

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Gabriele Kaiser *Hrsg.*

RESEARCH

Lisa-Marleen Heid

Das Schätzen von Längen und Fassungsvermögen

Eine Interviewstudie zu Strategien
mit Kindern im 4. Schuljahr



Springer Spektrum

Perspektiven der Mathematikdidaktik

Herausgegeben von

G. Kaiser, Hamburg, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerausbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

Herausgegeben von

Prof. Dr. Gabriele Kaiser
Universität Hamburg

Weitere Bände in dieser Reihe <http://www.springer.com/series/12189>

Lisa-Marleen Heid

Das Schätzen von Längen und Fassungsvermögen

Eine Interviewstudie zu Strategien
mit Kindern im 4. Schuljahr

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Silke Ruwisch

 Springer Spektrum

Lisa-Marleen Heid
Lüneburg, Deutschland

Dissertation Leuphana Universität Lüneburg, 2016

Perspektiven der Mathematikdidaktik

ISBN 978-3-658-18873-3

ISBN 978-3-658-18874-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-658-18874-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Lisa-Marleen Heid greift mit dem Schätzen als Thema ihrer Dissertation ein Forschungsfeld auf, zu welchem international bisweilen ein Forschungsinteresse in der Mathematikdidaktik zu erkennen ist, welchem im deutschsprachigen Raum bisher allerdings kaum Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Dies erscheint umso erstaunlicher, als es sich beim Schätzen um ein im Alltag häufig verwendetes Vorgehen handelt. Zudem wird Schätzen als komplexes Verhaltensmuster in der psychologisch-medizinischen Forschung zur Identifizierung neurologisch auffälliger kognitiver Verarbeitungsprozesse verwendet, die insbesondere auf Beeinträchtigungen der exekutiven Funktionen sowie des semantischen Gedächtnisses hinzuweisen scheinen.

In der Mathematikdidaktik ist unstrittig, dass Schülerinnen und Schüler auch die „Welt der ungenauen Zahlen“ – zu der das Schätzen unzweifelhaft gehört – kennen lernen sollen. Dazu ist es notwendig, dass sie lernen, in welcher Situation welche Genauigkeit eines Mess-, Schätz- oder Berechnungsergebnisses erforderlich und angemessen ist. Im Hinblick auf den Aufbau eines entsprechenden „Mess- und Größensinns“ erfahren somit Schätzaktivitäten im Mathematikunterricht derzeit eine entsprechende Aufwertung, ohne dass jedoch geklärt ist, welche Schätzfähigkeiten jeweils von den Schülerinnen und Schülern zu erwarten sind.

Die vorliegende Dissertation liefert bzgl. des Schätzens von Größen am Ende der Grundschulzeit nicht nur interessante Einzelergebnisse. Lisa-Marleen Heid verbindet in ihrer Untersuchung erstmalig sowohl die Beobachtung eingesetzter Schätzstrategien mit der erreichten Schätzgenauigkeit. Zudem vergleicht sie mit den Größenbereichen Länge und Fassungsvermögen einen gut mit einem weniger gut erforschten Gebiet bzgl. des Schätzens.

Lisa-Marleen Heid legt im theoretischen Teil zunächst dar, dass und inwiefern sich das Schätzen von Anzahlen, Größen und überschlagenen Zahlenwerten voneinander unterscheiden lassen und welche gemeinsamen Prozesse ihnen unterliegen, bevor sie in einem zweiten Abschnitt das Schätzen selbst von anderen Begriffen, wie Raten, Abschätzen, Approximieren und Messen abgrenzt. In der weiteren Fokussierung auf das Schätzen von Größen – und hierin mit Länge und Fassungsvermögen auf zwei visuell wahrnehmbare Größen – wird eine enorme Genauigkeit in

der Darlegung sowohl der notwendigen Voraussetzungen zum Schätzen dieser Größen, als auch der möglichen Strategien erreicht. Das daraus entstandene Begriffsnetz zum Schätzen erlaubt eine präzise Einordnung der jeweiligen Literaturquellen hinsichtlich des zugrunde gelegten Begriffsumfangs, unterscheiden sich die Studien hierin doch z.T. erheblich.

Das grundlegende Erkenntnisinteresse wird somit in verschiedener Hinsicht ausdifferenziert. Die genaue Identifizierung der Lösungsstrategien, der Vergleich zwischen den beiden Größenbereichen, aber auch zwischen verschiedenen Aufgabenarten und weiteren Einflussvariablen auf Strategiewahl und Schätzgenauigkeit fasst die Autorin zu verschiedenen Forschungsfeldern zusammen. Insbesondere die parallelisierte Konstruktion des Aufgabenmaterials, welches konsequent in die bestehenden Forschungszusammenhänge eingeordnet und in seinen Bedingungsvariablen übersichtlich dargestellt wird, zeigt die besondere Leistung der Autorin für das Forschungsfeld. Durch eine genaue Abgrenzung der verschiedenen Schätzanforderungen in vier Aufgabenarten sowie der parallelisierten Einzelaufgaben entsteht ein Interviewleitfaden, der nicht nur für die Forschung, sondern ebenso als Anregung für entsprechende Arbeitsaufträge im Mathematikunterricht geeignet ist. Forschungsrelevant, jedoch noch nicht geklärt, schließt sich die Frage an, inwieweit Parallelisierungen möglich, aber eben auch Abweichungen notwendig erscheinen, sollen die Überlegungen auf weitere Größenbereiche übertragen werden.

Die Ergebnisse der hier vorgelegten Studie sowie deren Interpretation werden in den sich anschließenden Kapiteln übersichtlich präsentiert. Jedes Kapitel widmet sich diesen Ergebnissen aus einer anderen Perspektive: Zunächst stehen die identifizierten Strategien im Vordergrund und führen in der zusammenfassenden Analyse zu einem eigenen Modell an Schätzstrategien, welches größenbereichsübergreifend formuliert ist und größenbereichsspezifische Unterkategorien enthält.

