der Aufgabe Windrad	144
Abbildung 29.	Verteilung des mathematischen Wissens auf die Modellierungsaktivitäten bei der Aufgabe Riesenrad	148
Abbildung 30.	Lösung der Aufgabe Riesenrad von Nils	153
Abbildung 31.	Vergleich der Aufgaben bezüglich der Anzahl von Sequenzen, in denen mathematisches Wissen aktiviert wurde	154
Abbildung 32.	Vergleich der Aufgaben bezüglich der Anzahl von Fällen, in denen mathematisches Wissen aktiviert wurde	155
Abbildung 33.	Vergleich der Aufgaben bezüglich der Bearbeitungsmuster.....	172
Abbildung 34.	Lösung der Aufgabe Windrad von Ben.....	178
Abbildung 35.	Lösung der Aufgabe Windrad von Dennis.....	180
Abbildung 36.	Lösung der Aufgabe Windrad von Hannes.....	182
Abbildung 37.	Lösung der Aufgabe Windrad von Steffen	184
Abbildung 38.	Lösung der Aufgabe Windrad von Tabea	186
Abbildung 39.	Lösung der Aufgabe Riesenrad von Ben.....	189
Abbildung 40.	Lösung der Aufgabe Riesenrad von Dennis.....	193
Abbildung 41.	Lösung der Aufgabe Riesenrad von Hannes	197
Abbildung 42.	Lösung der Aufgabe Riesenrad von Steffen	199
Abbildung 43.	Lösung der Aufgabe Riesenrad von Tabea	202



Einleitung

Mathematik kann dabei helfen, Probleme und Phänomene des Lebens besser zu verstehen und letztendlich auch Lösungsstrategien zu entwickeln. Trotzdem ist sie oft ungeliebt, wird als abgehoben empfunden und sogar abgelehnt. Die große Bedeutung, die Mathematik für das Leben hat, wird von vielen Lernenden nicht erkannt. Dementsprechend scheint eines der wesentlichen Ziele des Mathematikunterrichts häufig nicht erreicht zu werden, nämlich Schülerinnen und Schüler zu befähigen „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ (Winter, 1995, S. 37). Um diesem Missstand entgegenzuwirken, müssen Realitätsbezüge in den Mathematikunterricht integriert werden. Zentraler Bestandteil eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts ist das mathematische Modellieren, das sich durch Übersetzungsprozesse zwischen der Realität und der Mathematik auszeichnet.

Beim mathematischen Modellieren handelt es sich um eine durchaus anspruchsvolle Tätigkeit, die vielen Schülerinnen und Schülern schwerfällt (Blum, 2007). Die Schwierigkeiten betreffen kognitive, metakognitive und affektive Bereiche. In der vorliegenden Arbeit werden kognitive und metakognitive Aspekte betrachtet, die sich auf die Aktivierung und Verknüpfung von Vorwissen beziehen. Affektive Aspekte werden aufgrund des Untersuchungsfokus nur am Rand erwähnt. Auf kognitiver Ebene ist eine Herausforderung des Modellierens, dass Lernende zwischen einer ‚mathematischen‘ und einer ‚realitätsbezogenen Perspektive‘ wechseln müssen. Dabei wird mathematisches Wissen mit Alltagswissen oder Wissen aus anderen Domänen in Beziehung gesetzt. Empirisch zeigt sich, dass dies vielen Schülerinnen und Schülern nicht gelingt, wobei zwei gegensätzliche Bearbeitungsmuster in Studien dokumentiert wurden:

1. Lernende fokussieren in ihren Lösungsprozessen einen mathematischen Inhalt und ignorieren ihr realitätsbezogenes Wissen, obwohl dieses zur Lösung des Problems nötig wäre.
2. Lernende machen übermäßigen Gebrauch von ihrem realitätsbezogenen Wissen und vernachlässigen dafür die mathematischen Aspekte der Aufgabe.

