RESEARCH

Johanna Zöllner

Längenkonzepte von Kindern im Elementarbereich

Springer Spektrum

Längenkonzepte von Kindern im Elementarbereich

Johanna Zöllner

Längenkonzepte von Kindern im Elementarbereich

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Christiane Benz

Springer Spektrum

Johanna Zöllner
Karlsruhe, Deutschland

Dissertation der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe, 2019

ISBN 978-3-658-27670-6 ISBN 978-3-658-27671-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27671-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

In den letzten zwei Jahrzehnten ist die mathematische Bildung im Elementarbereich in den Fokus der internationalen mathematikdidaktischen Forschung gerückt. Dabei findet vor allem die Entwicklung arithmetischer Kompetenzen Berücksichtigung in Form von Basiskompetenzen für den Erwerb von Zahl- und Operationsvorstellung und für die Entwicklung von Rechenstrategien. Forschungen im mathematischen Inhaltsbereich Größen und auch speziell zum Bereich Längen sind kaum zu finden. Dabei stellen gerade Größen im Elementarbereich viele Anknüpfungspunkte für natürliche Lerngelegenheiten dar, außerdem sind Längenvorstellungen eine Schnittstelle zur arithmetischen Kompetenzentwicklung.
Johanna Zöllner setzt an dieser Forschungslücke an, indem sie Längenkonzepte von 4- bis 6-jährigen Kindern untersucht. Ziel der Arbeit von Johanna Zöllner ist die differenzierte Beschreibung von Komponenten kindlicher Längenkonzepte.
Um sich diesem Forschungsfeld zu nähern, analysiert Frau Zöllner zunächst verschiedene mathematische Grundlegungen des Größenbereichs Länge. Dabei stellt sie eine neue Einteilung verschiedener mathematischer Zugänge zur Definition des Größenbereichs Länge vor. Ausgehend von einer Auseinandersetzung mit dem Begriff Länge nimmt sie darüber hinaus verschiedene Komponenten des Längenkonzepts in den Blick. Anhand ihrer Analyse existierender Forschungsergebnisse arbeitet sie aufgrund der empirisch-theoretischen Bezugsbasis relevante Aspekte bzw. Komponenten eines Längenkonzepts von jungen Kindern heraus und leitet daraus ein theoretisches Modell zur Beschreibung für Längenkonzepte ab.
Frau Zöllner operationalisiert die Grundlage für eine differenzierte Beschreibung von Komponenten kindlicher Längenkonzepte durch verschiedene Aufgabenstellungen im Rahmen eines halbstandardisierten Interviews und analysiert die Lösungsprozesse von 40 Kindern im Alter von 4 bis 6 Jahren. Ihre äußerst differenzierte Beschreibung von Vorgehensweisen von Kindern im Umgang mit Längen stellt ein Novum in der mathematikdidaktischen Forschung dar. Die innovative Generierung von Auswertungskategorien zur Analyse der Aspekte eines Längenkonzepts bei jungen Kindern können sehr gut sowohl für die Konstruktion von Lehr-Lernumgebungen als auch für weitere wissenschaftliche empirische Studien und theoretische Überlegungen genutzt werden. Darin zeigt sich deutlich die doppelte Anschlussfähigkeit von Frau Zöllners Arbeit: Sowohl im wissenschaftlichen Kontext als auch für die Gestaltung und Unterstützung von Lehr-Lern-Prozessen im Bereich der Längen sind ihre Ergebnisse äußerst relevant.

Ich wünsche Johanna Zöllner, dass sie mit ihrer Neugier und ihrem didaktischen Gespür weitere spannende Einblicke gewinnen kann und freue mich auf kommende Forschungsergebnisse von ihr.

Christiane Benz

Die Originalversion des Buchs wurde revidiert. Ein Erratum ist verfügbar unter https://doi.org/10.1007/978-3-658-27671-3_8

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei den vielen Personen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.

Zuerst gebührt mein ganz besonderer Dank *Frau Prof. Dr. Christiane Benz* für die engagierte Betreuung meiner Arbeit, für die zahlreichen und unermüdlichen Fachgespräche, für die unendliche Geduld, Ermutigung und entgegengebrachte Freundschaft.
Herrn Prof. Dr. Mutfried Hartmann danke ich herzlich für die intensiven fachlichen Gespräche und den kreativen Gedankenaustausch.

Mein Dank gilt *Herrn Prof. Dr. Walter Kosack*, der diese Arbeit erst möglich gemacht hat.