Es folgen die Kapitel zu verschiedenen Einflussfaktoren. Zunächst überprüft Lisa-Marleen Heid, inwieweit sich die Strategiewahl zwischen den Größenbereichen unterscheidet, inwieweit sie von der Aufgabenart abhängt bzw. durch die Größenspanne des zu schätzenden Objektes beeinflusst ist. Darauf folgen verschiedene Vergleiche bzgl. der Schätzgenauigkeit. Sowohl die eigenen Daten als auch die Ergebnisse einer Expert_innenbefragung sprechen dafür, in den beiden Größenbereichen unterschiedliche Kriterien bzgl. der Schätzgenauigkeit zugrunde zu legen, d.h. Schätzwerte im Bereich Fassungsvermögen nachsichtiger zu beur-

teilen als im Bereich Längen. Diese Ergebnisse könnten als experimentelle Belege für unterrichtliche Evaluationen dienen, wiewohl dies nicht im Fokus von Lisa-Marleen Heid steht. Sehr detailliert werden dann die verschiedenen Größenspannen bzgl. der Schätzgenauigkeit miteinander verglichen, bevor Zusammenhänge zwischen identifizierter Schätzstrategie und der Genauigkeit des Schätzwertes betrachtet werden.

Jedes Kapitel enthält am Ende eine Zusammenfassung, welche ausgesprochen leser_innenfreundlich die wesentlichen Erkenntnisse mit Bezug zum Forschungsstand und mögliche Interpretationen aufbereitet. Ebenso übersichtlich liefert das Schlusskapitel eine hervorragend zusammenfassende Darlegung der Ergebnisse mit entsprechender Abwägung der Aussagekraft.

Lisa-Marleen Heid gelingt es in der vorliegenden Arbeit, mit der Fokussierung auf die Lösungsstrategien von Viertklässlerinnen und Viertklässlern in den Größenbereichen Länge und Fassungsvermögen zunächst differenziert und qualitativ der Frage nachzugehen, welche Strategien Kinder nutzen, um Schätzaufgaben zu lösen. Im Anschluss werden aufgaben- und personenspezifische Einflussfaktoren auf die Strategiewahl theoretisch diskutiert und quantitativ überprüft. Dass zusätzlich Zusammenhänge zur Schätzgenauigkeit dargelegt und ausführlich diskutiert werden, ist ein besonderes Verdienst der Autorin, wenngleich diese nicht im vorrangigen Erkenntnisinteresse standen. Somit liegen erstmals Ergebnisse in dieser Kombination vor, während bisher in der Literatur normativ gesetzte Genauigkeitsgrenzen verwendet werden, welche weder eine hinreichende empirische Grundlage aufweisen, noch als fachdidaktisch diskutiert und akzeptiert gelten können.

Somit ist zu hoffen, dass die vorliegende Arbeit von der Fachdidaktik entsprechend wahrgenommen wird und zu einer Weiterentwicklung der erforderlichen und erwartbaren Schätzaktivitäten von Schülerinnen und Schülern führt.

Lüneburg, den 11. Mai 2017



Prof. Dr. Silke Ruwisch

Danksagung

Für die Vielzahl an konstruktiven Rückmeldungen, die Korrektur meiner Arbeit und die moralische Unterstützung bedanke ich mich bei:

Prof. Dr. Silke Ruwisch,
Prof. Dr. Marcus Nührenböcker,
Prof. Dr. Dagmar Bönig,
Dana Farina Weiher,
Philip Luthardt,
meinen Kolleginnen und Kollegen in Lüneburg,
meinen Eltern und Freunden.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Relevanz des Themas.....	5
1.1 Schätzen in Bildungsstandards und Lehrplänen.....	6
1.2 Bedeutung des Schätzens von Größen für den Unterricht	7
2 Mathematikdidaktischer Hintergrund	9
2.1 Schätzen.....	9
2.1.1 Arten des Schätzens.....	9
2.1.2 Abgrenzung des Schätzens zu weiteren Begrifflichkeiten... 15	
2.2 Größen	19
2.2.1 Größen als Äquivalenzklassen von Repräsentanten	20
2.2.2 Größen als reelle Zahlen	24
2.2.3 Größen und ihre Einheiten.....	26
2.3 Das Schätzen von Größen	27
2.3.1 Schätzen als Teilbereich von Größenvorstellungen	28
2.3.2 Arten des Größenschätzens	31
2.3.3 Auswertung und Beurteilung von Schätzwerten.....	35
3 Psychologische Grundlagen	43
3.1 Kognitives Schätzen.....	43
3.2 Von der Wahrnehmung zur Vorstellung.....	47
3.3 Mentales Operieren mit Vorstellungsbildern	50
4 Visuell wahrnehmbare Größen	53
4.1 Länge.....	54
4.2 Volumen.....	55
4.3 Voraussetzungen für das Schätzen visuell-wahrnehmbarer Größen	57
4.3.1 Vergleichen	57

4.3.2 Messen	64
4.3.3 Stützpunktvorstellungen	69
5 Forschungsstand	75
5.1 Schätzgenauigkeit	75
5.1.1 Der Einfluss aufgabenspezifischer Merkmale auf die Schätzgenauigkeit	78
5.1.2 Der Einfluss personenspezifischer Merkmale auf die Schätzgenauigkeit	79
5.2 Strategien beim Schätzen von Größen	82
5.2.1 Bevorzugte Strategiewahl	91
5.2.2 Schätzgenauigkeit	92
6 Untersuchungsdesign	97
6.1 Ziel und Fragestellungen der Untersuchung	97
6.2 Konzeption der Untersuchung	99
6.2.1 Datenerhebung	99
6.2.2 Phasen der Erhebung	102
6.2.3 Aufgabendesign	103
6.2.4 Stichprobe	114
6.2.5 Durchführung der Interviews	116
6.2.6 Auswertungsmethode	117
7 Strategien beim Schätzen von Längen und Fassungs- vermögen	121
7.1 Größenübergreifende Schätzstrategien	121
7.1.1 Zerlegen und Zusammensetzen	121
7.1.2 Einschachteln	123
7.1.3 Indirekter und direkter mentaler Vergleich	124
7.1.4 Visuelles Vorgehen	129
7.2 Größenspezifische Strategien	130