Das erste Bearbeitungsmuster wurde im Rahmen der Forschung zu realitätsbezogenen Textaufgaben auf eindrucksvolle Weise in einer Vielzahl von quantitativen Studien nachgewiesen (eine Übersicht findet sich in Verschaffel, Greer & De Corte, 2000). Dies führt zu der Vermutung, dass sich die Aktivierung mathematischen Wissens negativ auf den

Einbezug realitätsbezogenen Wissens auswirkt. Beispiele für das zweite Bearbeitungsmuster finden sich in Fallanalysen. Dort zeigte sich, dass Lernende von ihrem Alltagswissen zu unangemessenen Argumentationen verleitet werden. Diese Schülerinnen und Schüler gaben zum Beispiel eigene Erfahrungswerte aus der realen Welt als Lösung des Problems an, anstatt dass sie mathematische Überlegungen tätigten (Boaler, 1994; Cooper & Dunne, 1998; Gravemeijer, 1994). Alltagswissen kann demnach von den mathematischen Strukturen der Aufgabe ablenken und die Aktivierung mathematischen Wissens behindern.

Demnach scheint die Aktivierung von mathematischem und realitätsbezogenem Wissen in einem Spannungsverhältnis zu stehen, was sich auch auf metakognitive Anforderungen des Modellierens auswirkt. Die Passung der mathematischen und der realitätsbezogenen Perspektive muss durch metakognitive Aktivitäten überprüft und die kognitiven Prozesse müssen überwacht werden. Auch empirisch hat sich metakognitives Wissen, wie Wissen über das Modellieren selbst und über modellierungsrelevante Strategien, als relevanter Faktor für den Erfolg beim Modellieren erwiesen (Maaß, 2007; Rellensmann, Schukajlow & Leopold, 2017).

Modellieren ist nicht zuletzt deshalb anspruchsvoll, da Vorwissen aus unterschiedlichen Bereichen miteinander verknüpft werden muss und demnach als Paradebeispiel für Wissensintegration gesehen werden kann. Bislang wurde diese besondere Herausforderung allerdings nicht systematisch untersucht.

Fragestellungen der Arbeit

Ausgehend von der eben dargelegten Forschungslücke sind die drei leitenden Fragestellungen der vorliegenden Arbeit:

1. Wie lassen sich unterschiedliche Arten von Vorwissen charakterisieren, die für mathematisches Modellieren als relevant angesehen werden können?

Die Beantwortung der ersten Fragestellung dient der Theorieentwicklung. Das Ziel besteht darin, Arten von Vorwissen, die für das Modellieren bedeutend sind, auf theoretischer Ebene zu beschreiben. Dafür werden etablierte Klassifikationen des Wissens aus der pädagogischen Psychologie herangezogen und in Bezug auf das Modellieren diskutiert. Die Charakterisierung relevanter Wissensarten bildet die Grundlage für die anschließende empirische Untersuchung.

2. Inwiefern beziehen Lernende unterschiedliche Arten von Vorwissen in ihre Modellierungsprozesse ein?

Im Rahmen der zweiten Fragestellung wird der Einbezug verschiedenen Vorwissens beim Modellieren deskriptiv dargelegt. Dies erfolgt durch eine empirische Untersuchung, in der 18 Lernende Modellierungsaufgaben in einer Laborsituation bearbeiten. Die theoretischen Überlegungen werden somit empirisch überprüft und durch den inhaltsanalytischen Zugang erweitert.

3. Inwiefern lassen sich Zusammenhänge zwischen dem Einbezug unterschiedlichen Vorwissens und dem Erfolg der Aufgabebearbeitung beim Modellieren ableiten?

Die dritte Fragestellung zielt darauf ab, Hypothesen über die Rolle verschiedenen Vorwissens beim Modellieren zu generieren. Dafür wird auf der Grundlage der empirischen Ergebnisse der Zusammenhang zwischen der flexiblen Aktivierung verschiedenen Vorwissens und dem Bearbeitungserfolg beim Modellieren analysiert. Die resultierenden Hypothesen werden nicht im Rahmen der vorliegenden Studie überprüft, sondern bedürfen weiterführender Untersuchungen. Dennoch können sie richtungsweisende Hinweise liefern.