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit an der Pädagogischen Hochschule Karlsruhe am Institut für Mathematik und Informatik. Bedanken möchte ich mich für die freundschaftliche Zusammenarbeit mit den Kollegen, die mir mit Interesse und Hilfsbereitschaft zur Seite standen. Speziell dem Team der MiniMa danke ich für seine Unterstützung. Ich möchte mich bei *Andrea Maier* für das geduldige Korrekturlesen und die vielen hilfreichen Tipps bedanken und bei *Priska Sprenger* für die Hinweise zu den Grafiken. *Friederike Reuter* danke ich herzlich für die unermüdliche Unterstützung, die vielen gewinnbringenden Gespräche und die geduldige Motivation vor allem in der Phase der Fertigstellung der Dissertation.

Den Kindertageseinrichtungen und den Erzieherinnen möchte ich für ihr Entgegenkommen danken. Mein Dank gilt auch den Kindern, die an der Studie teilgenommen und sich mit Ausdauer und Freude an der Arbeit beteiligt haben. Ihre Begeisterung am Vergleichen und Messen hat mich von Anfang an motiviert und inspiriert.

Mein besonderer Dank geht an meine Freunde und meine Familie, meine Eltern und meine Schwiegermutter, die mich über die lange Zeit des Dissertationsprojektes tatkräftig unterstützt haben.
Mein Mann und unsere wundervollen Kinder waren die größten Leidtragenden an dem Projekt. Ich danke ihnen dafür, dass sie nie den Glauben an die Fertigstellung verloren haben und mir in vielerlei Hinsicht beigestanden haben.

Ihr seid großartig!
Euch widme ich diese Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Grafikverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

> *„Wir sind überzeugt, dass die Maße der beste und geeignetste Kanal sind, fünfjährige Kinder an eine Welt der Zahlen und mathematischen Sprachformeln heranzuführen“* (Castagnetti & Vecchi 2002; Vertreterinnen der Reggio-Pädagogik)

Es ist unbestritten, dass der Umgang mit Größen im Alltag eine bedeutende Rolle spielt. Trapp & Wallerus (2012, 9) behaupten sogar: „Ein Zusammenleben von Menschen ist heutzutage ohne Maße und ohne Messen nicht mehr vorstellbar“. Das trifft auch auf die Lebenswelt von Kindern im Elementarbereich zu. Sie sammeln bereits vielfältige Erfahrungen im Umgang mit Größen, beispielsweise wenn sie entscheiden, ob ein Gegenstand von ihnen an einen anderen Ort gebracht werden kann, oder ob dieser zu schwer ist. Auch wenn sie die Höhe eines Durchgangs mit ihrer eigenen Körpergröße in Relation bringen und sich bücken um durchgehen zu können, oder wenn sie erfahren, dass noch drei Tage vergehen, bis sie die Freundin besuchen dürfen, setzen sie sich mit Größen auseinander.
Größen stellen zudem eine enge Verbindung zu dem Bereich der Zahlen her. So findet die erste Begegnung von Kindern mit Zahlen im Alltag nicht auf einer abstrakten Ebene statt, sondern vielmehr im Zusammenhang mit Größen (Lorenz 2012, 142; vgl. auch Benz, Peter-Koop & Grüßing 2015, 234; Clements & Sarama 2009, 163): Kinder werden gewogen oder ihre Körpergröße wird gemessen und die gefundenen Maßzahlen werden genannt.
Trotz des Alltagsbezugs und der Bedeutung des Umgangs mit Größen für die erste Begegnung mit Zahlen kann mit Copley (2006, 17) festgestellt werden, dass der Umgang mit Größen selten im Fokus der frühen mathematischen Bildung steht: „Measurement is an often neglected mathematics topic for young children“. Benz (2012) stellt in einer Studie mit 589 deutschen Fachkräften im Elementarbereich[1] fest, dass nur 15% der Befragten bei der Frage nach mathematischen Inhalten in alltäglichen Situationen im Kindergarten mathematische Aktivitäten mit Größen nennen. (ebd. S. 22; vgl. auch Zöllner, 2012).
Die Bedeutung von Größen für das Initiieren und Begleiten früher mathematischer Bildungsprozesse ist nicht nur im bestehenden Alltagsbezug begründet. Ein weiteres Argument für eine frühe Thematisierung von Größen ist in Studienergebnissen zu finden, die zeigen, dass viele Kinder und selbst Erwachsene nicht über adäquate Größenvorstellungen verfügen, die es ermöglichen, Größenangaben kritisch zu beurteilen und zu hinterfragen (Grassmann 2001; Radatz & Schipper 1983 u. a.).