7.2.1	Mentaler und konkreter Vergleich mit einem körper-eigenen Messinstrument beim Schätzen von Längen.....	131
7.2.2	Mentaler Vergleich mit Objekt(teil)en innerhalb einer Aufgabe beim Schätzen von Längen.....	133
7.2.3	Mentaler und konkreter Vergleich mit Gewichtsvorstellung beim Schätzen von Fassungsvermögen	134
7.3	Strategiekombinationen.....	134
7.4	Modell zur Systematisierung von Schätzstrategien	136
7.5	Häufigkeiten der Schätzstrategien	138
7.6	Zusammenfassung der Ergebnisse mit Bezug zum Forschungsstand	140
8	Aufgabenspezifische Einflussfaktoren auf die Strategiewahl .	145
8.1	Art der Auswertung	145
8.2	Größenbereich.....	146
8.2.1	Auswertung nach Hauptkategorien	146
8.2.2	Auswertung nach Unterkategorien	150
8.2.3	Auswertung nach verwendeten Bezugsobjekten.....	151
8.3	Aufgabenart	152
8.4	Größenspanne.....	154
8.4.1	Auswertung nach Oberkategorien	155
8.4.2	Auswertung nach den verwendeten Bezugsobjekten	157
8.5	Zusammenfassung der Ergebnisse mit Bezug zum Forschungsstand	158
9	Aufgabenspezifische Einflussfaktoren auf die Schätzgenauigkeit.....	161
9.1	Art der Auswertung	161
9.2	Größenbereich.....	166
9.3	Größenspanne.....	170
9.3.1	Kategorie sehr klein	172
9.3.2	Kategorie klein	174

9.3.3	Kategorie mittel I	176
9.3.4	Kategorie mittel II	178
9.3.5	Kategorie groß	180
9.3.6	Zusammenfassung	182
9.4	Zusammenfassung der Ergebnisse mit Bezug zum Forschungsstand	183
10	Der Einfluss der Strategiewahl auf die Schätzgenauigkeit.....	185
10.1	Auswertung nach Oberkategorien.....	185
10.2	Auswertung nach den verwendeten Stützpunktvorstellungen	191
10.3	Zusammenfassung der Ergebnisse mit Bezug zum Forschungsstand	194
11	Personenspezifische Einflussfaktoren	197
11.1	Der Einfluss personenspezifischer Merkmale auf die Strategiewahl.....	197
11.1.1	Stützpunktwissen.....	197
11.1.2	Leistungsniveau im Mathematikunterricht	202
11.1.3	Geschlecht.....	203
11.1.4	Klassenzugehörigkeit	204
11.2	Der Einfluss personenspezifischer Merkmale auf die Schätzgenauigkeit	205
11.2.1	Art der Auswertung	206
11.2.2	Zusammenhang zwischen den Variablen.....	206
11.3	Zusammenfassung der Ergebnisse mit Bezug zum Forschungsstand	208
12	Vertiefende Fallinterpretation	211
12.1	Merkmale erfolgreicher Schätzerinnen und Schätzer	211
12.1.1	Erfolgreiche Schätzerinnen und Schätzer in beiden Größenbereichen.....	212
12.1.2	Erfolgreiche Schätzerinnen und Schätzer im Größenbereich Länge.....	214

12.1.3	Erfolgreiche Schätzerinnen und Schätzer im Größenbereich Fassungsvermögen	216
12.2	Schwierigkeiten mit dem Schätzprozess.....	221
12.2.1	Schwierigkeiten mit dem mentalen Vergleichsprozess.....	221
12.2.2	Fehlerfortpflanzung durch falsche Ausgangs- bedingung.....	223
12.2.3	Fehlvorstellung.....	226
12.2.4	Vernachlässigung der verschiedenen Dimensionen.....	229
12.2.5	Fehlende Einsicht in die dezimale Struktur des Größenbereichs	231
12.3	Zusammenfassung der Ergebnisse mit Bezug zum Forschungsstand	235
13	Resümee und Ausblick.....	239
13.1	Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse	239
13.2	Kritische Reflexion der Untersuchung	244
13.3	Ausblick	246
13.3.1	Konsequenzen für die Forschung	246
13.3.2	Konsequenzen für die Praxis	247
	Literaturverzeichnis	251
	Anhang	267

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1:	Abstraktionsprozess	20
Abbildung 2:	Größenvorstellungen	29
Abbildung 3:	Modell für ein Gewichtskonzept.....	30
Abbildung 4:	Acht Arten des Schätzens	33
Abbildung 5:	Modell zum kognitiven Schätzen.....	46
Abbildung 6:	Zusammenspiel zwischen visueller Wahrnehmung und visueller Vorstellung	48
Abbildung 7:	Beispielitem Aufgabenart 2.....	105
Abbildung 8:	Beispielitem Aufgabenart 4.....	108
Abbildung 9:	Kategoriensystem.....	137
Abbildung 10:	Häufigkeitsverteilung der Kategorien	139
Abbildung 11:	Häufigkeitsverteilung der Kategorien in den beiden Größenbereichen.....	150
Abbildung 12:	Prozentuale Abweichung von Schätzwerten einer Expertenbefragung in der Kategorie <i>sehr klein</i>	163
Abbildung 13:	Prozentuale Abweichung von Schätzwerten einer Expertenbefragung in der Kategorie <i>groß</i>	164
Abbildung 14:	Prozentuale Abweichung der Schätzwerte in den beiden Größenbereichen.....	169
Abbildung 15:	Verteilung von Schätzwerten in den fünf Größenspannen im Größenbereich Volumen	171
Abbildung 16:	Verteilung von Schätzwerten in den fünf Größenspannen im Größenbereich Länge.....	172
Abbildung 17:	Prozentuale Abweichung in der Kategorie <i>sehr klein</i> in den beiden Größenbereichen.....	173
Abbildung 18:	Prozentuale Abweichung der Schätzwerte in der Kategorie <i>klein</i> in den beiden Größenbereichen.....	175
Abbildung 19:	Prozentuale Abweichung in der Kategorie <i>mittel I</i> in den beiden Größenbereichen.....	177
Abbildung 20:	Prozentuale Abweichung in der Kategorie <i>mittel II</i> in den beiden Größenbereichen.....	179

Abbildung 21:	Prozentuale Abweichung in der Kategorie <i>groß</i> in den beiden Größenbereichen.....	181
Abbildung 22:	Streuung der Schätzwerte in den Kategorien <i>konkret, mental, visuell</i>	189
Abbildung 23:	Boxplot der Kategorie <i>mentaler Vergleich mit einer</i> <i>Stützpunktvorstellung (IMV und DMV gemeinsam)</i> ...	193