Aufbau der Arbeit

Die Arbeit setzt sich theoretisch und empirisch mit der Rolle des Vorwissens beim mathematischen Modellieren auseinander. Die beiden Themengebiete ‚Vorwissen‘ und ‚mathematisches Modellieren‘ bilden die zentralen Bausteine des **theoretischen Teils (Teil I)**. Die Ausführungen zum Vorwissen (Kapitel 1) enthalten eine begriffliche Einordnung und eine theoretische Analyse der verschiedenen Facetten von Wissen. Anhand von theoretischen Überlegungen und empirischen Befunden der Kognitionspsychologie sowie der Mathematikdidaktik wird die Frage erörtert, unter welchen Umständen sich Vorwissen hinderlich auswirken kann. In diesem Kontext ist auch die Flexibilität der Wissensaktivierung relevant, die im letzten Abschnitt des ersten Kapitels thematisiert wird. Das zweite Kapitel ist dem Themenkomplex des mathematischen Modellierens gewidmet. In diesem wird die Bedeutung des Modellierens erörtert und die Rolle verschiedener Modellierungsaktivitäten am Beispiel von einer der Untersuchungsaufgaben beschrieben. Anschließend werden in Kapitel 3 die Themenkomplexe des Vorwissens und des mathematischen Modellierens zusammengeführt, indem die zuvor herausgearbeiteten Aspekte des Vorwissens in Bezug auf ihre Bedeutung für das Modellieren diskutiert und mit bestehenden empirischen Befunden abgeglichen werden. Aus diesen Ausführungen werden in Kapitel 4 die Forschungsfragen der Untersuchung abgeleitet und begründet.

Im **methodischen Teil (Teil II)** wird die vorliegende Untersuchung als empirisch-qualitative Exploration im Feld der Forschungsmethoden verortet (Kapitel 5). Anschließend werden die Erhebungs- und die Auswertungsmethode in Kapitel 6 und 7 dargelegt. Ein

besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der qualitativen Inhaltsanalyse. Der methodische Teil schließt mit einer Qualitätsüberprüfung ab, in der die Untersuchung im Hinblick auf die Erfüllung von Gütekriterien diskutiert wird (Kapitel 8).

Im **Ergebnisteil (Teil III)** werden die Antworten auf die Forschungsfragen dargestellt. Analysiert wird, welche Rolle das Vorwissen der Lernenden in deren Modellierungsprozessen spielt (Kapitel 9) und wie flexibel diese bei der Aktivierung des Vorwissens sind (Kapitel 10). Anschließend werden die Befunde im Rahmen von exemplarischen Fallanalysen validiert und durch Analysen auf der Mikroebene ergänzt (Kapitel 11).

Die Ergebnisse werden in der **Diskussion (Teil IV)** vor dem Hintergrund der theoretischen Überlegungen aus Teil I besprochen (Kapitel 12 und 13). Dabei wird auch auf Stärken und Grenzen der vorliegenden Untersuchung (Kapitel 14) eingegangen und es werden Schlussfolgerungen für Forschung sowie Praxis (Kapitel 15) abgeleitet.



I Theoretischer Teil

Im theoretischen Teil werden die für die Arbeit maßgeblichen Themengebiete Vorwissen und mathematisches Modellieren dargelegt und miteinander verknüpft. Dazu werden sowohl der mathematikdidaktische Diskurs als auch Befunde aus der pädagogischen und kognitiven Psychologie erörtert. Ziele sind zum einen die Theorieentwicklung unter der Leitfrage: „Wie lassen sich unterschiedliche Arten von Vorwissen charakterisieren, die für mathematisches Modellieren als relevant angesehen werden können?“ und zum anderen das Erstellen einer theoretischen Grundlage für den empirischen Teil der Arbeit.