Längen spielen eine besondere Rolle unter den physikalischen Größen. Sie sind im internationalen Einheitensystem eine der Basisgrößenarten und stellen damit eine Größe dar, auf deren Grundlage weitere Größen definiert werden können. Auch aus mathematikdidaktischer Sicht nehmen Längen eine besondere Stellung unter den physikalischen Größen ein. Sie sind leicht visuell wahrnehmbar und werden bereits von Kleinkindern wahrgenommen (Benz, Peter-Koop & Grüßing, 2015, 233; Buys & Moor 2008, 18). Deswegen ist es nicht verwunderlich,

---

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit werden genderneutrale Personenbezeichnungen bevorzugt gewählt. Auf die gleichzeitige Verwendung männlicher und weiblicher Sprachformen wird verzichtet. Sämtliche Personenbezeichnungen gelten gleichermaßen für alle Geschlechter.

J. Zöllner, *Längenkonzepte von Kindern im Elementarbereich*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27671-3_1

dass Grundschulkinder bereits intensive außerschulische Erfahrungen im Bereich der Längen sammeln konnten (Peter-Koop 2011a, 4; vgl. auch van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2011). Anknüpfend an diese Erfahrungen können im Umgang mit Längen die Kernideen eines Größenbereichs besonders deutlich herausgearbeitet werden und somit als Grundlage für den Aufbau anderer Größenkonzepte dienen. Auch für die Zahlbegriffsentwicklung stellen Längen eine bedeutende Grundlage dar, „da wir Zahlen in Form von Längen bzw. der Anordnung auf einer Länge/Linie denken“ (Lorenz 2012, 143).

Um Kinder beim Aufbau eines Längenkonzepts unterstützen zu können, ist es förderlich, die Komponenten von Längenkonzepten sowie Anwendungsmöglichkeiten in verschiedenen Anforderungssituationen zu identifizieren. „In der Mathematikdidaktik existieren allerdings – gemessen an der Vielfalt an Studien über das (Vor-) Wissen von Grundschulkindern in einzelnen Gebieten der Arithmetik – nur wenige Arbeiten, in denen das kindliche Mess-Denken über Längen (ihr Längenkonzept) umfassend und differenziert oder gar langfristig untersucht wird“ (Nührenbörger 2002, 1). Bezüglich der Beschreibung des Längenkonzepts von Kindern im Grundschulalter konnte Nührenbörger (2002) einen Beitrag leisten, jedoch bleibt weiterhin ein Forschungsdesiderat bezüglich der Beschreibung des Längenkonzepts von Kindern im Elementarbereich bestehen (Gasteiger 2010, 55).

Ziel der Arbeit

Die vorliegende Arbeit untersucht das Längenkonzept von Kindern im Elementarbereich. Unter „Längenkonzept“ wird dabei ein Zusammenspiel unterschiedlicher Komponenten verstanden, die im mentalen sowie im handelnden Umgang mit Längen zum Tragen kommen (vgl. Kap. 2.). Durch die detaillierte Beschreibung der Komponenten auf theoretischer Ebene, das Aufgreifen bisheriger Forschungsergebnisse sowie die qualitative Untersuchung von Vorgehensweisen von Kindern in spezifischen Anforderungssituationen, wird ein differenziertes Bild kindlicher Längenkonzepte beschrieben.

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 1 der Arbeit wird der Begriff „Länge“ zunächst aus physikalischer Sicht betrachtet. Zu dem Größenbereich „Länge“ sind unterschiedliche mathematische Zugänge möglich, die ebenfalls in Kapitel 1 dargestellt werden. Für die Arbeit mit Kindern im Elementarbereich ist die Betrachtung des Begriffs „Länge“ an konkreten Objekten, mit welchen sie umgehen, besonders wichtig und wird deswegen in Kapitel 1.4 in den Fokus gestellt.

Komponenten des Längenkonzepts werden in Kapitel 2 auf theoretischer Ebene analysiert und der aktuelle Stand der Forschung wird zusammengefasst. Ebenfalls auf theoretischer Ebene werden Zusammenhänge zwischen den einzelnen Komponenten aufgezeigt. Eingeleitet wird das Kapitel 3 durch die Forschungsfragen, die aus der theoretischen Auseinandersetzung mit den Komponenten des Längenkonzepts und der Analyse bisheriger empirischer Untersuchungsergebnisse abgeleitet wurden und die Grundlage für die empirische Studie bilden. Dem schließen sich methodische Überlegungen zum Aufbau der Studie an sowie die Beschreibung und Analyse der Aufgaben des klinischen Interviews.

Kapitel 4 widmet sich der Auswertung und Interpretation der gewonnenen Daten. Die Struktur des Kapitels orientiert sich dabei an den Komponenten, die in Kapitel 2 als relevant für die Beschreibung des Längenkonzepts herausgearbeitet wurden. Komponenten, deren deskriptive Analyse und Interpretation die Auswertung mehrerer Aufgaben erfordern, werden ans Ende des Kapitels gestellt.