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1:	Größenbereiche und ihre Repräsentanten, Einheiten und Relationen	22
Tabelle 2:	Verschiedene Auswertungskriterien in wissenschaftlichen Studien	39
Tabelle 3:	Zusammenhang zwischen Körpermaßen und Hohlmaßen	56
Tabelle 4:	Verschiedene Arten von Messinstrumenten in den Größenbereichen Länge und Fassungsvermögen.....	69
Tabelle 5:	Beispielhafte Stützpunkte zu Standardeinheiten der Größenbereiche Länge und Fassungsvermögen.....	71
Tabelle 6:	(Un-)mittelbare Größenvorstellungen am Beispiel von Standardeinheiten der Größenbereiche Länge und Fassungsvermögen	73
Tabelle 7:	Strategien und deren unterschiedliche Bezeichnung in der Literatur	90
Tabelle 8:	Zeitpunkte und Art der Erhebung	102
Tabelle 9:	Beispielitem des schriftlichen Tests zur Überprüfung des Stützpunktwissens	105
Tabelle 10:	Aufgabenart 2 im Größenbereich Länge	106
Tabelle 11:	Aufgabenart 2 im Größenbereich Fassungsvermögen.....	106
Tabelle 12:	Aufgabenart 3 im Größenbereich Länge	107
Tabelle 13:	Aufgabenart 3 im Größenbereich Fassungsvermögen.....	107
Tabelle 14:	Aufgabenart 4 im Größenbereich Länge	108
Tabelle 15:	Aufgabenart 4 im Größenbereich Fassungsvermögen.....	109
Tabelle 16:	Vergleichbarkeit der Größen zwischen den Aufgabenarten im Größenbereich Länge	110
Tabelle 17:	Vergleichbarkeit der Größen zwischen den Aufgabenarten im Größenbereich Fassungsvermögen.....	111

Tabelle 18:	Einteilung der Objekte hinsichtlich ihrer Normierung	112
Tabelle 19:	Einteilung der Objekte hinsichtlich ihrer Strukturierung	112
Tabelle 20:	Zusammensetzung der Stichprobe	115
Tabelle 21:	Gleichmäßiges Zerlegen und Zusammensetzen.....	122
Tabelle 22:	Ungleichmäßiges Zerlegen und Zusammensetzen...	123
Tabelle 23:	Einschachteln	123
Tabelle 24:	Direkter (oben) und indirekter (unten) Vergleich mit Stützpunktvorstellungen beim Schätzen von Längen	124
Tabelle 25:	Indirekter Vergleich mit Stützpunktvorstellungen beim Schätzen von Fassungsvermögen	125
Tabelle 26:	Indirekter mentaler Vergleich mit einer Standardeinheit	126
Tabelle 27:	Indirekter mentaler Vergleich mit einem normierten Messinstrument	127
Tabelle 28:	Direkter mentaler Vergleich mit einem gegenständlichen Messinstrument.....	128
Tabelle 29:	Indirekter (oben) und direkter(unten) mentaler Vergleich mit einem realen Objekt	128
Tabelle 30:	Indirekter mentaler Vergleich mit einem Objekt aus vorheriger Aufgabe	129
Tabelle 31:	Visuelles Vorgehen.....	130
Tabelle 32:	Mentaler Vergleich mit einem körpereigenen Messinstrument	131
Tabelle 33:	Konkreter indirekter Vergleich mit einem körpereigenen Messinstrument	132
Tabelle 34:	Mentaler Vergleich mit Objekt(teil)en innerhalb einer Aufgabe	133
Tabelle 35:	Mentaler und konkreter Vergleich mit Gewicht(-svorstellung).....	134
Tabelle 36:	Zerlegen und Zusammensetzen ohne Kombination .	135
Tabelle 37:	Kombination von Vergleich mit Objekt aus vorheriger Aufgabe mit visuellem Vorgehen/Mehrere Dimensionen	136

Tabelle 38:	Häufigkeitsverteilung der Hauptkategorien nach Größenbereichen.....	147
Tabelle 39:	Häufigkeitsverteilung indirekter und direkter Vergleiche nach Größenbereichen.....	149
Tabelle 40:	Häufigkeitsverteilung der Vergleichsobjekte in den beiden Größenbereichen.....	151
Tabelle 41:	Häufigkeitsverteilung der Oberkategorien in den drei Aufgabenarten	152
Tabelle 42:	Häufigkeitsverteilung der Vergleichsobjekte in den drei Aufgabenarten	154
Tabelle 43:	Häufigkeitsverteilung der Strategien in den sechs Größenspannen.....	155
Tabelle 44:	Häufigkeitsverteilung der Vergleichsobjekte in den sechs Größenspannen	157
Tabelle 45:	Deskriptive Kennwerte der beiden Größenbereiche Länge und Volumen inkl. Ausreißer	167
Tabelle 46:	Deskriptive Kennwerte der beiden Größenbereiche Länge und Volumen ohne Ausreißer.....	167
Tabelle 47:	Deskriptive Kennwerte der Hauptkategorien.....	186
Tabelle 48:	Auswertung der Hauptkategorien bezüglich des 10%-, 25%- und 50%-Kriteriums	190
Tabelle 49:	Deskriptive Kennwerte der Unterkategorien <i>Stützpunktvorstellung</i>	192
Tabelle 50:	Anzahl passender Stützpunkte pro Klasse.....	199
Tabelle 51:	Zusammenhang zwischen Strategie und Stützpunktwissen Länge.....	200
Tabelle 52:	Zusammenhang zwischen Strategie und Stützpunktwissen Volumen	202
Tabelle 53:	Zusammenhang zwischen Leistungsstand im Mathematikunterricht und Strategiewahl.....	203
Tabelle 54:	Zusammenhang zwischen Geschlecht und Strategiewahl.....	204
Tabelle 55:	Zusammenhang zwischen Unterricht und Strategiewahl	205

Tabelle 56:	Korrelationsmatrix der Variablen Stützpunktwissen, Leistungsniveau im Mathematikunterricht und angemessene Schätzwerte	207
-------------	--	-----

Einleitung

„Beim Messen, da hast du ja ein Hilfsmittel, und beim Schätzen, da benutzt du deinen Kopf.“

„Messen heißt genau machen und schätzen, wie man selbst denkt.“

Mit diesen Aussagen erklärten zwei der in der vorliegenden Studie interviewten Viertklässlerinnen und Viertklässler den Unterschied zwischen Messen und Schätzen. Diese Aussagen der Kinder werfen Fragen auf: *Wie bestimmen wir eine Größe, wenn uns kein Messinstrument zur Verfügung steht und wir kein genaues Ergebnis ermitteln können? Was geschieht dann in unseren Köpfen?* Die Arbeit widmet sich daher auf theoretischer und empirischer Basis der mentalen Tätigkeit des Schätzens und geht der Frage nach, welche Strategien Kinder nutzen, um Schätzaufgaben zu lösen.