1 Vorwissen

1.1 Bedeutung des Vorwissens

„If I had to reduce all educational psychology to just one principle, I would say this: The most important single factor influencing learning is what the learner already knows. Ascertain this and teach him accordingly.“ (Ausubel, 1968, S. VI)

Seit vielen Jahren beschäftigt sich die pädagogische Psychologie mit der Frage, welche Faktoren Einfluss auf die Leistung von Lernenden nehmen. Einer der wichtigsten Faktoren ist das Vorwissen der Lernenden (Ausubel, 1968; Kintsch, 1988; Weinert, 1996). Ein Hauptergebnis der Expertise-Forschung ist, dass sich Experten gegenüber Novizen dadurch auszeichnen, dass sie über eine große, gut organisierte, flexibel zugängliche und domänenspezifische Wissensbasis verfügen können (De Corte, Greer & Verschaffel, 1996, S. 504). Eine der ersten Expertise-Studien, die besonders viel Aufmerksamkeit erhielt, ist jene von Chi (1978). In dieser Studie konnte die Bedeutung des Vorwissens durch einen Vergleich von Kinder-Experten mit erwachsenen Novizen belegt werden. Untersucht wurden die Leistung des Erinnerns von Zahlenreihen sowie die Rekonstruktion kurzzeitig präsentierter Schachstellungen von Kindern mit Schach Vorwissen (Schach-Experten) und Erwachsenen ohne Schach Vorwissen (Schach-Novizen). Die Kinder konnten die Schachstellungen besser rekonstruieren, obwohl sie wie erwartet beim Erinnern von Zahlenreihen schlechter als die Erwachsenen abschnitten. Die bessere Memorierungsleistung der Schachstellungen weist darauf hin, dass Vorwissen nicht nur für die Leistung, sondern auch für den Erwerb weiteren Wissens entscheidend ist. Das Vorwissen gilt sogar als einer der stärksten Prädiktoren für den Lernerfolg (Dochy,

Segers & Buehl, 1999; Jonassen & Grabowski, 1993; Krause & Stark, 2006). Je besser die Basis von vorhandenen Wissensstrukturen ist, auf die Lernende zurückgreifen können, desto eher können neue Informationen verknüpft werden. Eine gut strukturierte und vernetzte Wissensbasis ist die Voraussetzung für eine erfolgreiche Integration neuer Informationen in schon vorhandene Wissensstrukturen. Als Implikation für das schulische Lernen folgt daraus, dass vernetzte Wissensstrukturen bereits früh im Lernprozess aufgebaut werden sollten und kontinuierlich an ihrer Entwicklung gearbeitet werden sollte (Gruber & Renkl, 2000).

Diese Ausführungen zeigen, dass das Vorwissen eine unserer wichtigsten kognitiven Ressourcen ist. Allerdings ist nicht davon auszugehen, dass relevantes Vorwissen immer automatisch aktiviert wird. In manchen Fällen muss die Aktivierung von Vorwissen absichtlich, strategisch oder von außen, zum Beispiel durch die Lehrperson, angestoßen werden (Krause & Stark, 2006). Außerdem ist es möglich, dass Vorwissen zwar automatisch aktiviert wird, aber in bestimmten Situationen gar nicht relevant ist. Dies kann dazu führen, dass sich Vorwissen sogar hinderlich auswirkt (siehe Abschnitt 1.6). Entscheidend ist demzufolge nicht nur das theoretische Vorhandensein von Vorwissen, sondern die tatsächliche Aktivierung sowie die Passung zwischen dem aktivierten Vorwissen und den Erfordernissen einer Situation (siehe Abschnitt 1.7).

1.2 Zum Begriff des Vorwissens

Der Begriff des Vorwissens kann als Spezifizierung des Wissensbegriffs verstanden werden, wobei der Präfix ‚Vor‘ impliziert, dass Aktivitäten stattfinden, die zu einer Bereicherung des Wissens führen oder einen Zugriff auf bestehendes Wissen erfordern (Dochy & Alexander, 1995, S. 227 f.; Krause & Stark, 2006). Wissen wird hier in Anlehnung an Weinert (1986, S. 102) verstanden als geordneter Aufbau der im Gedächtnis gespeicherten Informationen mit der darin enthaltenen Möglichkeit ihrer Nutzung in unterschiedlichen Lebenssituationen. Da es sich beim Vorwissen um ein facettenreiches und komplexes Konstrukt handelt, ist es nötig, spezifische Eigenschaften des Vorwissens zu betrachten. Dies leistet die häufig zitierte Definition von Dochy und Alexander (1995, S. 227 f.), indem sie eine Differenzierung verschiedener Wissensfacetten enthält und die Multidimensionalität des Konstrukts betont. Vorwissen ist den Autoren zufolge das gesamte Wissen einer Person, das:

- a) dynamisch ist (Abschnitt 1.7.4),
- b) vor der Bearbeitung einer Lernaufgabe zur Verfügung steht,
- c) strukturiert ist (Abschnitt 1.4),
- d) in unterschiedlichen Formen vorliegt (zum Beispiel deklarativ und prozedural) (Abschnitt 1.3),

- e) zum Teil explizit und zum Teil implizit ist (Abschnitt 1.4) und
- f) konzeptuelle und metakognitive Komponenten umfasst (Abschnitt 1.3).

Der Punkt a) betont den dynamischen Charakter des Konstrukts. Die innere Wissensstruktur eines Individuums ist nicht statisch, sondern verändert sich durch die ständige Interaktion mit äußeren Gegebenheiten (Dochy & Alexander, 1995). Der Punkt b) legt den Zeitpunkt fest, zu dem das Vorwissen eines Individuums betrachtet wird. Durch diesen Aspekt wird Vorwissen als spezifische Form von Wissen gefasst. Der Punkt c) bezieht sich auf die Strukturkomponente des Vorwissens. Wissenskomponenten können stark vernetzt oder kompartimentalisiert als ‚Wissensinseln‘ vorliegen (Gruber & Renkl, 2000). Der Punkt d) verweist auf das Vorhandensein unterschiedlicher Wissensarten, wie zum Beispiel deklaratives und prozedurales Wissen. Die Bewusstheitsdimension des Konstrukts wird in Punkt e) dargestellt. Explizites Wissen ist bewusst und kann verbalisiert und aktiviert werden, während implizites Wissen unbewusst ist und zumeist automatisiert aktiviert wird und nicht verbalisiert werden kann (Krause & Stark, 2006; Reber, 1993). Der letzte Punkt f) weist auf konzeptuelle und metakognitive Komponenten von Wissen hin. Konzeptuelles Wissen wird von Dochy und Alexander (1995) als Wissen über Konzepte verstanden, das in unterschiedlichen Arten vorliegen kann (siehe Punkt d)). Metakognitives Wissen meint das Wissen über die eigene Kognition und wird in der vorliegenden Arbeit ebenfalls als eigene Wissensart betrachtet (Abschnitt 1.3).

In der aktuellen Bildungsdiskussion wird häufig von Kompetenzen, der verständigen Anwendung von Wissen, anstelle von Wissen gesprochen wird. Dies kommt durch Bildungsreformen, die weltweit in vielen Ländern, darunter auch Deutschland, stattgefunden haben (KMK, 2004; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Begrifflich wird dadurch die Anwendbarkeit von Wissen in gewissen Problemsituationen in den Vordergrund gestellt. In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff Wissen verwendet, wobei dieser hier Aspekte wie die verständige Anwendung von Wissen beinhaltet (Weinert, 1986). Die unterschiedlichen Facetten von Wissen werden durch die Analyse verschiedener Wissensarten (Abschnitt 1.3) und Wissensqualitäten berücksichtigt (Abschnitt 1.4).

1.3 Klassifizierung von Wissen in verschiedene Wissensarten

„No profound generalizations can be made about memory as a whole, but general statements about particular kinds of memory are perfectly possible.“ (Tulving, 1985, S. 385)

Dieser Abschnitt greift zwei Punkte der Definition von Vorwissen nach Dochy und Alexander (1995, S. 227 f.) auf: Vorwissen liegt in unterschiedlichen Formen vor und umfasst konzeptuelle und metakognitive Komponenten. Die unterschiedlichen Formen

und Komponenten von Vorwissen können durch eine Klassifikation von Wissen¹ in mehrere Wissensarten näher charakterisiert werden. Die Unterscheidung verschiedener Wissensarten ermöglicht eine differenzierte Analyse der Art des Vorwissens, das die Lernenden an bestimmten Stellen während der Lösungsprozesse aktivieren.