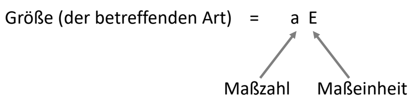
In Kapitel 5 werden die Hauptbefunde der Arbeit dargestellt und die Forschungsfragen zusammenfassend beantwortet. Den Abschluss der Arbeit bildet ein Ausblick. Dieser greift sowohl Forschungsdesiderate auf, die sich aus den Erkenntnissen dieser Arbeit ergeben haben, als auch Konsequenzen für den Umgang mit Aspekten des Längenkonzepts in der elementarpädagogischen Praxis.

1 Zum Begriff „Länge“

Der Begriff „Länge“ ist die Grundlage für die Analyse des Längenkonzepts der Kinder. Zu dem Begriff gibt es unterschiedliche Zugangsweisen, die im Folgenden aufgegriffen werden. Zunächst werden Längen aus physikalischer Sicht betrachtet. Dem schließen sich unterschiedliche mathematische Zugänge zum Größenbereich „Längen“ an. Der Umgang von Kindern mit Längen findet in konkreten Umgebungen mit konkreten Repräsentanten für Längen statt, weshalb diese in Kap. 1.4 behandelt werden. Den Abschluss des Kapitels bildet die Betrachtung der Verwendung des Begriffs „Länge“.

1.1 Längen aus physikalischer Sicht

Aus physikalischer Sicht definieren sich Größen über die Messbarkeit. „Sie [die Größen] beschreiben Eigenschaften von physikalischen Objekten, für die ein Messverfahren existiert. Grundeigenschaften aller physikalischen Größen sind Erfassbarkeit durch Maß und Zahl (Metrisierung) und Verknüpfbarkeit mittels mathematischer Operationen“ (Stroppe 1990, 16; vgl. auch Kirsch 2004, 52; Franke & Ruwisch 2010, 180 u. a.). Von allen Eigenschaften eines Gegenstands ist allein die gesuchte Größe relevant. Durch das Messverfahren wird diese Eigenschaft, diese Größe, quantifiziert.

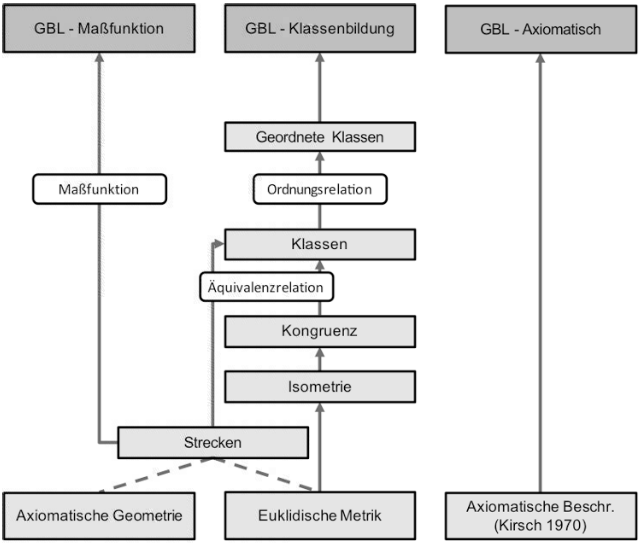


Grafik 1: Größenangabe (Kirsch 2004, 51; vgl. auch Franke & Ruwisch 2010, 180)

Für das Messverfahren werden passende physikalische Einheiten (Maßeinheiten) benötigt. „Bei der Messung einer physikalischen Größe wird dieselbe in Vielfachen bzw. Teilen der zugehörigen Einheit ausgedrückt“ (Stroppe 1990, 16). Die Maßeinheit ist dabei ein Beispiel der entsprechenden Größe (Physikalisch – Technische -Bundesanstalt 2007, 6). Dieses Beispiel wird so gewählt, dass die Größe mit einem positiven Vielfachen der entsprechenden Maßeinheit beschrieben werden kann, wie Freudenthal anmerkt: "A measuring unit (m, kg, sec, m^3, or suchlike) is chosen in order to express each length, and so on, as a positive real multiple of unit“ (Freudenthal 1983, 9). Dementsprechend wird die Größenangabe mit Hilfe einer multiplikativen Verknüpfung von Maßeinheit und Maßzahl ausgedrückt (Frenzel & Grund 1991, 11; Kirsch 2004, 51 u. a.).