Die Kinder erklären das Schätzen in den obigen Aussagen als einen aktiven und individuellen Prozess, auf den wir in Situationen angewiesen sind, wenn wir kein genaues Ergebnis ermitteln können. Solche Situationen entstehen im Alltag vielfach, ohne dass wir uns über die Tätigkeit des Schätzens bewusst werden. Denn Schätzungen werden in Alltagssituationen viel häufiger gebraucht als schriftliche Rechenverfahren oder genaue Messungen (vgl. Blankenagel 1983, S. 315). Sie werden immer dann benötigt, wenn keine exakten Bestimmungen möglich, notwendig oder sinnvoll sind (vgl. Van den Heuvel-Panhuizen 2008, S. 174). *Nicht möglich* bezieht sich dabei auf eine unvollständige Datenlage oder fehlende Hilfsmittel, die es verhindern, eine exakte Kalkulation oder genaue Messung durchzuführen. *Nicht notwendig oder sinnvoll* steht in engem Zusammenhang mit der durch die Schätzung hervorgerufene Zeitersparnis. So möchte man sich nicht vorstellen, wie lange das jeweilige Einladen eines Kofferraums, das Überqueren einer Straße oder ein Einkauf dauern würde, wenn diese Tätigkeiten an eine exakte Berechnung des Volumens, der Länge oder des Preises gekoppelt wären. Das Schätzen ist demnach eine mathematische Praxis des täglichen Lebens (vgl. Masingila 1993, S. 18).

Der Alltagsbezug der Tätigkeit des Schätzens steht – wie in den hier beschriebenen Beispielen deutlich wird – in einer engen Verbindung zu Größen. „Die Größen haben hier den Vorteil, der Realität näher zu stehen als die Zahlen und deutlicher zu gegenständlichen Tätigkeiten Bezüge zu haben“ (Frenzel und Grund 1991c, S. 7).

Masingila (1993) sieht in der Berücksichtigung des Schätzens im Unterricht eine Möglichkeit, die Lücke zwischen Schulmathematik und realer Welt zu schließen (vgl. ebd., S. 18ff.). Dieser Unterrichtsinhalt eröffnet die Chance, einerseits außerschulische Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler in den Mathematikunterricht zu integrieren, andererseits mathematisches Wissen über einen Alltagskontext zu entwickeln. Ein Unterricht, der die Tätigkeit des Schätzens wertschätzt, macht es möglich, Mathematik lebensnah und realitätsbezogen zu gestalten sowie Schülerinnen und Schülern ein anwendungsbezogenes und nützliches Bild der Mathematik zu vermitteln (vgl. Möwes-Butschko 2009, S. 14).

„Für sehr viele Realprobleme gibt es nicht die richtige Antwort, oft gibt es nicht das beste Modell, nicht die eindeutig bestimmte optimale Lösung! – diese Erkenntnis bedeutet Abschied zu nehmen von der Vision, alles sei in der Mathematik schließlich doch beliebig genau zu berechnen, zu entscheiden, zu lösen; bedeutet damit Abschied zu nehmen von dem idealisierten „Modell“, das der übliche (und den üblichen) Mathematikunterricht prägt [...]“ (Hergert 1999, S. 9).

Trotz dieser hohen Bedeutung, die der Tätigkeit des Schätzens von den Autorinnen und Autoren beigemessen wird, und der Verankerung des Schätzens in den Bildungsstandards Mathematik aus dem Jahr 2004 für den Primarbereich (siehe Kapitel 1.1) gibt es insbesondere im deutschsprachigen Raum bisher keine Studien, die sich auf theoretischer und/oder empirischer Basis umfassend mit der Tätigkeit des Schätzens auseinandersetzen. Auf der Grundlage von Ergebnissen einzelner Schätzaufgaben ist bisweilen nur bekannt, dass es den Schülerinnen und Schülern schwerfällt, genaue Schätzwerte anzugeben. Die Ursachen dieser Schwierigkeiten sind bisher noch unklar. Die Studien aus dem internationalen Raum teilen sich in zwei Strömungen. Im Fachbereich der Kognitionspsychologie wird das Schätzen als eine anspruchsvolle kognitive Fähigkeit angesehen, die anhand von schriftlichen Tests geprüft wird, um exekutive Dysfunktionen und die kristalline Intelligenz der Probanden zu testen. In Fachbereich der Mathematikdidaktik befassen sich die internationalen Studien entweder mit der Genauigkeit von Schätzwerten oder mit dem Strategieeinsatz beim Schätzen von Längen.

Um einen Beitrag zu diesem Forschungsfeld zu leisten, werden die Strategien beim Schätzen von 46 Viertklässlerinnen und Viertklässlern in zwei unterschiedlichen Größenbereichen in einer Interviewstudie erhoben. Auf diese Weise wird überprüft, ob die bekannten Strategien bisheriger Studien von den Schülerinnen und Schülern genutzt und in einem anderen Größenbereich angewendet werden. Als zweite Größe wurde

das Fassungsvermögen ausgewählt. Dieses ist einerseits genauso wie die Länge visuell wahrnehmbar und macht beim Schätzen das Nutzen ähnlicher Strategien möglich, andererseits wird es im Mathematikunterricht der Grundschule als ein Aspekt von Volumina schwerpunktmäßig thematisiert und ist in den curricularen Vorgaben der verschiedenen Bundesländer verankert (siehe hierzu Kapitel 1.1).

Das Ziel der Studie ist es, einen Einblick in die Denkweisen und Vorgehensweisen der Kinder beim Schätzen dieser beiden Größen zu geben und die Schwierigkeiten der Kinder mit der mentalen Tätigkeit des Schätzens aufzudecken. Darüber hinaus werden über eine quantitative Auswertung aufgaben- sowie personenspezifische Einflussfaktoren ermittelt, die die Strategiewahl und die Schätzgenauigkeit beeinflussen. Die quantitativen Auszählungen werden diesbezüglich genutzt, um Zusammenhänge aufzudecken, die später anhand von Einzelfallstudien vertieft werden.