In der Literatur findet sich eine Vielzahl von Wissensklassifikationen, die sich zum Teil deutlich unterscheiden. Im Folgenden wird zunächst ein kurzer Überblick über das Forschungsfeld gegeben (Abschnitt 1.3.1). Anschließend werden relevante Klassifikationen vergleichend gegenübergestellt (Abschnitt 1.3.2) und der eigene Standpunkt abgeleitet (Abschnitt 1.3.3). Das Ziel dabei ist, eine zum Forschungsvorhaben passende Klassifikation von Wissensarten herauszuarbeiten, die im weiteren Verlauf der Arbeit auf das Modellieren übertragen wird (Abschnitt 3.1) und letztendlich das Kategoriensystem der empirischen Untersuchung liefert (Abschnitt 7.2.2).

Anzumerken ist, dass, obwohl die Einteilung von Wissen in Wissensarten weit verbreitet ist, Positionen bestehen, die diese kritisieren. So wird in der Forschungstradition der ‚situated cognition‘ Wissen als situationsbezogenes, wandelbares Konstrukt und nicht als kognitive Entität aufgefasst (Cobb & Bowers, 1999). Wissen existiert demzufolge nicht unabhängig von Situationen, was eine theoretische Klassifikation von Wissen grundsätzlich in Frage stellt (Greeno, 1999).

In der vorliegenden Arbeit wird die Position vertreten, dass eine theoretische Einteilung von Wissen in Wissensarten sinnvoll ist. Aus diesem Grund werden trotz der Kritik der ‚situated cognition‘ Klassifikationen von Wissen aus der Literatur vorgestellt und als Grundlage für die Auswertung der empirischen Untersuchung verwendet. Dadurch wird eine differenzierte Analyse, wie unterschiedliches Vorwissen die Aufgabenbearbeitung beeinflusst, ermöglicht. Die Kritik der ‚situated cognition‘ ist trotzdem ernst zu nehmen und weist darauf hin, dass der Kontext eine wichtige Rolle bei dem Erwerb und der Aktivierung von Wissen spielt. Diesem Aspekt wird in Abschnitt 1.7.4 *Wissenstransfer* Rechnung getragen.

1.3.1 Einteilung in deklaratives und prozedurales Wissen

In der pädagogischen Psychologie ist eine Zweiteilung in die Wissensarten deklaratives und prozedurales Wissen weit verbreitet (Schneider, M., 2006). **Deklaratives Wissen** meint dabei Wissen über Fakten und Begriffe sowie die Bedeutungen von Symbolen einer

¹ Der Begriff Wissen umfasst auch das Vorwissen. Sprachlich wird hier vereinfachend nur von Wissensarten und nicht von Vorwissensarten gesprochen.

Domäne (,Wissen, dass‘). **Prozedurales Wissen** hingegen ist Verfahrenswissen und bezieht sich auf das Können der Lernenden (,Wissen, wie‘). Darunter fällt Wissen über Prozeduren (zum Beispiel Techniken, Algorithmen, Methoden) (Anderson, L. W. et al., 2001) und Wissen über Handlungen, die zur Aufgabelösung führen (De Jong & Ferguson-Hessler, 1996).

„Declarative knowledge refers to factual information (knowing what), whereas procedural knowledge is the compilation of declarative knowledge into functional units that incorporate domain-specific strategies (knowing how).“ (Alexander & Judy, 1988, S. 376)

Wo genau die Grenze zwischen deklarativem und prozeduralem Wissen verläuft, wird von verschiedenen Autoren unterschiedlich definiert. So werden verbalisierbare Prozesse von manchen Autoren zum prozeduralen Wissen gezählt (De Jong & Ferguson-Hessler, 1996), während andere Autoren von vornherein ausschließen, dass prozedurales Wissen verbalisiert werden kann (Anderson, J. R. & Lebiere, 1998). Bei einigen Klassifikationen wird der Begriff des prozeduralen Wissens weiter ausdifferenziert. Hiebert (1986) unterteilt prozedurales Wissen in zwei Unterkategorien:

- Wissen über die formale Sprache der Mathematik
- Wissen über Vorgehensweisen, Algorithmen und Regeln

Anderson et al. (2001) hingegen unterscheiden drei Unterkategorien prozeduralen Wissens:

- Wissen über fachspezifische Fertigkeiten und Algorithmen (zum Beispiel Handlungswissen über Berechnungen mit dem Dreisatz)
- Wissen über fachspezifische Techniken und Methoden (zum Beispiel Wissen über verschiedene Beweismethoden, wie die des direkten und indirekten Beweises)
- Wissen über Kriterien zur Anwendung von Verfahren (zum Beispiel proportionale Zuordnung als Voraussetzung für die Anwendung des Dreisatzes)

Rittle-Johnson, Siegler und Alibali (2001) weisen darauf hin, dass bei der Definition prozeduralen Wissens als Handlungswissen die beiden Elemente Wissen und Handlungen nicht gleichzusetzen sind. Wenn ein Individuum nicht handelt, impliziert das noch nicht, dass es über kein prozedurales Wissen verfügt, da mehrere Faktoren, wie zum Beispiel Volition, Einfluss auf Handlungen ausüben.

1.3.2 Erweiterungen und Alternativen zu der Unterteilung in deklaratives und prozedurales Wissen

Viele Autoren erweitern die Zweiteilung in deklaratives und prozedurales Wissen um weitere Wissensarten (unter anderen die Autoren Anderson, L. W. et al., 2001; De Jong & Ferguson-Hessler, 1996; Jonassen, Beissner & Yacci, 1993).

Häufig wird dabei die Vernetzung von Wissen als wichtiges Merkmal von Wissen hervorgehoben und als unterscheidendes Merkmal zwischen Wissensarten verwendet. So fassen Jonassen et al. (1993) das Wissen darüber, wie die Konzepte einer Domäne zusammenhängen, als separate Wissensart auf, das **Strukturwissen**. Das Strukturwissen wird als Mediator betrachtet, der zwischen deklarativem und prozeduralem Wissen vermittelt (Jonassen et al., 1993). Die Bedeutung der Struktur von Wissen korrespondiert mit der Strukturkomponente (c) der obigen Definition von Vorwissen (Dochy & Alexander, 1995) und wird in Abschnitt 1.4 vertieft. Andere Autoren sehen eine vernetzte Struktur als Merkmal für **konzeptuelles Wissen**, während prozedurales Wissen an spezifische Probleme gebunden ist (Anderson, L. W. et al., 2001; Hiebert, 1986; Rittle-Johnson et al., 2001). Genauer definieren Anderson et al. (2001) konzeptuelles Wissen als das Wissen über die Zusammenhänge zwischen Wissens-elementen. Konzeptuelles Wissen ermöglicht den Autoren zufolge das Zusammenspiel einzelner Wissens-elemente innerhalb einer größeren Struktur. Aus kognitionspsychologischer Sicht sind dies mentale Modelle, Schemata oder Theorien (implizit oder explizit), die von Individuen genutzt werden, um Informationen zu einem systematischen, zusammenhängenden Netz zu organisieren (Anderson, L. W. et al., 2001, S. 42). Daraus leiten Anderson et al. die folgenden drei Unterkategorien konzeptuellen Wissens ab:

- Wissen über Klassifikationen und Kategorien (zum Beispiel Kreis als ebene geometrische Figur mit spezifischen Eigenschaften)
- Wissen über allgemeine Regeln und Verallgemeinerungen (zum Beispiel π als Verhältnis des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser)
- Wissen über Theorien, Modelle und Strukturen (zum Beispiel axiomatischer Aufbau mathematischer Theorien)

Die Wissensart deklaratives Wissen taucht in der Kategorisierung von Anderson et al. unter der Bezeichnung **Faktenwissen** auf. Faktenwissen beinhaltet nach diesen Autoren Wissen über basale Wissens-elemente einer Domäne, das Schülerinnen und Schüler für die Auseinandersetzung mit einer Disziplin benötigen.