Länge wird im internationalen Einheitensystem (Système international d’unités, SI) per Konvention als eine von sieben Basisgrößenarten definiert (Physikalisch – Technische – Bundes–anstalt 2007, 7). Neben Masse, Zeit, Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge und Lichtstärke ist damit *Länge* eine Größe, die nicht durch andere Basisgrößen ausgedrückt werden kann. Für jede dieser Basisgrößen wird je eine Bezugsgröße als Einheit festgelegt. Für die Basisgröße *Länge* wurde die Basiseinheit *Meter* bestimmt (z. B. Frenzel & Grund 1991a, 10).

J. Zöllner, *Längenkonzepte von Kindern im Elementarbereich*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27671-3_2



Grafik 2: Der Größenbereich "Länge (GBL)"

1.2 Abstand und Länge aus mathematischer Sicht

Aus mathematischer Sicht können „Längen“ als Merkmale verschiedener geometrischer Objekte beschrieben werden. Wie der Größenbereich „Länge“ (GBL) unterschiedlich auf grundlegendere Begriffe zurückgeführt werden kann, ist in der Grafik dargestellt.
Dabei greift der Längenbegriff letztendlich stets auf den Begriff der Länge von Strecken zurück, sodass dieser von fundamentaler Bedeutung für das Verständnis des Größenbereichs „Länge“ ist. Strecken können auch über die euklidische Metrik definiert werden. Somit kann diese ebenfalls als grundlegend für den Aufbau des Größenbereichs „Länge“ (GBL-Maßfunktion, GBL-Klassenbildung) angesehen werden.

Euklidische Metrik

Für eine beliebige Menge M nennt man eine Abbildung $d: M \times M \to \mathbb{R}_0^+$ eine Metrik (Abstandsfunktion), wenn folgende Bedingungen für beliebige $a, b, c \in M$ erfüllt sind (vgl. Scheid 2000, 419):

(1) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (Identitätsaxiom)
(2) $d(a,b) = d(b,a)$ (Symmetrieaxiom)
(3) $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$ (Dreiecksungleichung)

Man nennt $d(a,b)$ den „Abstand“ oder die „Entfernung“ der Punkte a, b (ebd.).
Abstände sind darüber hinaus nie negativ. Man kann also formulieren:

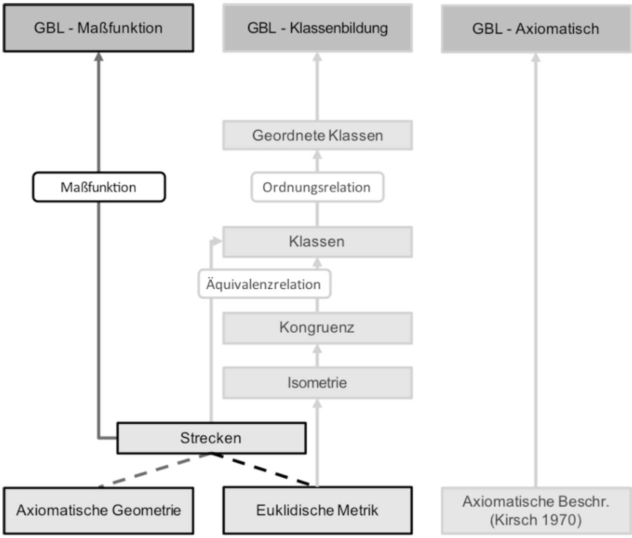
(4) $d(x,y) \geq 0$

Die Positivität müsste nicht zusätzlich gefordert werden, da sie aus den anderen Eigenschaften abgeleitet werden kann, sie ist aber allemal eine wesentliche Eigenschaft von Metriken.

Diese axiomatische Festlegung des Abstandbegriffs ermöglicht die Festlegung eines Abstands zwischen Elementen innerhalb einer beliebigen Menge M. Dabei können innerhalb einer Menge M auch unterschiedliche Metriken definiert werden. Für die folgenden Überlegungen ist die *euklidische Metrik* (Scheid 2000, 420) hilfreich, durch welche die Abstände von Punkten über deren Koordinaten definiert werden, wenn die Ebene durch ein Koordinatensystem im $\mathbb{R}^2$ bzw. der Raum durch ein Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$ identifiziert wird.
Die *euklidische Metrik* ordnet z. B. im Raum einem Punktepaar $(P\ (x, y, z), P'\ (x', y', z'))$ den Abstand: $d\ (P, P') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$ zu.
Für eine spätere Analyse des Längenkonzepts ist diese spezielle Funktionsvorschrift des euklidischen Abstands nicht so sehr von Bedeutung. Zentrale Hinweise für didaktische Überlegungen sind vielmehr von den Axiomen der Metrik selbst zu erwarten, da diese die mathematisch wesentlichen Aspekte erfassen. Bemerkenswert an den Axiomen der Metrik ist dabei vor allem, dass Abstände zwischen zwei Punkten „gemessen“ werden. Die Symmetrie sagt zudem aus, dass es egal ist, ob „von P nach P’“ oder von „P’ nach P“ gemessen wird. Die Dreiecksungleichung erlaubt, dass unter bestimmten Umständen Messprozesse in Teilschritte zerlegt werden können. Dies hängt unmittelbar mit dem Begriff der *Strecke* zusammen. In bestimmten elementargeometrischen Konzeptionen werden Strecken $[A, B]$ als Punktemengen definiert, die aus den sogenannten „zwischen A und B“ liegenden Punkten P bestehen (z. B. Kirsch 1970, 40). Die Eigenschaft des Dazwischenliegens der Punkte P wird dadurch festgelegt, dass für solche Punkte in der Dreiecksungleichung die Kleiner-Gleich-Bedingung sogar zur Gleichheit verschärft werden kann, für diese also $d(A, P) + d(P, B) = d(A, B)$ gilt. Der Streckenbegriff kann damit aus dem Metrikbegriff der euklidischen Metrik abgeleitet werden.