Das erste Kapitel stellt über die bisherigen Aspekte hinaus die Relevanz des Themas dar. Über den Blick in die curricularen Vorgaben der Bundesländer, die an der Studie beteiligt waren, und die mathematikdidaktische Literatur soll auf diese Weise dargelegt werden, warum sich die vorliegende Studie mit der Tätigkeit des Schätzens auseinandersetzt. Sie wird anschließend aus zwei unterschiedlichen Perspektiven betrachtet. So gibt die Studie sowohl einen Einblick in die mathematikdidaktischen als auch die psychologischen Grundlagen. In Kapitel 2 erfolgt aus mathematikdidaktischer Perspektive ein Überblick über die verschiedenen Arten des Schätzens und Begrifflichkeiten mit Bezug zum Schätzen. Von diesem allgemeinen Ausgangspunkt aus fokussiert sich die Arbeit anschließend auf das Schätzen von Größen. Es erfolgt eine Darstellung der mathematischen Struktur von Größen sowie eine Erläuterung des Schätzens als Teilbereich von Größenvorstellungen. Die anschließende Auseinandersetzung mit verschiedenen Arten des Größenschätzens und der Beurteilung von Schätzwerten bildet das Fundament für das Aufgabendesign der empirischen Studie und die Auswertung der erhobenen Schätzwerte.

Um den Blick über die mathematikdidaktische Literatur hinaus zu erweitern, wird in Kapitel 3 das Schätzen aus kognitionspsychologischer Perspektive beleuchtet. Dabei wird zunächst allgemein erklärt, auf welchen kognitiven Prozessen das Schätzen von Größen basiert. Anschließend werden die Prozesse beim Schätzen von visuell-wahrnehmbaren Größen detailliert beleuchtet. Hierbei steht insbesondere der Aufbau von

und das Operieren mit Vorstellungsbildern im Fokus. Kapitel 2 und 3 bilden dann die Grundlage für das nächste Kapitel, das sich ausführlich mit den beiden Größen *Länge* und *Fassungsvermögen* beschäftigt. In diesem wird insbesondere geklärt, welche Voraussetzungen für das Schätzen dieser Größen benötigt werden und wann Kinder diese erfüllen. In Kapitel 5 werden schließlich die Ergebnisse früherer Studien vorgestellt, die sich mit dem Schätzen von Größen befassen. Dieses Kapitel gliedert sich – entsprechend der Forschungsschwerpunkte der Studien – in die Abschnitte *Schätzgenauigkeit* und *Strategien beim Schätzen von Längen*. Diese Darstellung der Strategien und Aufarbeitung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden in den bisherigen Studien bilden die Basis für das in dieser Arbeit entwickelte Modell zur Systematisierung von Schätzstrategien.

Den Übergang zum empirischen Teil der Arbeit bildet Kapitel 6, in dem das Ziel und die Forschungsfragen detailliert vorgestellt werden sowie die Methode der Studie erläutert und begründet wird. Die anschließende Darstellung der Ergebnisse beginnt mit dem Herzstück der Arbeit: Die Strategien der Kinder werden zunächst analysiert und anschließend in einem Modell zusammengefasst.

Über die Häufigkeitsauszählungen in den Kapitel 8 bis 11 soll daraufhin geklärt werden, welche aufgaben- und personenspezifischen Faktoren die Strategiewahl und die Genauigkeit der Schätzwerte beeinflussen. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen Strategiewahl und Schätzgenauigkeit untersucht. In allen vier Auswertungskapiteln wird zunächst die Auswertungsmethode vorgestellt, bevor sich alle weiteren Unterkapitel den verschiedenen Einflussfaktoren widmen. Die Erkenntnisse der quantitativen Auswertung werden in Kapitel 12 durch die Analyse von Einzelfällen vertieft und erläutert.

Den Abschluss der Arbeit bildet Kapitel 13, in dem die Ergebnisse der Studie zusammenfassend dargestellt, kritisch diskutiert sowie Konsequenzen für Forschung und Praxis aufgezeigt werden.

1 Relevanz des Themas

„Beide Welten beanspruchen Realität, die wo Genauigkeit eine Tugend und die wo Genauigkeit ein Laster ist, und um in beiden zu Hause zu sein, muß [sic!] man sie bewußt [sic!] zu unterscheiden lernen“

(Freudenthal 1978, S. 249)

Im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts steht häufig nur die von Freudenthal beschriebene Welt der Genauigkeit. Diese wird gekennzeichnet durch die Suche nach einer exakten Lösung. Eine solche Fokussierung des Unterrichts auf einen spezifischen Lösungsweg und das eine richtige Ergebnis lässt die zweite von Freudenthal beschriebene Welt schnell vergessen. Diese wird von Blankenagel (1983) als die „Welt der ungenauen Zahl“ bezeichnet (ebd., S. 315). Sie wird charakterisiert durch offene Lösungswege und unterschiedliche Ergebnisse, die für eine Fragestellung gleichermaßen als richtig gelten können. Die Tätigkeit des Schätzens in ihren verschiedenen Facetten (siehe Kapitel 2.1.1) ermöglicht es, die Welt der ungenauen Zahlen im Unterricht zu thematisieren und einen Beitrag zu der zweiten Seite der Mathematik zu leisten (vgl. Blankenagel 1983, S. 316).

„Ignoring estimation gives students a distorted view of mathematics. The facet of mathematics that strives for single correct answers covers only a part of mathematics“ (Usiskin 1986, S. 15). Doch genau diese Vernachlässigung des Schätzens im Unterricht und einer damit einhergehenden fehlenden Sinnhaftigkeit des Schätzens für Schülerinnen und Schüler wird von vielen Autoren thematisiert (vgl. Frenzel und Grund 1991b; Winter 1992; Forrester und Pike 1998; Herget 1999; Greefrath und Leuders 2009). So lernen Schülerinnen und Schüler in einem Unterricht, in dem Genauigkeit und Präzision die Schwerpunkte bilden, dass exakte Rechnungen einer Schätzung vorzuziehen sind (vgl. Usiskin 1986; Herget 2001). Werden Schätzungen lediglich eingefordert, bevor der exakte Wert ermittelt wird, werden diese von Schülerinnen und Schülern eher als minderwertig und unbrauchbar empfunden (siehe hier Kapitel 2.3.2).