Hiebert (1986) spricht bei seiner Kategorisierung in zwei Wissensarten von konzeptuellem Wissen anstelle von deklarativem Wissen. **Konzeptuelles Wissen** ist dabei zwar eng verwandt, aber nicht synonym zu deklarativem Wissen und zeichnet sich Hiebert (1986)

zufolge besonders durch seine vernetzte Struktur aus. Hiebert (1986) beschreibt konzeptuelles Wissen als verbundenes Netz, das reich an Zusammenhängen ist, und nutzt dies als Merkmal, um konzeptuelles Wissen gegenüber prozeduralem Wissen abzugrenzen (Hiebert, 1986, S. 3). Star (2005) weist darauf hin, dass die Abgrenzung von konzeptuellem Wissen zu prozeduralem Wissen durch das Merkmal einer vernetzten Struktur zu einer Konfundierung von Wissensqualitäten mit Wissensarten führt. Vernetzung ist eine Qualität, die sich auf mehrere Wissensarten und so auch auf prozedurales Wissen beziehen kann (Star, 2005). Neben Routineverfahren gibt es auch ‚mindful procedures‘, die sich dadurch auszeichnen, dass sich verschiedene Aufgabentypen auf effiziente und innovative Art lösen lassen. Solche Verfahren werden in den gängigen Definitionen prozeduralen Wissens nicht berücksichtigt.

Auch De Jong und Ferguson-Hessler (1996) argumentieren, dass eine Trennung zwischen Wissensarten und Wissensqualitäten, wie zum Beispiel die Struktur von Wissen, nötig ist. Die Autoren definieren konzeptuelles Wissen ähnlich zum deklarativen Wissen als Wissen über Fakten, Begriffe und Konzepte und betrachten die vernetzte Struktur von Wissen als eine Komponente der Wissensqualität, die als separate Dimension auf alle Wissensarten bezogen werden kann, anstatt die Vernetzung als Merkmal einer einzigen Wissensart aufzufassen (siehe Abschnitt 1.4). Während Hiebert (1986) das Wissen über die formale Sprache der Mathematik, wie zum Beispiel Symbole und Repräsentationssysteme, als Unterkategorie des prozeduralen Wissens fasst, zählen De Jong und Ferguson-Hessler (1996) das Wissen über Symbole zum konzeptuellen Wissen. Anderson et al. (2001) ordnen das Wissen über Begriffe dem Faktenwissen zu. Zum Beispiel wird nach der Definition von De Jong und Ferguson-Hessler (1996) das Wissen über den Begriff Kreisdurchmesser zum konzeptuellen Wissen gezählt, während es Anderson et al. (2001) zufolge zum Faktenwissen gehört.

Eine Besonderheit der Kategorisierung von De Jong und Ferguson-Hessler (1996) ist, dass sie die Wissensart situationsbezogenes Wissen enthält. Zu beachten ist, dass es sich nicht um den gleichen Situationsbegriff handelt, wie bei dem oben aufgeführten Forschungsstrang der ‚situated cognition‘. Stattdessen meint **situationsbezogenes Wissen** das Wissen über Situationen, die in einer Domäne typischerweise vorkommen. Es ermöglicht, relevante Informationen aus der Aufgabenstellung herauszufiltern (selektive Wahrnehmung) und gegebenenfalls Informationen zu ergänzen. Des Weiteren hilft situationsbezogenes Wissen dabei, eine mentale Repräsentation des Problems zu erstellen, bei der auch zusätzliches konzeptuelles und prozedurales Wissen eingebunden werden kann, sofern eine adäquate Struktur der einzelnen Wissenskomponenten gegeben ist (De Jong & Ferguson-Hessler, 1996, S. 106). Als Beispiel nennen die Autoren eine Physikaufgabe, zu deren Lösung das Wissen nötig ist, dass eine raue Oberfläche Reibungswiderstand erzeugt, was im Aufgabentext nicht explizit erwähnt wird.