Auf Basis der Metrik können weitere zentrale Begrifflichkeiten im Zusammenhang mit dem Längenbegriff gebildet werden. Es können damit etwa sogenannte *Isometrien* bzw. *Kongruenzabbildungen* als geometrische Abbildungen festgelegt werden, die Abstände zwischen beliebigen Punktepaaren invariant lassen. Die Kongruenzabbildungen wiederum liefern die Basis für den Begriff der *Deckungsgleichheit* bzw. *Kongruenz* von Figuren, indem man zwei Figuren oder Körper als deckungsgleich bzw. kongruent bezeichnet, wenn sie durch eine Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden können. Diese Betrachtungen spielen bei der Beschreibung des Größenbereichs eine wichtige Rolle, wie Grafik 2 entnommen werden kann. Aber auch bei der Arbeit mit Repräsentanten (vgl. Kap. 1.4) haben sie eine zentrale Bedeutung. Der Begriff der „Metrik“ erweist sich damit als fundmental für den Längenbegriff.

Größenbereich „Länge“ über Maßfunktion (GBL-Maßfunktion)



Grafik 3: Größenbereich „Länge“ - Maßfunktion

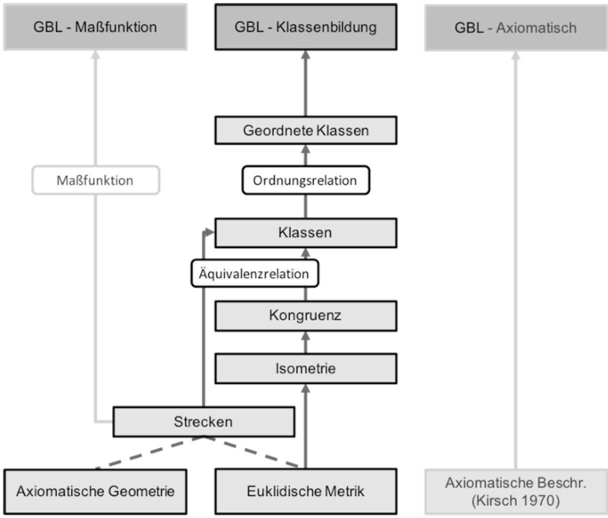
Schmidt und Weiser (1986) beschreiben Größen als Maßsystem. Hierbei nimmt die sogenannte „Maßfunktion“ eine zentrale charakteristische Stellung ein (Nührenbörger 2002, 15). „Ein Maßsystem kann beschrieben werden als ein Tripel, bestehend aus einem Repräsentantenbereich R, dem Zahlbereich IR^+ der positiven reellen Zahlen und einer Maßfunktion φ von R in IR^+, die jedem Repräsentanten eine Maßzahl zuordnet“ (Schmidt & Weiser 1986, 122).

Auf den Repräsentantenbereich wird in Kap. 1.4 detailliert eingegangen. Für die weiteren Ausführungen ist zunächst nur entscheidend, dass er aus der Menge der konkreten Gegenstände bzw. mathematischer Idealisierungen gebildet wird, in welcher eine Äquivalenzrelation, eine Ordnungsrelation und eine additive Verknüpfung gegeben sind (vgl. Kap. 1.4).
Der Zahlbereich besteht aus der Menge der positiven reellen Zahlen.
Die Maßfunktion definieren Schmidt & Weiser so, dass sie jedem Längenrepräsentanten aus R eine positive reelle Zahl zuordnet und folgende Eigenschaften hat:

1. für jedes $r, s \in R$ gilt: $\varphi(r \cup s) = \varphi(r) + \varphi(s)$	Additivität
2. für jedes $r, s \in R$ gilt: $r \succ s \Leftrightarrow \varphi(r) > \varphi(s)$	Ordnungshomomorphie
3. für jedes $r, s \in R$ gilt: $r \sim s \Leftrightarrow \varphi(r) = \varphi(s)$	Kanonizität
4. es gibt ein $r_0 \in R$ für das gilt: $\varphi(r_0) = 1$	Existenz eines Einheitsrepräsentanten

Durch die Beschreibung der Größen als Maßsystem wird jeder Länge eine reelle Zahl zugeordnet. Das Messen mit dem Ziel, eine Maßzahl zu erhalten, steht hierbei also im Fokus.