1.1 Schätzen in Bildungsstandards und Lehrplänen

Der Umgang mit der Welt der ungenauen Zahl ist in den verschiedenen Bildungsplänen für die Grundschule fest verankert. In den *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich* findet sich die Tätigkeit des Schätzens in den zwei inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen „Zahlen und Operationen“ sowie „Größen und Messen“ (vgl. Kultusministerkonferenz 2004, S.11ff.). Neben dem Überschlagsrechnen, um u.a. Ergebnisse auf Plausibilität zu prüfen, spielt das Schätzen im inhaltsbezogenen Kompetenzbereich „Zahlen und Operationen“ insbesondere im Bereich des Sachrechnens eine entscheidende Rolle. So sollen Schülerinnen und Schüler anwendungsbezogene Aufgaben schätzend lösen sowie kontextspezifisch Entscheidungen treffen, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht oder ein exaktes Ergebnis notwendig wird (vgl. ebd., S. 12).

Im Kompetenzbereich „Größen und Messen“ setzt sich die Kompetenz „Größenvorstellungen besitzen“ unter anderem aus einem „Vergleichen, Messen und Schätzen von Größen“ sowie einem „Wissen um Repräsentanten für Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte¹ und Rauminhalte“ zusammen. Auch in diesem inhaltsbezogenen Kompetenzbereich wird der hohe Anwendungsbezug der Tätigkeit des Schätzens deutlich. In Sachsituationen sollen Schülerinnen und Schüler angemessen mit Näherungswerten rechnen und Größen begründet schätzen können (vgl. ebd., S. 14).

Betrachtet man vergleichend hierzu die Ausführungen im niedersächsischen *Kerncurriculum für die Grundschule für das Fach Mathematik*, so werden die beschriebenen Teilkompetenzen präziser geschildert. Das Schätzen wird dort explizit als „eine Möglichkeit zur Bestimmung von Näherungswerten [...] [beschrieben], die häufig zur Beantwortung von sachbezogenen Fragestellungen ausreichen“ (Niedersächsisches Kultusministerium 2006, S. 23). Die Grundlage des Schätzprozesses bildet der Vergleich mit Stützpunktvorstellungen, die an anderer Stelle als Vergleichsgrößen betitelt werden. Diese sollen sich im Unterricht durch die Auseinandersetzung mit den für die Primarstufe relevanten Größenbereichen entwickeln (vgl. ebd., S. 23).

Im *Lehrplan Grundschule für das Land Schleswig-Holstein* wird das Schätzen hingegen weniger thematisiert und im Vergleich zum niedersächsischen Kerncurriculum nicht explizit definiert (vgl. Ministerium für

1 Physikalisch ist hier die Bezeichnung „Masse“ korrekt.

Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur des Landes Schleswig-Holstein 1997). Jedoch werden im Arbeitsfeld „Größen“ spezifische Schlüsselqualifikationen für die Größenbereiche Länge, Fassungsvermögen, Gewichte, Zeitspannen und Geldwerte aufgeführt. Die Tätigkeit des Schätzens wird dort ausschließlich in den beiden Größenbereichen Länge und Fassungsvermögen genannt (vgl. ebd., S.82ff.). Das Fassungsvermögen von Gefäßen soll diesbezüglich in den Einheiten Liter und Milliliter bestimmt und mit Hilfe von Messbechern geschätzt werden (vgl. ebd., S.84).²

1.2 Bedeutung des Schätzens von Größen für den Unterricht

„Ich weiß zwar nicht was ich rechne, aber dafür rechne ich es unheimlich genau!“ (Krauter 2008, S. 8). Eine Fokussierung auf exaktes Rechnen im Unterricht, wie sie im vorherigen Kapitel beschrieben wurde, geht häufig mit einem fehlenden Gefühl für Zahlen und Größen einher, welches von Paulos (1990) als Zahlenblindheit bezeichnet wird (in Bezug auf Größen siehe ebd., S. 11f.). Das Schätzen als Unterrichtsinhalt bietet hier eine Möglichkeit, Zahl- und Größenvorstellungen von Schülerinnen und Schülern aufzubauen und weiterzuentwickeln. Größenvorstellungen werden insbesondere dann aufgebaut, wenn sich die Schülerinnen und Schüler mit Gegenständen in konkreten Handlungen auseinandersetzen (siehe hierzu Kapitel 4.3.3). Werden diese Handlungserfahrungen im Umgang mit Größen im Unterricht ermöglicht und der bereits beschriebene hohe Alltagsbezug von Größen für die Unterrichtsgestaltung genutzt, besitzen Größen einen hohen Aufforderungscharakter für Schülerinnen und Schüler. Einerseits führt dies zu einer Steigerung der intrinsischen Motivation, sich mit Größen im Unterricht auseinanderzusetzen (vgl. Van de Walle 2008), andererseits bleiben die entsprechenden Größen auch über den Unterricht hinaus für die Kinder relevant. Wird darüber hinaus die Tätigkeit des Schätzens im Unterricht wertgeschätzt und deren Bedeutung für die Kinder aufgezeigt, können Schülerinnen und Schüler durch den Unterricht befähigt werden, eigene Messwerte zu überprüfen und unlogische Fakten im Alltag zu erkennen (vgl. Crites 1993; Muir 2005). Das Schätzen

2 Eine ausführliche Gegenüberstellung der Inhalte des Kompetenzbereichs „Größen und Messen“ des *niedersächsischen Kerncurriculums* und des Arbeitsfelds „Größen“ des *Lehrplans Grundschule für das Land Schleswig-Holstein* findet sich im Anhang (siehe Anhang A).

kann so einen Beitrag zum kritischen Hinterfragen und Prüfen von Zahl- und Größenangaben leisten.

Das Schätzen von Größen nimmt außerdem einen wichtigen Stellenwert im Zusammenhang mit dem Messen von Größen ein. Joram et al. (2005) sehen in der Tätigkeit des Schätzens besondere Relevanz, um Prinzipien und Verfahren des Messen zu erlernen (vgl. ebd., S.4). „Estimation procedures can lead to new insights about exact procedures” (Usiskin 1986, S. 14). Denn der Messprozess wird beim Schätzen von Größen in Gedanken vollzogen (siehe Kapitel 2.1 *Das Schätzen von Größen*). Wird im Schätzprozess beispielsweise eine Standardeinheit mental hintereinander gelegt, kann diese gedankliche Operation die Vertrautheit im Umgang mit Einheiten fördern (vgl. Van de Walle 2008, S.378) und zu einem tieferen Verständnis des realen Messprozesses führen (vgl. O'Daffer 1979, S. 47). Mentale Bilder von Standardeinheiten können so ausgebildet und das Operieren in der Vorstellung mit diesen geübt werden (vgl. Lang 1999, S. 79) (siehe hierzu auch Kapitel 3.3).