Größenbereich „Länge" über Klassenbildung (GBL-Klassenbildung)

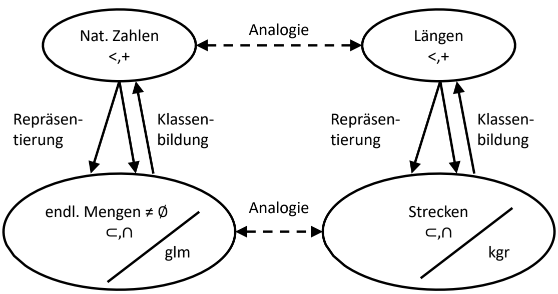


Grafik 4: Größenbereich „Länge" - Klassenbildung

Kirsch (1970) entwickelt einen Größenbegriff, den er in Analogie zu den Kardinalzahlen ableitet. Er betrachtet Strecken als Punktemengen. Zur Beschreibung der Äquivalenzrelation nutzt er die Kongruenz (Deckungsgleichheit) (a. a. O. 40). Grundlage des Kongruenzbegriffs sind wiederum Isometrien. Die Kongruenz als Äquivalenzrelation ist reflexiv, symmetrisch, transitiv und zerlegungsverträglich.

$A\ kgr\ A$ (Reflexivität)
$A\ kgr\ B \implies B\ kgr\ A$ (Symmetrie)
$A\ kgr\ B, B\ kgr\ C \implies A\ kgr\ C$ (Transitivität)
$A\ kgr\ A', B\ kgr\ B', A \cap B = \emptyset, A \cup B = C, A' \cap B' = \emptyset, A' \cup B' = C'$
(Zerlegungsverträglichkeit)

wobei $A, A', B, B', C \in \Lambda$ und Λ das System aller Strecken des Anschauungsraumes darstellt (a. a. O.40). Die Kongruenz ermöglicht eine Einteilung der Strecken in Äquivalenzklassen (vgl. Grafik 2).
Die Analogie zwischen dem Bereich der Mengen bzw. der natürlichen Zahlen und den Längen bzw. deren Repräsentanten, den Strecken zeigt Kirsch in Grafik 5 auf.



Grafik 5: Die Abstraktion von Strecken zu Längen und die Analogie zu Mengen und Zahlen (Kirsch 1970, 41)

Der Prozess der Klassenbildung bei Längen wird z. B. als Messvorgang realisiert (Kirsch 2004, 52), während er im Bereich der Zahlen durch die Anzahlbestimmung erfolgt. Den umgekehrten Prozess bezeichnet Kirsch als Repräsentierung.
Weiter sind folgende Annahmen für die Relation „kongruent“ erfüllt (Kirsch 1970, 41): Für $A, B \in \Lambda$ besteht stets genau einer der folgenden Fälle:

1. $A\ kgr\ B$;
2. es gibt eine Menge $A' mit\ A\ kgr\ A' \subset B$;
3. es gibt eine Menge $B' mit\ B\ kgr\ B' \subset A$.

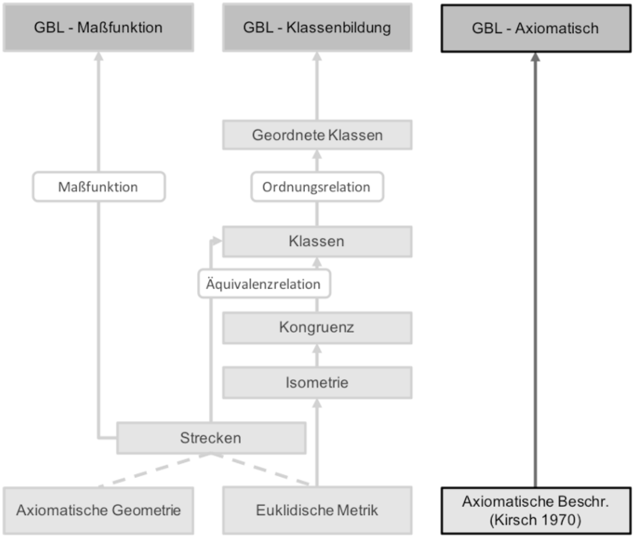
Wobei man A' und B' so wählen kann, dass $A' \in \Lambda,\ B \setminus A' \in \Lambda\ bzw. B' \in \Lambda,\ A \setminus B' \in \Lambda$. (ebd.)

Ebenso gilt für das System der Strecken:

Für $A, B \in \Lambda$ gibt es stets eine Menge $B' \in \Lambda$ mit den Eigenschaften:
$B' kgr\ B,\ A \cap B' = \emptyset\ und\ A \cup B' \in \Lambda$ (ebd.)

Auf der Grundlage der vorangegangenen Ausführungen lässt sich eine Kleiner-Beziehung und eine Addition definieren. Kirsch übernimmt dabei die Definition „wörtlich“ aus dem Bereich der Kardinalzahlen (ebd.): „Für a<b sagt man: a ist kleiner als b, kurz a<b“ (a. a. O. 22), wobei a und b die Länge der Strecken A bzw. B bezeichnen.
Die Beschreibung der Addition, auf Längen übertragen, wäre folgende:
a+b heißt die Summe der Längen a und b. Die Operation +, die aus je zwei Längen a und b ihre Summe herstellt, heißt die Addition. Diese lässt sich folgendermaßen beschreiben: Betrachtet man zwei Strecken A und B und deren jeweilige Länge a und b, und $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B \in \Lambda$. Solche Strecken gibt es aufgrund der letzten Annahme. Dann gibt es ein $B' kgrB\ (also\ mit\ der\ Länge\ b), sodass\ A \cup B'$ der Summe a+b entspricht (Kirsch 1970, 26, übertragen auf Längen). Die Summe der Längen ist dabei eindeutig und unabhängig von den gewählten Repräsentanten.
Damit sind „geordnete Klassen“ möglich, und diese wiederum sind Grundlage für den Größenbereich (vgl. Grafik 2).
Bei der Beschreibung des Größenbereichs „Länge“ über Klassenbildung benutzt Kirsch sowohl den Begriff der „Strecke“ als auch den Begriff der „Kongruenz von Strecken“. Um die Kongruenz von Figuren „wie z. B. Strecken zu definieren, greift man auf den Begriff der Isometrie zurück. Dieser wiederum fußt auf dem Begriff der Metrik (vgl. Grafik 2).

Größenbereich „Länge“ über axiomatische Beschreibung



Grafik 6: Größenbereich „Länge“ - Axiomatische Beschreibung

Es findet sich noch eine weitere viel zitierte Beschreibung der Größen (Kirsch 1970, vgl. auch Frenzel & Grund 1991a; Griesel 1973; Nührenbörger 2002). Sie ist ein abstraktes Modell, welches als eine „*axiomatische Theorie* eines inhaltlich im wesentlichen bekannten Begriffs- und Aussagengefüges [angesehen werden kann]. Man wählt gewisse Begriffe, hier + und <, als *Grundbegriffe* und wählt dazu gewisse Sätze, hier (Ass), (Komm), (Trich) und (Lösb) als *Grundsätze*, die man in diesem Zusammenhang auch *Axiome* nennt“ (Kirsch 1970, 45 Hervorhebungen im Original; vgl. auch Griesel 1973, 56).
Gegeben ist hierbei eine nichtleere Menge G, in der eine Verknüpfung „+“ definiert ist. Das bedeutet, dass der Verknüpfung von zwei Elementen a, b $\in$ G ein bestimmtes Element aus G zugeordnet wird. Diese Verknüpfung heißt Addition (Kirsch 1970, 42f). In G ist zudem eine Relation „<“ definiert. Das bedeutet, dass für zwei Elemente a, b $\in$ G fest steht, ob a < b ist oder nicht. Die Relation heißt Kleiner-Beziehung (ebd. S. 43).
(G, +, <) heißt Größenbereich, wenn folgende Regeln (Axiome) für beliebige a, b und c $\in$ G gelten (Kirsch 1970, 43; vgl. auch Griesel 1973, 56; Greefrath 2010 u. a.):

1. Kommutativgesetz: $a + b = b + a$
2. Assoziativgesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Trichotomiegesetz: Es gilt stets genau einer der drei Fälle, entweder $a < b$ *oder* $b < a$ oder $a = b$.
4. Lösbarkeitsgesetz: $a + x = b$ ist lösbar mit $x \in G$ genau dann, wenn $a < b$.

Durch das vierte Gesetz, das Lösbarkeitsgesetz, wird ein Charakteristikum der Größen beschrieben. Es kann nur positive Größen geben. Damit ist die Subtraktion begrenzt und nur im positiven Bereich ausführbar (Blankenagel 1994, 107).