Offene Lösungswege – ein besonderes Kennzeichen von Schätzaufgaben – können zudem die Fähigkeit von Schülerinnen und Schülern fördern, Probleme zu lösen (vgl. Van de Walle und Thompson 1985, S. 4). Der Schätzprozess befreit Schülerinnen und Schüler vor festen Lösungswegen und regt sie an, eigenständig über die Problemstellung nachzudenken (vgl. O'Daffer 1979, S. 47). Diese Problemlösefähigkeit und weitere Kompetenzen, die durch die Integration des Schätzens im Unterricht entwickelt werden, bilden schließlich die Basis für viele weitere Inhalte der Mathematik: „The process of estimating may involve visualizing, counting, approximate calculations, sub-dividing the quantity to be measured: all these are important processes in mathematics” (Ainley 1991, S. 73).

2 Mathematikdidaktischer Hintergrund

Dieses Kapitel widmet sich der Tätigkeit des Schätzens von Größen aus mathematikdidaktischer Perspektive. Zunächst wird die Tätigkeit des Schätzens im Fokus stehen und in diesem Rahmen der Begriff des Schätzens zu anderen Begrifflichkeiten abgegrenzt (Kapitel 2.1.) Danach folgen eine Darstellung der mathematischen Struktur von Größen und eine Erläuterung der diesbezüglichen Auffassungen (Kapitel 2.2). Kapitel 2.3 behandelt das Schätzen von Größen. Es charakterisiert das Schätzen als Teilbereich von Größenvorstellungen und stellt die acht Arten des Größenschätzens vor. Abschließend werden verschiedene Auswertungsmethoden für Schätzwerte vorgestellt.

2.1 Schätzen

In diesem Kapitel werden die aus mathematikdidaktischer Perspektive relevanten drei Arten des Schätzens dargelegt und diese voneinander abgegrenzt. Diesbezüglich wird auf die in englischsprachigen Veröffentlichungen gebräuchlichen Begrifflichkeiten und deren uneinheitlichen Gebrauch eingegangen. Anschließend werden weitere Begrifflichkeiten, die mit der Tätigkeit des Schätzens im Zusammenhang stehen und für den empirischen Teil der Arbeit bedeutsam sind, definiert und deren Unterschiede zur Tätigkeit des Schätzens aufgezeigt.

2.1.1 Arten des Schätzens

Der Begriff des Schätzens findet sich in verschiedenen Inhaltsbereichen der Mathematik. Dies wird insbesondere in der englischsprachigen Literatur deutlich, in der drei Arten von Schätzungen mit den Begrifflichkeiten *Computational*, *Numerosity* und *Measurement Estimation* unterschieden werden (u.a. Hogan und Brezinski 2003; Thompson 1979). In der deutschsprachigen Literatur ist die englische Bezeichnung *Computational Estimation* mit der Tätigkeit des *überschlagenden Rechnens* gleichzusetzen, durchaus lässt sich dieses aber auch als schätzendes Rechnen bezeichnen (vgl. Peter-Koop 1999, S. 13; Selter 1999, S. 23f.). Zu-

dem kann die Anzahl von Objekten in einer Menge (*Numerosity Estimation*) sowie die Größe von Objekten (*Measurement Estimation*) geschätzt werden.

Alle drei Arten des Schätzens beinhalten das Ermitteln eines ungefähren Wertes. „Estimating a desired quantity involves making a judgment based on very general consideration – in contrast to finding the quantity by an exact mathematical procedure“ (Thompson 1979, S. 575). Es ist also der Umgang mit der Ungenauigkeit, der die Tätigkeit des Schätzens kennzeichnet (vgl. Greefrath und Leuders 2009; Möwes-Butschko 2009). Eine Annäherung an den realen Wert steht im Vordergrund, dass dieser exakt berechnet wird, ist dabei nebensächlich (zur Beurteilung von Schätzwerten siehe Kapitel 2.3.3). Das Schätzen beruht also nicht auf der Anwendung einer mathematischen Technik oder eines vorgegebenen Verfahrens, sondern auf einem Zurückgreifen auf vorhandenes Wissen sowie einem angemessenen Umgang mit der Mathematik. Durch die große Offenheit im Lösungsprozess und die Akzeptanz unterschiedlicher Ergebnisse werden die Tätigkeiten Schätzen und Überschlagen als weiche mathematische Tätigkeiten bezeichnet (vgl. Möwes-Butschko 2009, S. 14). Trotz dieser Gemeinsamkeit unterscheiden sich die drei Arten des Schätzens genau in dieser Hinsicht. Das Zurückgreifen auf vorhandenes Wissen gestaltet sich auf unterschiedliche Art und Weise. Im Folgenden werden deshalb die drei unterschiedlichen Arten des Schätzens und die in diesem Zusammenhang verwendeten Begrifflichkeiten voneinander abgegrenzt.

Das Schätzen von Größen

„Unter Schätzen verstehen wir das Ermitteln einer relativ groben Größenangabe für eine betrachtete Größe auf der Grundlage eines gedanklichen Vergleichs mit zweckmäßig gewählten Größen, die aus der Erfahrungswelt des jeweiligen Subjektes stammen“ (Frenzel und Grund 1991b, S. 23).

Frenzel und Grund beziehen sich in ihrer Definition des Schätzens explizit auf das Schätzen von Größen und damit auf das Ermitteln eines stetigen Merkmals. Für den Schätzprozess maßgeblich ist dabei ein gedanklicher Vergleich, auf den auch weitere Autorinnen und Autoren ausdrücklich verweisen (vgl. Schipper et al. 2000, S. 212; Greefrath und Leuders 2009, S. 2; Franke und Ruwisch 2010, S. 248). Unterschiede in den Definitionen lassen sich jedoch hinsichtlich der Beschreibung des Objekts erkennen, das für den Vergleich hinzugezogen wird. Die zweckmäßig gewählten